Correction du TD 11

Exercice 1 (Consistance dans le modèle Gamma-Poisson)

Partie A.

1. La loi a posteriori est une loi Gamma$(n\overline{X}_n + p, n+\lambda)$. L'espérance et la variance a posteriori sont donc données par
$$m_{\mathbf{X}} = \frac{n\overline{X}_n + p}{n+\lambda} \quad \text{et} \quad v_{\mathbf{X}} = \frac{n\overline{X}_n + p}{(n+\lambda)^2}\,.$$

2. Par l'inégalité triangulaire et la borne de l'union, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - \theta_0| \geq \frac{M_n}{\sqrt{n}} \,\Big|\, \mathbf{X}\right) &\leq \mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - m_{\mathbf{X}}| + |m_{\mathbf{X}} - \theta_0| \geq \frac{M_n}{\sqrt{n}} \,\Big|\, \mathbf{X}\right)\\ &\leq \mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - m_{\mathbf{X}}| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}} \,\Big|\, \mathbf{X}\right) + \mathbb{P}\left(|m_{\mathbf{X}} - \theta_0| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}} \,\Big|\, \mathbf{X}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - m_{\mathbf{X}}| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}} \,\Big|\, \mathbf{X}\right) + \mathbb{1}_{\left\{|m_{\mathbf{X}} - \theta_0| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}}\right\}}\,.\end{aligned}$$

3. D'une part, on a
$$\sqrt{n}(m_{\mathbf{X}} - \theta_0) = \sqrt{n}\frac{n}{n+\lambda}(\overline{X}_n - \theta_0) + \sqrt{n}\frac{p - \lambda\theta_0}{n+\lambda}\,.$$
Par le TCL, sous P_{θ_0}, $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)$ converge en loi vers une $\mathcal{N}(0, \theta_0)$, et, comme $\frac{n}{n+\lambda} \to 1$ et $\sqrt{n}\frac{p-\lambda\theta_0}{n+\lambda} \to 0$, le lemme de Slutsky implique qu'il en est de même de $\sqrt{n}(m_{\mathbf{X}} - \theta_0)$. Ainsi, sous P_{θ_0},
$$\frac{\sqrt{n}|m_{\mathbf{X}} - \theta_0|}{M_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$
D'autre part, sous P_{θ_0}, $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_0$, donc
$$n v_{\mathbf{X}} = \frac{n(n\overline{X}_n + p)}{(n+\lambda)^2} = \frac{\overline{X}_n + \frac{p}{n}}{\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^2} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_0\,,$$
donc
$$\frac{n v_{\mathbf{X}}}{M_n^2} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

4. Rappelons que la convergence L_1 implique la convergence en probabilité. Ce qui précède implique (puisque $M_n > 0$ à partir d'un certain rang)
$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\mathbb{1}_{\left\{|m_{\mathbf{X}} - \theta_0| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}}\right\}}\right] = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{\sqrt{n}|m_{\mathbf{X}} - \theta_0|}{M_n} \geq \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
ce qui assure que, sous P_{θ_0},
$$\mathbb{1}_{\left\{|m_{\mathbf{X}} - \theta_0| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}}\right\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Par ailleurs, l'inégalité de Tchebychev (conditionnelle) s'écrit

$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - m_{\mathbf{X}}| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}} \,|\, \mathbf{X}\right) \leq \frac{4nv_{\mathbf{X}}}{M_n^2} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \cdot$$

Au total on a prouvé que, sous P_{θ_0},

$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - \theta_0| \geq \frac{M_n}{\sqrt{n}} \,|\, \mathbf{X}\right) \leq \mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - m_{\mathbf{X}}| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}} \,|\, \mathbf{X}\right) + \mathbb{1}_{\left\{|m_{\mathbf{X}} - \theta_0| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}}\right\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

ce qui assure (par la définition de la convergence en probabilité) que

$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - \theta_0| \geq \frac{M_n}{\sqrt{n}} \,|\, \mathbf{X}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Partie B.

1. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, la fonction $\theta \mapsto \sqrt{p_\theta(x)} = e^{-\theta/2} \frac{\theta^{x/2}}{\sqrt{x!}}$ est C^1 sur $\Theta =]0, \infty[$. Le score vaut

$$\ell'_\theta(X) = \frac{X}{\theta} - 1.$$

Fixons $\theta_0 > 0$ et prenons $h = \theta_0/2$, alors pour tout $\theta \in [\theta_0 - h; \theta_0 + h] = [\theta_0/2; 3\theta_0/2]$, on a (la variable X étant positive)

$$\ell'_\theta(X)^2 = \left(\frac{X}{\theta} - 1\right)^2 = \left|\frac{X}{\theta} - 1\right|^2 \leq \left(\frac{X}{\theta} + 1\right)^2 \leq \left(\frac{2X}{\theta_0} + 1\right)^2.$$

Puisque $X \sim \mathcal{P}(\theta_0)$ admet un moment d'ordre 2, on a bien

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\sup_{\theta_0 - h \leq \theta \leq \theta_0 + h} \ell'_\theta(X)^2\right] \leq \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\left(\frac{2X}{\theta_0} + 1\right)^2\right] < \infty.$$

Ceci garantit l'existence et la continuité de l'information de Fisher : celle-ci correspond au moment d'ordre 2 du score, c'est-à-dire

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\ell'_\theta(X)^2\right] = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{X}{\theta} - 1\right)^2\right] = \frac{\mathrm{Var}_\theta(X)}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}.$$

Le modèle $(P_\theta)_{\theta > 0}$ est donc régulier au sens fort, d'information de Fisher $I(\theta_0) = \frac{1}{\theta_0}$ pour tout $\theta_0 > 0$.

2. Il suffit d'appliquer le Théorème de Bernstein-von Mises (voir ci-dessous pour la vérification de la condition de test). La loi a priori $\Pi = \Gamma(p, \lambda)$ admet une densité π par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\theta_0 > 0$, cette densité est continue en θ_0, avec $\pi(\theta_0) > 0$ et $I(\theta_0) > 0$. L'estimateur du maximum de vraisemblance est $\overline{X}_n$. On peut noter que $\mathbb{P}_{\theta_0}$-p.s., pour n assez grand, on a $\overline{X}_n > 0$ puisque $\overline{X}_n$ tend $\mathbb{P}_{\theta_0}$-p.s. vers $\theta_0 > 0$. Ainsi, sous P_{θ_0}, on a

$$\left|\Pi\left[A_n \,|\, \mathbf{X}\right] - \mathcal{N}\left(\overline{X}_n, \frac{\theta_0}{n}\right)(A_n)\right| \leq d_{\mathrm{VT}}\left(\Pi\left[\cdot \,|\, \mathbf{X}\right], \mathcal{N}\left(\overline{X}_n, \frac{\theta_0}{n}\right)\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0\,.$$

3. Pour majorer $\mathcal{N}\left(\overline{X}_n, \frac{\theta_0}{n}\right)(A_n)$, il suffit de noter que la probabilité que la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ tombe dans un intervalle de longueur $2L$ est toujours inférieure ou égale à la probabilité qu'elle tombe dans l'intervalle $[\mu - L, \mu + L]$, elle-même égale à la probabilité que la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ tombe dans l'intervalle $[-L/\sigma, L/\sigma]$. Ici $L = m_n/\sqrt{n}$ (pour n assez grand de sorte que $\theta_0 - m_n/\sqrt{n} > 0$) et $\sigma = \sqrt{\theta_0/n}$, ce qui donne bien

$$\mathcal{N}\left(\overline{X}_n, \frac{\theta_0}{n}\right)(A_n) \leq \mathcal{N}(0, 1)\left(\left[-\frac{m_n}{\sqrt{\theta_0}}, \frac{m_n}{\sqrt{\theta_0}}\right]\right) = 2\Phi(m_n/\sqrt{\theta_0}) - 1.$$

