

Contrôle Continu

Rappels

- Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation et à la rédaction.
- Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat, vous pouvez l'admettre pour la suite de l'exercice.

EXERCICE 1 Soient $\theta > 0$ et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, \theta]$. On note $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

1. Déterminer la loi de $X_{(n)}$ et donner sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. Déterminer la loi limite de $n(\theta - X_{(n)})$ lorsque n tend vers l'infini.
3. Calculer $\mathbb{E}[X_{(n)}]$ et en déduire un estimateur sans biais de θ . On le notera $\hat{\theta}_n$.
4. Quelle est la loi limite de $n(\theta - \hat{\theta}_n)$?

EXERCICE 2 Soient $\theta > 0$ et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. d'espérance $\sqrt{\theta}$ et de variance 1.

1. Proposer un estimateur consistant de θ par la méthode des moments. On le notera $\hat{\theta}_n$.
2. Déterminer la loi limite de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ et en déduire, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1 - \alpha$ pour θ .
3. On souhaite tester

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta \neq 1.$$

Proposer un test T_n de niveau asymptotique $\alpha \in]0, 1[$.

4. Soit \bar{x}_n une réalisation de $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Exprimer la p -valeur α_0 du test T_n . Pour $n = 100$, et $\bar{x}_n = 0.8$, on trouve $\alpha_0 \simeq 2.4\%$. Rejette-t-on H_0 au niveau 5% ? Au niveau 1% ?

EXERCICE 3 Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |x| \mathbf{1}_{[-1,1]}(x),$$

et, pour $\theta \in \mathbb{R}$, soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. de même loi que $X + \theta$. Pour $p \in]0, 1[$, on note x_p le quantile d'ordre p de la loi des X_i , et $x_p(n)$ le quantile empirique.

1. Donner la fonction de répartition de X , en déduire celle de X_1 .
2. Déterminer $x_{1/2}$. Pourquoi n'est-il pas judicieux d'estimer θ par $x_{1/2}(n)$?
3. Déterminer $x_{3/4}$ et en déduire un estimateur de θ , que l'on notera $\hat{\theta}_n$.
4. Quelle est la loi limite de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$?