Correction du TD 1

Exercice 1

1. On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X (l'espace sous-jacent étant $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) :
   — en probabilité ($X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$), si $\forall \varepsilon > 0$ on a $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
   — en norme $\mathbb{L}^2$, ou en moyenne quadratique, ($X_n \overset{\mathbb{L}^2}{\to} X$), si $\mathbb{E}[(X_n - X)^2] \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
   — en loi ($X_n \overset{d}{\to} X$ ou $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$ ou $X_n \rightsquigarrow X$), si pour toute fonction continue bornée φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\lim_n \mathbb{E}[\varphi(X_n)] = \mathbb{E}[\varphi(X)]$. Il existe d'autres caractérisations de la convergence en loi, par exemple : $F_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} F(x)$, pour tout x tel que F est continue en x ; F_n désignant la fonction de répartition (f.d.r.) de la v.a. X_n et F désignant celle de la v.a. X.
   — presque sûrement ($X_n \overset{p.s.}{\to} X$), si $\exists \Omega_0 \in \mathcal{F}$, t.q. $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et $\forall \omega \in \Omega_0$, on a $X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} X(\omega)$.
2. En utilisant le corollaire de l'inégalité de Markov avec la fonction carrée (croissante et positive sur $\mathbb{R}_+$), on obtient pour tout $\varepsilon > 0$
$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n - X|^2}{\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   qui tend vers 0 par convergence L^2. On en déduit la convergence en probabilité.
3. Si $(X_n)_n$ converge en probabilité vers a alors $(X_n)_n$ converge en loi vers a, c'est-à-dire que pour tout fonction f continue bornée on a $\mathbb{E}f(X_n) \underset{n+\infty}{\to} \mathbb{E}f(a) = f(a)$.
   En particulier, pour toute fonction f continue bornée, h étant continue, $f \circ h$ est continue bornée. Pour toute fonction f continue bornée, on a donc $\mathbb{E}[f(h(X_n))] \underset{n+\infty}{\to} \mathbb{E}[f(h(a))] = f(h(a))$, ce qui implique que $h(X_n)$ converge en loi vers $h(a)$.
   De plus, comme la convergence en loi vers une constante implique la convergence en probabilité vers cette constante, nous obtenons finalement que $(h(X_n))_n$ converge en probabilité vers $h(a)$.
   En fait, les convergences p.s., en probabilité et en loi « passent » toutes à la continuité (avec une limite pas forcément constante p.s. qui plus est) : ce résultat est connu en anglais sous le nom de Continuous Mapping Theorem.
4. (a) On a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1^2) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} 2x^3 \exp(-x^2)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} u \exp(-u)du = 1,\end{aligned}$$
   en posant $u = x^2$ et en reconnaissant par exemple dans la dernière expression l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre 1.
   (b) On vient de montrer que $X_1^2 \in \mathbb{L}^1$, la suite (X_n^2) vérifie donc la loi forte des grands nombres (LFGN), c'est-à-dire,
$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \overset{p.s.}{\to} \mathbb{E}(X_1^2) = 1.$$

(c) La fonction $x \mapsto 1/x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1 \neq 0$. Par le théorème de continuité et la question précédente, on a donc

$$W_n = n/\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \overset{p.s.}{\to} \frac{1}{\mathbb{E}(X_1^2)} = 1.$$

5. — $X_n = 1/n$ est une suite déterministe qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Elle converge donc p.s. et donc aussi en probabilité et en loi. Elle converge également dans L^2.
   — $X_n = (-1)^n$ est aussi déterministe, mais ne converge pas en loi car la fonction définie par $f(x) = -\mathbb{1}_{x<-1} + x\mathbb{1}_{|x|\leq 1} + \mathbb{1}_{x>1}$ est continue bornée avec $\mathbb{E}f(X_n) = (-1)^n$ qui ne converge pas. Ainsi, il n'y a pas convergence en probabilité, L^2 ou p.s.
   — $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$ avec $\mathbb{P}(A_n) \to 0$. La convergence L^2 vers 0 se vérifie facilement : $\mathbb{E}X_n^2 = \mathbb{P}(A_n) \to 0$ (ce qui implique aussi la convergence en probabilité et en loi).

   En revanche, on n'a pas nécessairement la convergence p.s. Contre-exemple classique de la "bosse" qui se balade dans $[0,1]$ avec un support qui rétrécit. On construit les ensembles A_n de la façon suivante :
   — 1ère étape : $A_1 = [0,1]$,
   — 2ème étape : on découpe A_1 en 2 et on fait glisser les ensembles $A_2 = [0,1/2]$, $A_3 = [1/2,1]$,
   — 3ème étape : on recommence $A_4 = [0,1/4]$, $A_5 = [1/4,1/2]$, $A_6 = [1/2,3/4]$, $A_7 = [3/4,1]$, etc.

   avec pour espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathrm{Leb}[0,1])$. Ainsi on a bien $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}) = 1/2^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor} \to 0$, mais $\forall \omega \in [0,1]$, $\mathbb{1}_{A_n}(\omega)$ n'admet pas de limite puisque pour tout n, il existe clairement des indices $k, m \geq n$ tels que $\mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 0$ et $\mathbb{1}_{A_m}(\omega) = 1$, c'est-à-dire

$$\liminf_n \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 0 < 1 = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n}(\omega).$$

   Il ne peut donc pas y avoir convergence p.s.
   — $X_n = Z_n \mathbb{1}_{B_n}$ avec $Z_n \rightsquigarrow Z$ et $\mathbb{P}(B_n) \to 1$.

