Sorbonne Université
Master Mathématiques et Applications
MU4MA015 : Statistique

2 décembre 2022
Aucun document autorisé
Durée : 1 heure

Contrôle Continu

Rappels

- Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation et à la rédaction. Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat, vous pouvez l'admettre pour la suite de l'exercice.
- Si T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exercice 1 (4 points)
Soit $\theta > -1$ un paramètre inconnu et X de densité

$$f_\theta(x) = (1+\theta)x^\theta \mathbf{1}_{]0,1[}(x).$$

Dans la suite, on suppose disposer d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d. de même loi que X.

1. Montrer que la variable $Y = -\log X$ suit une loi exponentielle de paramètre $(1+\theta)$. En déduire $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$. Démontrer qu'il est fortement consistant et asymptotiquement normal.
3. Le modèle $(f_\theta)_{\theta>-1}$ est-il régulier ? Si oui, préciser l'information de Fisher pour une seule donnée $I(\theta) = I_1(\theta)$.
4. L'estimateur $\widehat{\theta}_n$ est-il asymptotiquement efficace ?

Exercice 2 (6 points)
Soient $\lambda > 0$ et $n \geq 1$ entier. On considère le modèle bayésien suivant

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &\sim \Pi = \mathcal{E}(\lambda)\,, \\ \mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \,\big|\, \boldsymbol{\theta} &\sim \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta})^{\otimes n}\,, \end{aligned}$$

où $\mathcal{E}(\lambda)$ est la loi exponentielle de paramètre λ, et $\mathcal{P}(\theta)$ la loi de Poisson de paramètre θ.

1. Déterminer la loi a posteriori $\Pi(\cdot \,\big|\, \mathbf{X})$.

On considère la fonction de perte ℓ définie par

$$\forall \theta > 0\,,\ \forall t > 0\,,\ \ell(\theta, t) = \frac{1}{\theta}(t-\theta)^2\,.$$

2. Déterminer un estimateur de Bayes pour Π et la perte ℓ. On le notera $T^\star$.

3. Montrer que la fonction de risque de $T^\star$ (ou risque ponctuel) est donnée par

$$\forall \theta > 0\,,\ \mathbf{R}(\theta, T^\star) = \frac{n + \lambda^2\theta}{(n+\lambda)^2}\,.$$

4. Que vaut le risque de Bayes $\mathbf{R}_B(\Pi)$?
5. Que vaut le risque maximal de l'estimateur $\overline{X}_n$ (pour la perte ℓ) ?
6. Montrer que $\overline{X}_n$ est minimax (toujours pour la perte ℓ).
7. Grâce à la formule donnée à la question 3, on veut construire un estimateur Monte Carlo de $\mathbf{R}_B(\Pi)$ et afficher son évolution en fonction de la taille de l'échantillon Monte Carlo. Par quoi faut-il remplacer `???` et `%%%` pour que le script suivant produise le graphique de la Figure 1 (aucune justification n'est demandée) ?

```
Lambda = 2  # Paramètre de la loi a priori
n = 30  # Taille du vecteur aléatoire X
N = 1000  # Taille de l'échantillon Monte Carlo
prior = stats.expon(scale=1/Lambda)  # Loi a priori

sample_theta = ???  # N réalisations de la loi a priori
risk = (n + Lambda**2 * sample_theta) / (n + Lambda)**2
est_MC = %%%  # Tableau des valeurs de l'estimateur Monte Carlo en fonction de N

plt.plot(np.arange(1, N+1), est_MC, label='Estimateur Monte Carlo')
plt.axhline(1/(n+Lambda), color='r', label='$\\mathbf{{R}}_{{B}}(\\Pi)$')
plt.xlabel('$N$')
plt.legend()
```

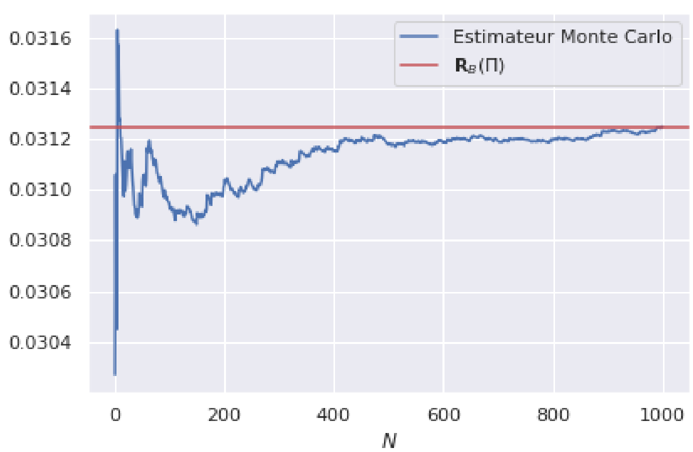

Figure 1 – Estimation Monte Carlo de $\mathbf{R}_B(\Pi)$.