4. On a, de manière évidente,

$$\Pi\left[A_n \,\middle|\, \mathbf{X}\right] = \left(\Pi\left[A_n \,\middle|\, \mathbf{X}\right] - \mathcal{N}\left(\overline{X}_n, \frac{\theta_0}{n}\right)(A_n)\right) + \mathcal{N}\left(\overline{X}_n, \frac{\theta_0}{n}\right)(A_n).$$

Par ce qui vient d'être établi et puisque (m_n) tend vers 0, on en conclut que, sous P_{θ_0},

$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - \theta_0| \leq \frac{m_n}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \mathbf{X}\right) = \Pi\left[A_n \,\middle|\, \mathbf{X}\right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0\,.$$

Remarque : comme expliqué en cours, pour pouvoir appliquer le Théorème de Bernstein-von Mises, il faut de plus vérifier une condition de test. Plus précisément, il faut montrer que l'on peut trouver un test consistant pour tester un point contre le complémentaire d'une boule : pour tout $\theta_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe une suite de tests $\phi_n = \phi_n(\mathbf{X})$ telle que

$$\mathbb{E}_{\theta_0}[\phi_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \sup_{|\theta-\theta_0|\geq\varepsilon} \mathbb{E}_\theta[1-\phi_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{1}$$

Pour ce faire, considérons, pour $\theta_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ donnés,

$$\phi_n = \mathbb{1}_{\{|\overline{X}_n - \theta_0| \geq \varepsilon/2\}}.$$

La première condition de (1) est alors clairement satisfaite puisque l'inégalité de Tchebychev donne

$$\mathbb{E}_{\theta_0}[\phi_n] = \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \theta_0| \geq \varepsilon/2\right) \leq \frac{4\theta_0}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Concernant la seconde, on a

$$\mathbb{E}_\theta[1-\phi_n] = \mathbb{E}_\theta\left[1 - \mathbb{1}_{\{|\overline{X}_n-\theta_0|\geq\varepsilon/2\}}\right] = \mathbb{E}_\theta\left[\mathbb{1}_{\{|\overline{X}_n-\theta_0|<\varepsilon/2\}}\right] = \mathbb{P}_\theta\left(|\overline{X}_n - \theta_0| < \varepsilon/2\right).$$

Or l'inégalité triangulaire donne

$$|\overline{X}_n - \theta_0| \geq |\theta_0 - \theta| - |\overline{X}_n - \theta|,$$

donc

$$\mathbb{P}_\theta\left(|\overline{X}_n - \theta_0| < \varepsilon/2\right) \leq \mathbb{P}_\theta\left(|\theta_0 - \theta| - |\overline{X}_n - \theta| < \varepsilon/2\right) = \mathbb{P}_\theta\left(|\overline{X}_n - \theta| > |\theta_0 - \theta| - \varepsilon/2\right).$$

L'inégalité de Tchebychev permet alors d'écrire

$$\mathbb{E}_\theta[1-\phi_n] \leq \mathbb{P}_\theta(|\overline{X}_n - \theta| \geq |\theta - \theta_0| - \varepsilon/2) \leq \frac{\theta}{(|\theta-\theta_0| - \varepsilon/2)^2 n}.$$

Il suffit alors de noter que

$$\sup_{|\theta-\theta_0|\geq\varepsilon} \frac{\theta}{(|\theta-\theta_0|-\varepsilon/2)^2} < +\infty$$

pour en déduire que

$$\sup_{|\theta-\theta_0|\geq\varepsilon} \mathbb{E}_\theta[1-\phi_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

et conclure que la seconde condition de (1) est elle aussi satisfaite.