   (X_n) converge en loi vers Z. En effet, Z_n converge en loi vers Z et $\mathbb{1}_{B_n}$ converge en probabilité vers 1 :

$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_{B_n} \neq 1) = 1 - \mathbb{P}(B_n) \to 0$$

   soit, pour tout $1 > \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|\mathbb{1}_{B_n} - 1| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_{B_n} \neq 1) \to 0$$

   Ainsi, par le lemme de Slutsky, X_n converge en loi vers Z.

   En revanche, la convergence en probabilité ne peut pas être assurée, i.e. Z_n peut ne pas converger en probabilité. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer $B_n = \Omega$ pour tout n, donc $X_n = Z_n$. Si (X_n) convergeait en probabilité, cela signifierait que (Z_n) converge en probabilité, or on sait simplement que (Z_n) converge en loi, et la convergence en loi n'implique pas la convergence en probabilité, cf. par exemple $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Z_n = -Z$ pour tout n. Ainsi, X_n ne converge pas en probabilité, et il n'y a pas non plus convergence p.s. ni L^2.

6. La suite (X_n) converge p.s. vers X.

   Il faut retenir le corollaire suivant du lemme de Borel-Cantelli, tel qu'énoncé dans le cours : si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$$

   alors (X_n) converge p.s. vers X.

Preuve à partir du lemme de Borel-Cantelli. Soit $k \geq 1$. Posons $A_n^{(k)}$ l'événement $\{|X_n - X| \geq 1/k\}$. Par hypothèse, nous avons $\sum_n \mathbb{P}(A_n^{(k)}) < +\infty$. Par application du théorème de Borel-Cantelli, nous en déduisons que

$$\mathbb{P}(\limsup_n \{|X_n - X| \geq 1/k\}) = \mathbb{P}\left(\cap_n \cup_{m \geq n} A_m^{(k)}\right) = 0.$$

En considérant l'événement complémentaire, on en déduit que

$$\mathbb{P}(\liminf_n \{|X_n - X| \leq 1/k\}) = \mathbb{P}\left(\cup_n \cap_{m \geq n} \overline{A_m^{(k)}}\right) = 1,$$

c'est-à-dire que

$$\exists \Omega_k, \quad \text{t.q.} \quad \mathbb{P}(\Omega_k) = 1, \quad \forall \omega \in \Omega_k, \quad \exists n_k \in \mathbb{N}, \quad \forall m \geq n_k, \quad |X_m(\omega) - X(\omega)| \leq 1/k,$$

et ceci est vrai quel que soit $k \geq 1$. On pose $\Omega_0 = \cap_k \Omega_k$, et on note que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ (par passage au complémentaire et en utilisant une borne de l'union). Notons également que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon > 1/k$. On en déduit finalement que

$$\forall \omega \in \Omega_0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\omega, \varepsilon), \quad \forall n \geq N(\varepsilon, \omega), \quad |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon.$$

Ceci signifie que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ converge p.s. vers X. □

Exercice 2

1. Pour déterminer la loi de la v.a. M_n/n, on calcule sa fonction de répartition (c'est un réflexe à avoir quand on veut calculer la loi d'un min ou d'un max). Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(M_n/n \leq x) = \mathbb{P}(M_n \leq nx) = \mathbb{P}(\forall i = 1, \ldots, n, X_i \leq nx) = (\mathbb{P}(X_1 \leq nx))^n,$$

la dernière égalité étant vraie car les X_i sont i.i.d.. De plus,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq nx) = \int_{-\infty}^{nx} \frac{1}{\pi(1+u^2)} du = \frac{1}{\pi}\big[\arctan(u)\big]_{-\infty}^{nx} = \frac{1}{\pi}\arctan(nx) + \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(M_n/n \leq x) = \left(\frac{1}{\pi}\arctan(nx) + \frac{1}{2}\right)^n.$$

2. On étudie la convergence simple de la fonction de répartition de M_n/n. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(M_n/n \leq x) = \exp\left(n \ln\left(\frac{1}{\pi}\arctan(nx) + \frac{1}{2}\right)\right).$$

Lorsque $x \leq 0$, $\mathbb{P}(M_n/n \leq x) \leq \mathbb{P}(M_n/n \leq 0) = 2^{-n}$ qui tend vers 0. Pour déterminer la limite de $\mathbb{P}(M_n/n \leq x)$ quand $x > 0$, il suffit d'utiliser le rappel : $(1/\pi)\arctan(nx) + 1/2 = 1 - (1/\pi)\arctan(1/(nx))$. Ainsi

$$\mathbb{P}(M_n/n \leq x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\arctan(1/(nx))\right)\right).$$

Comme $\frac{1}{\pi}\arctan(1/(nx)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\arctan(1/(nx))\right) \sim -\frac{n}{\pi}\arctan(1/(nx)) \sim \frac{n}{\pi}\frac{1}{(nx)} \to -\frac{1}{\pi x}.$$

Remarquons que nous n'avons pas composé les équivalences à gauche, chose interdite en générale ! Nous avons finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(M_n/n \leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} F^\infty(x),$$

avec

$$F^\infty : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{\pi x}} & \text{pour} \quad x > 0 \end{cases}.$$

On vérifie que F^∞ est une fonction de répartition (continue à droite, croissante, limite nulle en $-\infty$, limite 1 en $+\infty$). On en déduit que la suite de suite de v.a. M_n/n converge en loi vers la loi dont la fonction de répartition est F^∞.

