

Contrôle Continu

Rappels

- Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation et à la rédaction.
- Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat, vous pouvez l'admettre pour la suite de l'exercice.

EXERCICE 1 (6 points) Soit $\theta > 0$ et X une variable aléatoire de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue)

$$f_\theta(x) = \theta e^{-\theta(x-1)} \mathbf{1}_{\{x>1\}}.$$

On considère un échantillon i.i.d. $X_1, \dots, X_n$ de même loi que X .

1. Calculer et représenter la fonction de répartition F_θ de X . Déterminer la médiane de X .
2. En déduire un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ . Montrer sa consistance et sa normalité asymptotique.
3. Quelle est la loi de la variable $T := X - 1$? En déduire $\mathbb{E}_\theta[X]$ et $\text{Var}_\theta(X)$.
4. Le modèle $(f_\theta)_{\theta>0}$ est-il régulier? Si oui, calculer l'information de Fisher $I(\theta) = I_1(\theta)$ pour une observation.
5. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\tilde{\theta}_n$.
6. L'estimateur $\tilde{\theta}_n$ est-il asymptotiquement efficace?

EXERCICE 2 (4 points) Soit $0 < \theta < 1$ et $X \sim \mathcal{B}(\sqrt{\theta})$, loi de Bernoulli de paramètre $\sqrt{\theta}$.

1. Rappeler ce que valent $\mathbb{E}_\theta[X]$ et $\text{Var}_\theta(X)$. En déduire un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ et préciser sa normalité asymptotique.
2. Soit $0 < \alpha < 1$. Donner un intervalle de confiance de niveau asymptotique $(1 - \alpha)$ pour θ .
3. Donner un test de niveau asymptotique α pour décider entre $H_0 : \theta = 1/2$ et $H_1 : \theta \neq 1/2$.
4. Déterminer la p-valeur $\alpha_0(\mathbf{x})$ pour une réalisation $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.
5. (Bonus) Le modèle $(P_\theta)_{0<\theta<1} = (\mathcal{B}(\sqrt{\theta}))_{0<\theta<1}$ est-il régulier? Si oui, calculer l'information de Fisher $I(\theta) = I_1(\theta)$ pour une observation. L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est-il asymptotiquement efficace?