Exercice 2 (Consistance dans le modèle gaussien)

1. On veut montrer que
$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-\theta_0| \geq \frac{M_n}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \mathbf{X}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \qquad \text{sous } P_{\theta_0}.$$
On a, pour $m_{\mathbf{X}} = \frac{a+n\overline{X}_n}{n+1}$, comme en exercice précédent (inégalité triangulaire et borne de l'union)
$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-\theta_0| \geq \frac{M_n}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \mathbf{X}\right) \leq \mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-m_{\mathbf{X}}| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}} \,\middle|\, \mathbf{X}\right) + \mathbb{1}_{\left\{|m_{\mathbf{X}}-\theta_0| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}}\right\}}.$$
D'une part, comme la loi a posteriori de $\boldsymbol{\theta}$ sachant $\mathbf{X}$ est une $\mathcal{N}(m_{\mathbf{X}}, \frac{1}{n+1})$, on a par l'inégalité de Tchebychev (conditionnelle)
$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-m_{\mathbf{X}}| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}} \,\middle|\, \mathbf{X}\right) \leq \frac{4nv_{\mathbf{X}}}{M_n^2} = \frac{4n}{(n+1)M_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$
D'autre part,
$$\sqrt{n}(m_{\mathbf{X}}-\theta_0) = \sqrt{n}\frac{n}{n+1}(\overline{X}_n-\theta_0) + \sqrt{n}\frac{a-\theta_0}{n+1}\,.$$
Par le TCL, sous P_{θ_0}, $\sqrt{n}(\overline{X}_n-\theta_0)$ converge en loi vers une $\mathcal{N}(0,1)$, et comme $\frac{n}{n+1} \to 1$ et $\sqrt{n}\frac{a-\theta_0}{n+1} \to 0$, le lemme de Slutsky implique que $\sqrt{n}(m_{\mathbf{X}}-\theta_0)$ converge aussi en loi vers une $\mathcal{N}(0,1)$. Donc $\frac{\sqrt{n}(m_{\mathbf{X}}-\theta_0)}{M_n}$ converge en probabilité vers 0 et
$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\mathbb{1}_{\left\{|m_{\mathbf{X}}-\theta_0| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}}\right\}}\right] = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{\sqrt{n}|m_{\mathbf{X}}-\theta_0|}{M_n} \geq \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
ce qui assure que, sous P_{θ_0},
$$\mathbb{1}_{\left\{|m_{\mathbf{X}}-\theta_0| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}}\right\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$
Au total on a prouvé que,
$$\mathbb{P}_{\theta_0}\left(|\boldsymbol{\theta}-\theta_0| \geq \frac{M_n}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \mathbf{X}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

2. On écrit
$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-\theta_0| \leq \frac{m_n}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \mathbf{X}\right) = \int_{\theta_0-\frac{m_n}{\sqrt{n}}}^{\theta_0+\frac{m_n}{\sqrt{n}}} \pi(\theta \,|\, \mathbf{X})\,\mathrm{d}\theta,$$
où $\pi(\theta \,|\, \mathbf{X})$ est la densité a posteriori, i.e. la densité de $\mathcal{N}(m_{\mathbf{X}}, \frac{1}{n+1})$. Celle-ci est gaussienne centrée en $m_{\mathbf{X}}$, donc en particulier unimodale et symétrique autour de $m_{\mathbf{X}}$, ce qui entraîne que la masse qu'elle met sur un intervalle de longueur $2L$ quelconque est toujours inférieure ou égale à la masse qu'elle met sur l'intervalle $[m_{\mathbf{X}}-L, m_{\mathbf{X}}+L]$. On en déduit
$$\int_{\theta_0-\frac{m_n}{\sqrt{n}}}^{\theta_0+\frac{m_n}{\sqrt{n}}} \pi(\theta \,|\, \mathbf{X})\,\mathrm{d}\theta \leq \int_{m_{\mathbf{X}}-\frac{m_n}{\sqrt{n}}}^{m_{\mathbf{X}}+\frac{m_n}{\sqrt{n}}} \pi(\theta \,|\, \mathbf{X})\,\mathrm{d}\theta = \mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0,1)| \leq m_n\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right).$$
Or, en notant $m_n' = m_n\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ (qui tend vers 0 par hypothèse) et Φ la fonction de répartition de la gaussienne standard, on a
$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0,1)| \leq m_n'\right) = 2\Phi(m_n') - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$
On en conclut que, sous P_{θ_0},
$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-\theta_0| \leq \frac{m_n}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \mathbf{X}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