3. Montrons à présent que cette loi admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Attention, ceci n'est pas automatique, car il y a des lois sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue ! Par exemple, la fonction de répartition $F(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ (mesure Dirac en 0) n'admet pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Une condition suffisante pour qu'une fonction de répartition admette une densité par rapport à la mesure de Lebesgue est qu'elle soit continue et C^1 par morceaux [1]. Alors la densité coïncide avec la dérivée de la fonction de répartition (p.p.).

   Après ce petit rappel, reprenons l'exercice et montrons que la loi associée à F^∞ admet une densité. La fonction F^∞ est continue et C^1 par morceaux, la loi associée à F^∞ admet donc une densité f^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue, égale p.p. à la dérivée de F^∞. La densité f^∞ est ainsi donnée par :

$$f^\infty : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{\pi x^2} \exp\left(-\frac{1}{\pi x}\right) & \text{pour} \quad x > 0 \end{cases}.$$

   Remarque : Cette loi appartient à la famille des lois de Fréchet, dont les fonctions de répartition s'écrivent de façon générale sous la forme

$$F(x) = e^{-\left(\frac{x-m}{s}\right)^{-\alpha}} \mathbf{1}_{x>m}$$

   de paramètres $(m, s, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

1. Comme f est positive, il suffit de vérifier que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$. Ceci s'obtient en faisant le changement de variable $y = \theta x$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{(\theta x)^{p-1}}{\Gamma(p)}\, e^{-\theta x}\, \theta dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty y^{p-1} e^{-y} dy = 1.$$

2. De la même façon que plus haut, on a

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\,dx = \frac{1}{\theta^k \Gamma(p)} \int_0^\infty (\theta x)^{k+p-1}\, e^{-\theta x}\, \theta dx = \frac{\Gamma(k+p)}{\theta^k \Gamma(p)}.$$

1. Pour rappel, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite C^1 par morceaux si pour tout segment de $\mathbb{R}$, il existe une partition finie composée d'intervalles, telle que sur chaque cellule A (de la forme $[a,b],]a,b], [a,b[$ ou $]a,b[$), la restriction de f à l'intérieur de A (c'est-à-dire à $]a,b[$) est prolongeable en une fonction C^1 sur A. Autrement dit, il est nécessaire est suffisant que f soit C^1 sur $]a,b[$ et que f et f' admettent des limites finies en a^+ et en a^-.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \Gamma(p+1)/(\theta\Gamma(p)) = p/\theta \\
\mathbb{E}(X^2) &= \Gamma(p+2)/(\theta^2\Gamma(p)) = p(p+1)/\theta^2 \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \theta^{-2}(p(p+1)-p^2) = p/\theta^2.
\end{aligned}$$

3. Pour toute fonction Ψ borélienne bornée,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Psi(Y^2)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \Psi(y^2)e^{-y^2/2}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \Psi(y^2)y^{-1}e^{-y^2/2}2ydy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \Psi(u)u^{-1/2}e^{-u/2}du,
\end{aligned}$$

en posant $u = y^2$. Comme $1/\sqrt{2\pi} = 1/(\sqrt{2}\Gamma(1/2))$, on a $Y^2 \sim \gamma(1/2, 1/2)$. Par ailleurs, on sait que $Y^2 \sim \chi^2(1)$ par définition.

4. Pour toute fonction Ψ borélienne bornée,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Psi(X/a)) &= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \Psi(x/a)x^{p-1}\, e^{-\theta x}\, dx \\
&= \frac{(a\theta)^p}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \Psi(x/a)(x/a)^{p-1}\, e^{-a\theta x/a}\, dx/a \\
&= \frac{(a\theta)^p}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \Psi(y)y^{p-1}\, e^{-a\theta y}\, dy
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

5. Pour déterminer la loi de $X+Y$, on calcule sa fonction caractéristique $\Phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}]$. Grâce à l'indépendance, cette fonction est égale au produit des fonctions caractéristiques de X et de Y :

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\,\Phi_Y(t) = \frac{1}{(1-i\theta^{-1}t)^{p_1}(1-i\theta^{-1}t)^{p_2}} = \frac{1}{(1-i\theta^{-1}t)^{p_1+p_2}}.$$

Ainsi, Φ_{X+Y} est la fonction caractéristique de la loi $\gamma(p_1+p_2, \theta)$.

6. D'après la question précédente (et par une récurrence triviale), $S_n \sim \gamma(n, \theta)$. En utilisant la question 2, nous avons donc $\mathbb{E}(S_n) = n/\theta$, $\mathrm{Var}(S_n) = n/\theta^2$.

