Sorbonne Université
Master Mathématiques et Applications
MU4MA015 : Statistique

14 octobre 2024
Aucun document autorisé
Durée : 1 heure

Contrôle Continu

Rappels

- Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation et à la rédaction.
- Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat, vous pouvez l'admettre pour la suite de l'exercice.

Exercice 1 (7 points)

Soit $\theta > 0$ un paramètre inconnu et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$, c'est-à-dire de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{x>0}.$$

1. Rappeler ce que valent $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathbb{V}(X_1)$. En déduire un estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ dont vous justifierez la consistance et la normalité asymptotique.
2. Soit $\alpha \in]0,1[$. Déterminer un intervalle de confiance de niveau asymptotique $(1-\alpha)$ pour θ.
3. Calculer la médiane de la loi de X_1. En déduire un nouvel estimateur $\widetilde{\theta}_n$ de θ et préciser sa normalité asymptotique.
4. Lorsque n est grand, entre $\widehat{\theta}_n$ et $\widetilde{\theta}_n$, quel estimateur choisiriez-vous ?
5. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance.
6. En remarquant que X_1 suit une loi $\gamma(1, \frac{1}{\theta})$, en déduire la loi de $(n\overline{X}_n)/\theta$.
7. Pour tous paramètres $p > 0$ et $\lambda > 0$, on note $F_{p,\lambda}$ la fonction de répartition d'une loi $\gamma(p, \lambda)$. Celle-ci étant continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[0, 1[$, elle admet une fonction réciproque $F_{p,\lambda}^{-1}$ de $[0, 1[$ vers $[0, +\infty[$. Proposer un test de taille (non asymptotique) α pour tester
$$H_0 : \theta \leq 3 \qquad \text{contre} \qquad H_1 : \theta > 3.$$
8. Soit $\overline{x}_n$ une réalisation de $\overline{X}_n$, déterminer la p-valeur $\alpha_0(\overline{x}_n)$ associée.

Exercice 2 (3 points)

Soit $\theta \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi de Rademacher $\mathcal{R}(\theta)$ de paramètre θ, c'est-à-dire prenant les valeurs -1 et $+1$ avec, pour tout $x \in \{-1, 1\}$,

$$\mathbb{P}(X = x) = \theta^{\frac{1+x}{2}} (1-\theta)^{\frac{1-x}{2}}.$$

1. Vérifier que si la variable B suit une loi de Bernoulli de paramètre θ, alors $X = 2B - 1$ suit une loi de Rademacher de paramètre θ. En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Le modèle $(\mathcal{R}_\theta)_{0<\theta<1}$ est-il régulier ? Si oui, préciser l'information de Fisher $I(\theta) = I_1(\theta)$ pour une seule donnée.
3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant une loi de Rademacher de paramètre $\theta \in]0,1[$ inconnu. Proposer un estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ par la méthode des moments. Est-il asymptotiquement efficace ?