3. Ces résultats montrent que la loi a posteriori converge, en tout point $\theta_0 \in \mathbb{R}$, à vitesse d'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 3 (Intervalles de crédibilité, intervalles de confiance)

1. On a vu plusieurs fois que la loi a posteriori $\Pi[\cdot \mid \mathbf{X}]$ est une loi Beta$(n\overline{X}_n + a, n - n\overline{X}_n + b)$, de moyenne et variance

$$m_{\mathbf{X}} = \frac{n\overline{X}_n + a}{n+a+b}, \quad v_{\mathbf{X}} = \frac{(n\overline{X}_n + a)(n - n\overline{X}_n + b)}{(n+a+b)^2(n+a+b+1)}.$$

L'inégalité de Tchebychev donne, pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - m_{\mathbf{X}}| > \delta \,\middle|\, \mathbf{X}\right) \leq \delta^{-2}\mathbb{E}\left[(\theta - m_{\mathbf{X}})^2 \,\middle|\, \mathbf{X}\right] = \frac{v_{\mathbf{X}}}{\delta^2}.$$

On choisit δ tel que $\alpha = v_{\mathbf{X}}/\delta^2$. On en déduit que

$$I^T(\mathbf{X}) = \left[m_{\mathbf{X}} \pm \sqrt{\frac{v_{\mathbf{X}}}{\alpha}}\right]$$

est un intervalle de crédibilité au moins $1 - \alpha$.

2. On a

$$\mathbb{P}_{\theta_0}\left(\theta_0 \in I^T(\mathbf{X})\right) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(|m_{\mathbf{X}} - \theta_0| \leq \sqrt{\frac{v_{\mathbf{X}}}{\alpha}}\right).$$

Observons déjà que, comme $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_0$ sous P_{θ_0}, on a par continuité

$$nv_{\mathbf{X}} = \frac{\left(\overline{X}_n + \frac{a}{n}\right)\left(1 - \overline{X}_n + \frac{b}{n}\right)}{\left(1 + \frac{a+b}{n}\right)^2\left(1 + \frac{a+b+1}{n}\right)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_0(1-\theta_0).$$

En écrivant

$$\frac{m_{\mathbf{X}} - \theta_0}{\sqrt{v_{\mathbf{X}}}} = \frac{1}{\sqrt{nv_{\mathbf{X}}}}\frac{n}{n+a+b}\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0) + \frac{a - (a+b)\theta_0}{n\sqrt{v_{\mathbf{X}}}},$$

et en utilisant que $nv_{\mathbf{X}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_0(1-\theta_0)$, et que $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)$ converge en loi vers une $\mathcal{N}(0, \theta_0(1-\theta_0))$ par le théorème central limite, le lemme de Slutsky implique que

$$\frac{m_{\mathbf{X}} - \theta_0}{\sqrt{v_{\mathbf{X}}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

On en conclut que

$$\mathbb{P}_{\theta_0}\left(\theta_0 \in I^T(\mathbf{X})\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{m_{\mathbf{X}} - \theta_0}{\sqrt{v_{\mathbf{X}}}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0,1)| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) - 1,$$

où Φ est la fonction de répartition d'une $\mathcal{N}(0,1)$.