7. En utilisant la question 3, les X_i^2 sont i.i.d. de loi $\gamma(1/2, 1/2)$. Ainsi, $S'_n \sim \gamma(n/2, 1/2)$. Comme nous savons par ailleurs que $S'_n \sim \chi^2(n)$ (par définition), nous avons $\gamma(n/2, 1/2) = \chi^2(n)$. En utilisant la question 2, on retrouve que $\mathbb{E}S'_n = n$ et $\mathrm{Var}\, S'_n = 2n$.

Exercice 4

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\exp(\lambda(X-\theta))\right) = \sum_{k\geq 0}\exp(\lambda(k-\theta))\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k\geq 0}\exp(\lambda(k-\theta))e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!} \\
= \quad & e^{-\theta(\lambda+1)}\sum_{k\geq 0}\frac{\left(e^\lambda\theta\right)^k}{k!} = e^{-\theta(\lambda+1)}e^{e^\lambda\theta} = \exp(\theta\phi(\lambda)).
\end{aligned}$$

2. Pour tout $x > 0$ et $\lambda \geq 0$, on a, par croissance de $x \mapsto e^{\lambda x}$ et par l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(X - \theta \geq x\big) &\leq \mathbb{P}\big(\exp(\lambda(X-\theta)) \geq \exp(\lambda x)\big)\\ &\leq \exp(-\lambda x)\mathbb{E}\left(\exp(\lambda(X-\theta))\right)\\ &= \exp(-\lambda x)\exp(\theta\phi(\lambda)),\end{aligned}$$

en utilisant la question 1.

3. Soit $f : \lambda \mapsto \lambda x - \phi(\lambda)$ définie sur $[0, +\infty[$, pour un $x > 0$ fixé. On a pour tout $\lambda \geq 0$,

$$f'(\lambda) > 0 \Leftrightarrow (x+1) - e^{\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda < \ln(x+1).$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $[0, \ln(x+1)]$ et strictement décroissante sur $[\ln(x+1), +\infty[$. Ainsi, elle atteint son maximum en l'unique point $\lambda_0 = \ln(x+1)$. Par suite,

$$\sup_{\lambda>0}(\lambda x - \phi(\lambda)) = x\ln(x+1) - e^{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + 1 = h(x).$$

4. Ainsi, en remarquant que l'inégalité trouvée à la question 2. est vraie pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(X - \theta \geq x\big) &\leq \inf_{\lambda\geq 0}\left\{\exp\left(-\theta(\lambda\frac{x}{\theta} - \phi(\lambda))\right)\right\}\\ &= \exp\left(-\theta\sup_{\lambda\geq 0}\left\{\lambda\frac{x}{\theta} - \phi(\lambda)\right\}\right)\\ &= \exp\left(-\theta h(x/\theta)\right),\end{aligned}$$

en utilisant cette fois la question 3.

5. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit, pour $X \sim \mathcal{P}(\theta)$,

$$\mathbb{P}\big(X - \theta \geq x\big) \leq \mathbb{P}\big(|X-\theta| \geq x\big) = \mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}X| \geq x\big) \leq \mathrm{Var}(X)/x^2 = \theta/x^2.$$

Ainsi, lorsque $\theta = 2$ et $x = 10 - \theta = 8$, il s'agit de comparer la borne de Bennett $e^{-2h(8/2)} = e^{-2h(4)} \simeq 0.0003$ avec celle de Bienaymé-Tchebychev $\theta/x^2 = 2/8^2 = 1/32 \simeq 0.031$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est moins fine que l'inégalité de type Bennett que l'on vient d'établir.

Remarque : Cette inégalité de Bennett est vérifiée par les sommes de variables aléatoires qui peuvent n'être bornées que d'un côté : soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes avec variance finie et telles que $X_i \leq b$ presque sûrement, pour $b \geq 0$ et pour tout $i \leq n$. Alors, quel que soit $x > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i) \geq x\right) \leq \exp\left(-\frac{v}{b^2}h\left(\frac{bx}{v}\right)\right),$$

où $v = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2]$.

Exercice 5

1. Pour tout $\lambda \geq 0$, la fonction $x \mapsto \exp(\lambda x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$, on a donc l'inégalité suivante : pour tout $x \in [-M, M]$,

$$\exp(\lambda x) = \exp\left(\frac{M-x}{2M}(-\lambda M) + \frac{M+x}{2M}(\lambda M)\right) \leq \frac{M-x}{2M}\exp(-\lambda M) + \frac{M+x}{2M}\exp(\lambda M).$$

2. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on obtient par passage à l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(\lambda X_i)) &\leq \mathbb{E}\left(\frac{M - X_i}{2M}\right)\exp(-\lambda M) + \mathbb{E}\left(\frac{M + X_i}{2M}\right)\exp(\lambda M)\\ &= \frac{\exp(-\lambda M)}{2} + \frac{\exp(\lambda M)}{2}\\ &= \cosh(\lambda M)\\ &\leq \exp(\lambda^2 M^2/2).\end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie car

$$\begin{aligned}\cosh(u) &= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\frac{u^k}{k!} + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\frac{(-u)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0}\frac{u^{2k}}{(2k)!}\\ \exp(u^2/2) &= \sum_{k\geq 0}\frac{u^{2k}}{2^k k!}\end{aligned}$$

et $2^k k!$ est le produit des facteurs pairs (seulement) de $(2k)!$.

