Sorbonne Université
Master Mathématiques et Applications
MU4MA015 : Statistique

1er décembre 2025
Aucun document autorisé
Durée : 1 heure

Contrôle Continu

Rappels

— Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation et à la rédaction.
— Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat, vous pouvez l'admettre pour la suite de l'exercice.

Exercice 1 (5 points)

Soient $\alpha > 0$ et $r > 0$. On considère le cadre bayésien suivant :

$$\boldsymbol{\theta} \sim \Pi = \mathcal{P}(\alpha, r)$$
$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \,\big|\, \boldsymbol{\theta} = \theta \sim P_\theta^{\otimes n} = \mathrm{Unif}[0, \theta]^{\otimes \mathrm{n}}\,,$$

où $\mathcal{P}(\alpha, r)$ correspond à la loi de Pareto de densité

$$\theta \mapsto \alpha r^\alpha \theta^{-\alpha-1} \mathbb{1}_{[r,+\infty[}(\theta)\,.$$

1. (a) Représenter la densité de la loi $\mathcal{P}(\alpha, r)$.
   (b) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la probabilité $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta} > t)$.
   (c) Soit $\delta \in]0, 1[$. Trouver $c_\delta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta} > c_\delta) = \delta$.
   (d) Pour $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{P}(\alpha, r)$ avec $\alpha > 1$, calculer $\mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}]$.
2. Montrer que la loi a posteriori de $\boldsymbol{\theta}$ sachant $\mathbf{X}$ est une loi de Pareto $\mathcal{P}(\alpha_{\mathbf{X}}, r_{\mathbf{X}})$ pour deux paramètres $\alpha_{\mathbf{X}}$, $r_{\mathbf{X}}$ que l'on déterminera.
3. Donner la région de crédibilité de plus haute densité a posteriori de niveau $1 - \delta$, pour $\delta \in]0, 1[$.
4. On considère la fonction de perte $\ell(\theta, t) = \left(\frac{t}{\theta} - 1\right)^2$. Déterminer un estimateur de Bayes.

Exercice 2 (5 points)

Soit $\varepsilon > 0$. On considère le cadre bayésien suivant :

$$\boldsymbol{\theta} \sim \Pi_\varepsilon = \mathrm{Beta}(1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon)$$
$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \,\big|\, \boldsymbol{\theta} = \theta \sim \mathcal{B}(\theta)^{\otimes n}\,,$$

où $\mathcal{B}(\theta)$ est la loi de Bernoulli de paramètre θ.

1. Quelle est la loi a posteriori ?
2. On considère la perte $\ell(\theta, t) = \frac{(t-\theta)^2}{\theta(1-\theta)}$.
   (a) Déterminer un estimateur de Bayes pour Π_ε et la perte ℓ. On le notera $T^\star$.
   (b) Calculer sa fonction de risque.

(c) En utilisant le fait que si $\boldsymbol{\theta} \sim \text{Beta}(1+\varepsilon, 1+\varepsilon)$, alors $\mathbb{E}\left[\frac{(1-2\boldsymbol{\theta})^2}{\boldsymbol{\theta}(1-\boldsymbol{\theta})}\right] = \frac{2}{\varepsilon}$, montrer que le risque de Bayes vaut

$$\mathbf{R}_B(\Pi_\varepsilon) = \frac{1}{n+2\varepsilon} \cdot$$

(d) L'estimateur $\overline{X}_n$ est-il minimax pour la perte ℓ ?

3. On souhaite tester

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \leq \frac{1}{2} \quad \text{contre} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} > \frac{1}{2} \cdot$$

Déterminer le test de Bayes $\varphi^\star$ pour l'a priori $\Pi = \text{Unif}([0,1])$ et la perte équilibrée, et vérifier que

$$\varphi^\star(\mathbf{X}) = \mathbb{1}_{\{\overline{X}_n \geq \frac{1}{2}\}} \cdot$$

4. (Bonus) Démontrer la formule admise ci-dessus : $\mathbb{E}\left[\frac{(1-2\boldsymbol{\theta})^2}{\boldsymbol{\theta}(1-\boldsymbol{\theta})}\right] = \frac{2}{\varepsilon}$ si $\boldsymbol{\theta} \sim \text{Beta}(1+\varepsilon, 1+\varepsilon)$. On rappelle que $\text{Var}(\text{Beta}(a,b)) = ab/((a+b)^2(a+b+1))$.