

Examen

Rappels

- Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation et à la rédaction.
- Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat, vous pouvez l'admettre pour la suite de l'exercice.

EXERCICE 1 (10 points)

Soient $\theta > 0$ un paramètre inconnu et X de densité

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbf{1}_{x \geq 1}.$$

Dans toute la suite, on suppose disposer d'un échantillon i.i.d. $(X_1, \dots, X_n)$ de même loi que X .

1. Déterminer la médiane de la loi de X . En déduire un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ et établir sa normalité asymptotique.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\tilde{\theta}_n$.
3. Montrer que la variable aléatoire $T = \log X$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. En déduire $\mathbb{E}_\theta[\log X]$ et $\text{Var}_\theta(\log X)$.
4. Etablir la normalité asymptotique de $\tilde{\theta}_n$.
5. D'un point de vue asymptotique, entre $\hat{\theta}_n$ et $\tilde{\theta}_n$, quel estimateur choisissez-vous ?
6. Le modèle $(f_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ est-il régulier ? Si oui, calculer l'information de Fisher $I(\theta)$ pour une donnée.
7. Préciser si l'un des estimateurs précédents est asymptotiquement efficace.
8. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Donner un intervalle de confiance de niveau asymptotique $(1 - \alpha)$ pour θ .
9. Proposer un test de niveau asymptotique α pour décider entre $H_0 : \theta \leq 1$ et $H_1 : \theta > 1$. Déterminer la p-valeur asymptotique $\alpha_0(\mathbf{x})$ associée à une réalisation $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.
10. Que se passe-t-il si l'on veut estimer θ par application de la méthode des moments ?

EXERCICE 2 (8 points)

Soit $\sigma^2 > 0$ et soient $x_1, \dots, x_n$ des réels **fixés et connus**. On considère le cadre bayésien suivant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &\sim \Pi_{\sigma^2} = \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ \mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n) \mid \boldsymbol{\theta} = \theta &\sim \mathcal{N}(\theta x_1, 1) \otimes \dots \otimes \mathcal{N}(\theta x_n, 1). \end{aligned}$$

Autrement dit, la loi de $\mathbf{Y}$ est celle de $\boldsymbol{\theta}x + \varepsilon$, où $x = (x_1, \dots, x_n)$, et où $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \sim \mathcal{N}(0, 1)^{\otimes n}$, avec $\boldsymbol{\theta}$ et ε indépendantes.

1. Montrer que la loi a posteriori est donnée par

$$\Pi_{\sigma^2}(\cdot \mid \mathbf{Y}) = \mathcal{N}\left(\frac{\langle x, \mathbf{Y} \rangle}{\sigma^{-2} + \|x\|^2}, \frac{1}{\sigma^{-2} + \|x\|^2}\right),$$

où $\langle x, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i Y_i$ et $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

2. Quelle est la moyenne a posteriori $m_{\mathbf{Y}}$? Et la variance a posteriori $v_{\mathbf{Y}}$?
3. On considère la perte quadratique $\ell(\theta, t) = (\theta - t)^2$.
 - (a) Donner un estimateur de Bayes. On le notera $T^*(\mathbf{Y})$.
 - (b) Que vaut le risque a posteriori de $T^*(\mathbf{Y})$?
 - (c) En déduire la valeur du risque de Bayes $R_B(\Pi_{\sigma^2})$.
 - (d) On suppose que $\|x\|^2 > 0$ et l'on considère l'estimateur $T(\mathbf{Y}) = \frac{\langle x, \mathbf{Y} \rangle}{\|x\|^2}$.
 - i. Déterminer la fonction de risque de T (toujours pour la perte quadratique). On pourra utiliser le fait que sous $\mathbb{P}_\theta$, $\mathbf{Y} \sim x\theta + \varepsilon$ avec $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)^{\otimes n}$.
 - ii. L'estimateur T est-il minimax ?
4. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on suppose que les réels x_i sont tels que $\|x\|^2$ tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, et l'on s'intéresse à la consistance de la loi a posteriori en θ_0 .
 - (a) Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|\theta - \theta_0| \geq \delta \mid \mathbf{Y}) \leq \frac{1}{\delta^2} (v_{\mathbf{Y}} + (m_{\mathbf{Y}} - \theta_0)^2) .$$

- (b) En utilisant l'inégalité de Tchebychev, montrer que

$$\frac{\langle x, \varepsilon \rangle}{\|x\|^2} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 .$$

- (c) En déduire que $m_{\mathbf{Y}} \xrightarrow{\mathbb{P}_{\theta_0}} \theta_0$, et conclure.

EXERCICE 3 (2 points)

On considère le modèle Poisson $\mathcal{P} = (\mathcal{P}(\theta)^{\otimes n})_{\theta > 0}$, et l'on souhaite tester

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta \neq 1 .$$

Pour cela, on considère la perte équilibrée et la loi a priori

$$\Pi = \alpha \delta_1 + (1 - \alpha) \text{Exp}(1) ,$$

avec $\alpha \in]0, 1[$.

1. Calculer $\Pi(\{1\} | \mathbf{X})$.
2. Montrer qu'un test de Bayes est donné par

$$\varphi^*(\mathbf{X}) = \mathbb{1} \left\{ \frac{(n\bar{X}_n)! e^n}{(n+1)^{n\bar{X}_n+1}} \geq c_\alpha \right\} ,$$

où c_α est une constante dépendant uniquement de α que vous préciserez.