3. Pour tout $\lambda \geq 0$ et $x > 0$, on a par l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) &= \mathbb{P}\left(\exp(\lambda S_n) \geq \exp(\lambda n x)\right)\\ &\leq \exp(-\lambda n x)\mathbb{E}\left(\exp(\lambda S_n)\right)\\ &= \exp(-\lambda n x)\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\exp(\lambda X_i) \qquad ((X_i)_i \text{ indépendants mais pas i.i.d.})\\ &\leq \exp\left(n\left(\frac{\lambda^2 M^2}{2} - \lambda x\right)\right),\end{aligned}$$

en utilisant la question précédente.

4. Comme l'inégalité précédente est vraie pour tout $\lambda \geq 0$, on a pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) &\leq \inf_{\lambda>0}\exp\left(n\left(\frac{\lambda^2 M^2}{2} - \lambda x\right)\right) = \exp\left(n\inf_{\lambda>0}\left(\frac{\lambda^2 M^2}{2} - \lambda x\right)\right)\\ &= \exp\left(n\left(\frac{x^2}{2M^2} - \frac{x^2}{M^2}\right)\right) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2M^2}\right),\end{aligned}$$

car l'infinimum est atteint pour $\lambda = x/M^2$. On obtient la deuxième inégalité en remarquant que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq x\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) + \mathbb{P}\left(-\frac{S_n}{n} \geq x\right),$$

où la première inégalité vient du fait que l'événement $\{\frac{S_n}{n} = x\}$ se retrouve dans les deux événements de droite, qui ne sont donc pas disjoints. Comme $-S_n$ est la somme des v.a. $-X_k$ qui restent centrées et dans $[-M, M]$, l'inégalité de Hoeffding précédente s'applique encore et on obtient le résultat voulu.

5. Soit $U_0, U_1, U_2, \ldots$ une suite de v.a. i.i.d. uniformes sur $[0, 2]$. Les v.a. $X_k = U_k - 1$ sont centrées et dans $[-1, 1]$, on peut donc appliquer l'inégalité de Hoeffding et on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}\right| \geq x\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^n U_k}{n} - 1\right| \geq x\right) \leq 2\exp(-nx^2/2) =: \Delta_H.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la v.a. $\sum_{k=1}^n U_k/n$ (on calcule $\mathbb{E}(U_1) = 1$ et $\mathbb{V}(U_1) = 1/3$) s'écrit

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^n U_k}{n} - 1\right| \geq x\right) \leq \frac{\mathbb{V}\big(\sum_{k=1}^n U_k/n\big)}{x^2} = \frac{1}{3nx^2} =: \Delta_{BT}$$

Les bornes Δ_H et Δ_{BT} se comparent de la façon suivante :
— pour $n = 100$ et $x = 0.1$, on a $nx^2 = 1$ donc $\Delta_H \simeq 1.21$ et $\Delta_{BT} = 1/3$;
— pour $n = 100$ et $x = 0.5$, on a $nx^2 = 25$ donc $\Delta_H \simeq 7.46\,10^{-6}$ et $\Delta_{BT} = 1/75 \simeq 0.013$;
— pour $n = 1000$ et $x = 0.1$, on a $nx^2 = 10$ donc $\Delta_H \simeq 0.01$ et $\Delta_{BT} = 1/30 \simeq 0.03$.
La borne de Hoeffding est mauvaise pour les petites valeurs de nx^2 mais devient beaucoup plus fine que celle de Bienaymé-Tchebychev pour de plus grandes valeurs de nx^2 donc de x ou n. Par contre, la borne de Hoeffding utilise des hypothèses plus contraignantes (v.a. bornées).

Exercice 6

1. Pour toute fonction Ψ borélienne bornée, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\Psi(X_1^2)) &= \int_0^\infty \Psi(x^2) 2xe^{-x^2} dx \\ &= \int_0^\infty \Psi(u) e^{-u} du,\end{aligned}$$

en posant $u = x^2$ ($du = 2xdx$). Ainsi, $X_1^2 \sim \mathcal{E}(1)$ (loi exponentielle de paramètre 1). D'après l'exercice 3, comme les X_i^2 sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1) = \gamma(1,1)$ nous avons $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \gamma(n,1)$ puis $V_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \gamma(n,n)$.

2. On applique le TCL aux variables aléatoires X_i^2 i.i.d. et de carré intégrable pour obtenir

$$\sqrt{n}(V_n - \mathbb{E}(X_1^2)) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \mathrm{Var}(X_1^2)\right).$$

Comme $X_1^2 \sim \mathcal{E}(1) = \gamma(1,1)$, on calcule aisément $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$ et $\mathrm{Var}(X_1^2) = 1$. Ainsi, en utilisant la caractérisation de la convergence en loi avec les fonctions de répartition, on a que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}(V_n - \mathbb{E}V_n) \geq t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \Phi(t).$$

Par ailleurs, comme $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$ par symétrie de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a bien le résultat escompté.

