Sorbonne Université
Master Mathématiques et Applications
MU4MA015 : Statistique

7 octobre 2022
Aucun document autorisé
Durée : 1 heure

Contrôle Continu

Rappels

- Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation et à la rédaction. Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat, vous pouvez l'admettre pour la suite de l'exercice.
- On notera comme d'habitude $X_{(1)} = \min_{1 \le i \le n} X_i$.

Soit $\theta > 0$ un paramètre inconnu et X de densité

$$f_\theta(x) = \frac{3\theta^3}{x^4} \mathbf{1}_{[\theta, +\infty[}(x).$$

Dans la suite, on suppose disposer d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d. de même loi que X.

1. Calculer $\mathbb{E}_\theta[X]$ et $\mathbb{E}_\theta[X^2]$. En déduire un estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ par la méthode des moments. Démontrer qu'il est fortement consistant et asymptotiquement normal.
2. Soit $0 < \alpha < 1$. Déduire de la question précédente un intervalle de confiance de niveau asymptotique $(1-\alpha)$ pour θ.
3. Proposer un test de niveau asymptotique α pour décider entre $H_0 : \theta = 1$ et $H_1 : \theta \neq 1$.
4. Calculer la fonction de répartition F_θ de X. En déduire la médiane de la loi de X.
5. En déduire un estimateur $\widetilde{\theta}_n$ de θ. Établir sa normalité asymptotique.
6. Entre $\widehat{\theta}_n$ et $\widetilde{\theta}_n$, quel estimateur choisissez-vous ?
7. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\check{\theta}_n$ de θ.
8. Pour tout $t > 0$, calculer $\mathbb{P}(n(X_{(1)} - \theta) > t)$, puis $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n(X_{(1)} - \theta) > t)$. En déduire que $n(\check{\theta}_n - \theta)$ converge en loi vers une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
9. Entre $\widehat{\theta}_n$, $\widetilde{\theta}_n$ et $\check{\theta}_n$, quel estimateur choisissez-vous ?