3. (a) Comme $V_n \sim \gamma(n,n)$, V_n n'est pas bornée (p.s.) et on ne peut pas utiliser l'inégalité de Hoeffding. Cependant, V_n possède des moments exponentiels (comme on le verra plus bas), donc on cherche à utiliser la méthode de Chernoff, en espérant que les calculs soient faisables.

   (b) Comme $V_n \sim \gamma(n,n)$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp(\lambda V_n)\right) &= \frac{n^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{\lambda x} x^{n-1} e^{-nx} dx \\ &= \frac{n^n}{(n-\lambda)^n} \frac{(n-\lambda)^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-(n-\lambda)x} dx \\ &= \frac{1}{(1-\lambda/n)^n} \times 1,\end{aligned}$$

en reconnaissant la loi $\gamma(n, n-\lambda)$. Par suite,

$$\mathbb{E}\left(\exp(\lambda(V_n - 1))\right) = \exp\left(-\lambda - n\ln(1-\lambda/n)\right),$$

d'où $\phi(\lambda) = -\lambda - n\ln(1-\lambda/n)$.

(c) Il s'agit de maximiser la fonction $\lambda \mapsto \lambda(x+1) + n\ln(1-\lambda/n)$ sur $[0,+\infty[$ pour un $x>0$ fixé. La dérivée en λ est positive si et seulement si

$$x+1-n/(n-\lambda) \geq 0$$

c'est-à-dire $\lambda \leq nx/(x+1)$. Donc le maximum est atteint en $\lambda_0 = nx/(x+1)$. On vérifie bien que $\lambda_0 < n$. De plus, la fonction vaut en λ_0

$$h(x) = \lambda_0(x+1) + n\ln(1-\lambda_0/(n)) = xn - n\ln(x+1).$$

(d) D'après la méthode de Chernoff (refaire la preuve dans notre cas pour vous en convaincre !), on a pour tout $t>0$,

$$\mathbb{P}\left(V_n - 1 \geq t/\sqrt{n}\right) \leq \exp\left(-h(t/\sqrt{n})\right),$$

avec

$$\begin{aligned} h(t/\sqrt{n}) &= t\sqrt{n} - n\ln(t/\sqrt{n}+1) \\ &= n\psi(t/\sqrt{n}), \end{aligned}$$

ce qui prouve finalement que

$$\mathbb{P}\left(V_n - 1 \geq t/\sqrt{n}\right) \leq \exp\left(-n\psi(t/\sqrt{n})\right).$$

Lorsque n tend vers l'infini, on a $-n\psi(t/\sqrt{n}) = -t^2/2 + o(1)$. Donc la borne est équivalente à $e^{-t^2/2}$, ce qui est toujours plus grand que $\Phi(-t)$. En effet, d'après le rappel, on a toujours $\Phi(-t) \leq \varphi(t)/t$, ce qui assure que l'inégalité $\Phi(-t) \leq e^{-t^2/2}$ est vraie dès que $t \geq 1/\sqrt{2\pi}$. De plus, si $0 < t < 1/\sqrt{2\pi}$, alors $e^{-t^2/2} > e^{-1/(4\pi)} \approx 0.92$ tandis que bien entendu $\Phi(-t) \leq 1/2$. Ainsi la borne est moins bonne que celle obtenue via le TCL, mais si t grandit elle est du bon ordre à l'échelle exponentielle. Surtout, il est important de noter que l'inégalité obtenue plus haut est valable pour tout $n \geq 1$ tandis que le résultat de la question 2 n'est valable que lorsque n tend vers l'infini. Finalement, cet exemple montre surtout que la méthode de Chernoff est assez précise lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 7

1. La LFGN appliquée aux variables aléatoires X_i i.i.d. et intégrables donne

$$\overline{X}_n \overset{p.s.}{\to} \mathbb{E}(X_1) = m.$$

De plus, nous avons la décomposition (à savoir !)

$$\sigma_n^2 = n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j^2 - (\overline{X}_n)^2.$$

La LFGN appliquée aux variables aléatoires X_i^2 i.i.d. et intégrables (car $\mathbb{E}[X_1^2] = \operatorname{Var} X_1 + \mathbb{E}[X_1]^2 = \sigma^2 + m^2 < \infty$) donne

$$n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j^2 \overset{p.s.}{\to} \mathbb{E}(X_1^2) = \sigma^2 + m^2.$$

Au final, nous avons

$$\sigma_n^2 \overset{p.s.}{\to} \sigma^2.$$

Remarque : attention ! On ne peut pas appliquer la LFGN directement aux $X_i - \overline{X}_n$ car ces variables ne sont pas indépendantes !

2. Les v.a. X_i sont i.i.d. dans $\mathbb{L}^2$, on peut donc leur appliquer le TCL :

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1).$$

De plus, d'après la question précédente, $\sigma_n^2 \overset{p.s.}{\to} \sigma^2$. Montrons qu'alors $\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma_n^2}} \overset{p.s.}{\to} 1$ (quand bien même $\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma_n^2}}$ peut prendre la valeur ∞). Cela n'est pas direct car σ_n^2 peut s'annuler avec probabilité non-nulle.

Première option : Soit $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$. Cette fonction est C^0 sur $\mathbb{R}_+$ mais elle est surtout continue en σ^2 (puisque $\sigma^2 > 0$), qui est la limite p.s. de σ_n^2. Ainsi, par le théorème de continuité, $\varphi(\sigma_n^2) = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma_n^2}} \overset{p.s.}{\to} 1$.

Deuxième option : Puisque, $\sigma_n^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} \sigma^2$, il existe donc un événement Ω_0 de probabilité 1, tel que $\forall \omega \in \Omega_0$, on a $\sigma_n^2(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 > 0$. En particulier, pour tout $\omega \in \Omega_0$, il existe un rang $n_0(\omega)$ tel que $\forall n \geq n_0(\omega)$, on a $\sigma_n^2(\omega) > 0$ et $\forall n \geq n_0(\omega)$, il est donc licite de composer par la fonction continue $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\sigma}{\sqrt{x}}$, ce qui assure que $\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma_n^2(\omega)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Enfin, puisque cela est vrai pour tout $\omega \in \Omega_0$ et que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, on en déduit bien que $\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma_n^2}} \overset{p.s.}{\to} 1$.
Ces deux convergences (en loi et *p.s.*) et le lemme de Slutsky impliquent que

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\sigma_n^2}} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\,\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma_n^2}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Exercice 8

1. Soit $Z_1 = -\ln(X_1)$ (bien défini car $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$), alors Z_1 suit une loi exponentielle de paramètre 1 : en effet, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Z_1 \leq u) = \mathbb{P}(X_1 \geq e^{-u}) = (1 - e^{-u})\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u).$$

2. Comme $\ln Y_n = \overline{Z}_n$, où $\overline{Z}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n Z_i$, $\mathbb{E}Z_1 = 1$, $\operatorname{Var} Z_1 = 1$, le théorème de la limite centrale appliqué aux variables $(Z_i)_i$ i.i.d. vérifiant $\mathbb{E}Z_1^2 < \infty$ donne

$$\sqrt{n}(\overline{Z}_n - 1) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1).$$

La méthode Delta appliquée avec la fonction $g(u) = e^u$ qui est dérivable en 1 avec $g'(1) = e$ donne alors

$$\sqrt{n}(Y_n - e) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, e^2).$$

Exercice 9

1. Par la LFGN (X_i i.i.d et intégrables), $\overline{X}_n$ converge p.s. vers $\mathbb{E}(X_1) = 0$. De même, le TCL (X_i i.i.d et de carré intégrable) donne $\sqrt{n}\overline{X}_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

2. En se souvenant que $\cos' = -\sin$ et par la méthode Delta (cos dérivable en 0), on obtient

$$\sqrt{n}(\cos(\overline{X}_n) - 1) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,0) = \delta_0,$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en 0, ce qu'on peut encore noter

$$\sqrt{n}(\cos(\overline{X}_n) - 1) \rightsquigarrow 0,$$

autrement dit la limite en loi est la constante 0, qui est effet une loi dénégérée. On en déduit uniquement que la vitesse de convergence de $\cos(\overline{X}_n)$ vers 1 est plus rapide que $1/\sqrt{n}$. Il faut donc pousser le développement à l'ordre suivant pour pouvoir être plus précis sur vitesse et limite.

3. Le développement limité de cos en 0 à l'ordre 2 est :

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos 0 + \cos'(0)x + \cos''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

Autrement dit, il existe une fonction r tendant vers 0 en 0 telle que :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}(1 + r(x)).$$

4. D'après la question précédente, nous avons :

$$\cos(\overline{X}_n) - 1 = -\frac{(\overline{X}_n)^2}{2}(1 + r(\overline{X}_n)),$$

d'où

$$-2n(\cos(\overline{X}_n) - 1) = (\sqrt{n}\overline{X}_n)^2(1 + r(\overline{X}_n)).$$

Il reste maintenant à étudier la convergence du terme de droite avec comme outil le Lemme de Slutsky. Tout d'abord, la fonction r est prolongeable par continuité en 0 de sorte que $r(0) = 0$. Or $\overline{X}_n$ converge p.s. (et a fortiori en probabilité) vers 0, donc par le théorème de continuité, $r(\overline{X}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. De même, $\sqrt{n}\overline{X}_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, donc par continuité $(\sqrt{n}\overline{X}_n)^2 \rightsquigarrow Y^2$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Autrement dit, $(\sqrt{n}\overline{X}_n)^2 \rightsquigarrow \chi_1^2$. Finalement, le Lemme de Slutsky donne :

$$-2n(\cos(\overline{X}_n) - 1) \rightsquigarrow \chi_1^2.$$

Bilan : la suite de v.a. $(\cos(\overline{X}_n))$ converge à vitesse $1/n$ vers sa limite, c'est-à-dire bien plus rapidement que pour le TCL classique.

Exercice 10

1. Commençons par rappeler la loi forte des grands nombres pour le cas particulier de lois de Bernoulli : si (B_n) est une suite de variables i.i.d. de Bernoulli de paramètre θ, alors

$$\frac{B_1 + \cdots + B_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \theta.$$

Par ailleurs, puisque $S_n \sim \mathcal{B}(n,\theta)$ pour tout n, on peut écrire

$$S_n \overset{d}{=} B_1 + \cdots + B_n, \tag{1}$$

mais c'est seulement une égalité **en loi**, donc on ne peut pas appliquer la loi des grands nombres (ni faible, ni forte) à la suite (S_n/n) pour en déduire une convergence en probabilité ou presque sûre. Autrement dit, on peut toujours définir une suite doublement indexée $(B_k^{(n)})_{1\leq k\leq n}$ telle que pour tout n fixé, les n variables $(B_k^{(n)})_{1\leq k\leq n}$ sont i.i.d. de Bernoulli de paramètre θ et vérifient l'égalité suivante entre variables aléatoires :

$$S_n = B_1^{(n)} + \cdots + B_n^{(n)},$$

mais les variables de Bernoulli n'ont aucune raison d'être les mêmes d'un n à l'autre, donc on n'est pas dans le cadre d'application de la loi des grands nombres.

2. Pour démontrer la convergence p.s., on va utiliser le lemme de Borel-Cantelli, autrement dit, on cherche à montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|S_n/n - \theta| \geq \varepsilon\right) < \infty.$$

On part de l'égalité en loi (1) : pour tout $c > 0$ et en notant $\overline{B}_n := (B_1 + \cdots + B_n)/n$, celle-ci implique l'égalité suivante sur les probabilités

$$\mathbb{P}\left(|S_n/n - \theta| \geq c\right) = \mathbb{P}\left(|\overline{B}_n - \theta| \geq c\right)$$

Or, puisqu'une variable de Bernoulli est bornée par 0 et 1, l'inégalité de Hoeffding (la version du cours) appliquée aux variables i.i.d. B_i donne :

$$\mathbb{P}\left(|\overline{B}_n - \theta| \geq c\right) \leq 2\exp(-2c^2 n).$$

Ainsi,

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|S_n/n - \theta| \geq c\right) \leq 2\sum_{n\geq 1} \exp(-2c^2 n) < \infty,$$

donc par le lemme de Borel-Cantelli, (S_n/n) converge p.s. vers θ.

3. Soit $\varphi : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \ln(x)\mathbf{1}_{x>0} + \mathbf{1}_{x=0}$. Alors $Y_n = \varphi(S_n/n)$ et φ est continue en θ (puisque $\theta > 0$), qui est la limite p.s. de (S_n/n). Ainsi, puisque $S_n/n \xrightarrow{\text{p.s.}} \theta$, le théorème de continuité assure que $Y_n = \varphi(S_n/n) \xrightarrow{\text{p.s.}} \varphi(\theta) = \ln(\theta)$.

4. Pour établir la convergence en loi de (Y_n), on commence par établir celle de (S_n/n). On part à nouveau de l'égalité en loi (1), qui implique que pour tout n

$$\sqrt{n}(S_n/n - \theta) \stackrel{d}{=} \sqrt{n}(\overline{B}_n - \theta).$$

Or le TCL appliqué aux variables i.i.d. B_i assure que

$$\sqrt{n}(\overline{B}_n - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta)),$$

ce qui prouve que

$$\sqrt{n}(S_n/n - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta)).$$

On peut maintenant s'intéresser à la convergence en loi de (Y_n).

Première méthode : D'après ce qui précède, $Y_n = \varphi(S_n/n)$ avec φ dérivable en θ et de dérivée $\varphi'(\theta) = 1/\theta > 0$. Donc, par application de la méthode Delta avec la fonction φ,

$$\sqrt{n}(\varphi(S_n/n) - \varphi(\theta)) = \sqrt{n}(Y_n - \ln(\theta)) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, (1-\theta)/\theta).$$

Seconde méthode : On remarque tout d'abord que

$$\sqrt{n}(Y_n - \ln(\theta)) = \sqrt{n}(\ln(S_n/n) - \ln(\theta))\mathbb{1}_{S_n \geq 1} + \sqrt{n}(1 - \ln(\theta))\mathbb{1}_{S_n = 0}.$$

Montrons que le terme de droite converge vers 0 en probabilité. Pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|\sqrt{n}(1 - \ln(\theta))\mathbb{1}_{S_n=0}| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(S_n = 0) = (1-\theta)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi $\sqrt{n}(1 - \ln(\theta))\mathbb{1}_{S_n=0} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
Concernant le terme de gauche, le TCL donne

$$\sqrt{n}(S_n/n - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta)).$$

De plus, par la méthode Delta appliquée avec ln (dérivable en θ), nous obtenons :

$$\sqrt{n}(\ln(S_n/n) - \ln(\theta)) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1/\theta - 1).$$

Ensuite, par application du Lemme de Slutsky en tenant compte que $\mathbb{1}_{S_n \geq 1}$ tend vers 1 en probabilité, nous obtenons :

$$\sqrt{n}(\ln(S_n/n) - \ln(\theta))\mathbb{1}_{Y_n = \ln S_n/n)} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1/\theta - 1).$$

Finalement, puisque

$$\sqrt{n}(Y_n - \ln(\theta)) = \sqrt{n}(\ln(S_n/n) - \ln(\theta))\mathbb{1}_{S_n \geq 1} + \sqrt{n}(1 - \ln(\theta))\mathbb{1}_{S_n = 0},$$

on obtient (en appliquant à nouveau le Lemme de Slutsky) :

$$\sqrt{n}(Y_n - \ln(\theta)) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1/\theta - 1).$$