3. Pour tout $0 < \theta_0 < 1$, d'après le théorème BvM, sous P_{θ_0},

$$d_{\mathrm{VT}}\left(\Pi[\cdot \mid \mathbf{X}], \mathcal{N}\left(\widehat{\theta}_n(\mathbf{X}), \frac{1}{nI(\theta_0)}\right)\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

où $\widehat{\theta}_n(\mathbf{X})$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance et $I(\theta_0)$ l'information de Fisher en θ_0. Ici, on vérifie aisément que $I(\theta_0)^{-1} = \theta_0(1-\theta_0)$ et $\widehat{\theta}_n(\mathbf{X}) = \overline{X}_n$. On peut noter que $\mathbb{P}_{\theta_0}$-p.s., pour n assez grand, on a $0 < \overline{X}_n < 1$ puisque $\overline{X}_n$ tend $\mathbb{P}_{\theta_0}$-p.s. vers $\theta_0 \in]0,1[$.

4. La loi a posteriori est une loi Beta donc de fonction de répartition continue strictement croissante sur $]0,1[$. Dans ce cas, nous avons vu en cours que, si BvM est vérifié, l'intervalle défini par les quantiles est à un $o_{\mathbb{P}}(1)$ près l'intervalle optimal au sens fréquentiste, que l'on obtiendrait en prenant les quantiles de la loi $\mathcal{N}(\widehat{\theta}_n(\mathbf{X}), \frac{1}{nI(\theta_0)})$, soit si z_α est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$,
$$\begin{aligned} I^B(\mathbf{X}) &= [a_n(\mathbf{X}), b_n(\mathbf{X})] \\ &= \left[\widehat{\theta}_n(\mathbf{X}) - \frac{z_\alpha}{\sqrt{nI(\theta_0)}}(1+o_{\mathbb{P}}(1)) \, , \, \widehat{\theta}_n(\mathbf{X}) + \frac{z_\alpha}{\sqrt{nI(\theta_0)}}(1+o_{\mathbb{P}}(1)) \right] . \end{aligned}$$
5. On peut comparer $I^T(\mathbf{X})$ et $I^B(\mathbf{X})$ de trois points de vue :
   - leur taille : le diamètre de $I^B(\mathbf{X})$ est
   $$\mathrm{Diam}(I^B(\mathbf{X})) = (1+o_{\mathbb{P}}(1))\frac{2z_\alpha}{\sqrt{nI(\theta_0)}},$$
   tandis que $I^T(\mathbf{X})$ a pour diamètre
   $$\mathrm{Diam}(I^T(\mathbf{X})) = 2\sqrt{\frac{v_{\mathbf{X}}}{\alpha}} = (1+o_{\mathbb{P}}(1))\frac{2}{\sqrt{nI(\theta_0)\alpha}}.$$
   Ils ont la même dépendance en n. En revanche on peut montrer (voir ci-dessous) que z_α est de l'ordre de $\sqrt{2\log(2/\alpha)}$ pour $\alpha \to 0$, donc cette dépendance est bien meilleure que $1/\sqrt{\alpha}$.
   - leur niveau de crédibilité : $1-\alpha$ exactement pour $I^B(\mathbf{X})$ et au moins $1-\alpha$ pour $I^T(\mathbf{X})$.
   - leur niveau de confiance asymptotique : comme vu en cours, on a
   $$\mathbb{P}_{\theta_0}\left(\theta_0 \in I^B(\mathbf{X})\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha.$$
   Ainsi le niveau de confiance asymptotique de $I^B(\mathbf{X})$ est de $1-\alpha$, et, comme vu à la question 2, celui de $I^T(\mathbf{X})$ est de $1-2(1-\Phi(1/\sqrt{\alpha}))$. Or si ϕ est la densité gaussienne normale standard, alors quand $x \to +\infty$, on sait par (2) que
   $$1-\Phi(x) \sim \phi(x)/x.$$
   On en déduit que, quand $\alpha \to 0$,
   $$2(1-\Phi(1/\sqrt{\alpha})) \sim 2\sqrt{\alpha}\phi(1/\sqrt{\alpha}) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\alpha}}.$$
   Cette quantité tend vers 0 bien plus vite que α. C'est logique, car l'intervalle $I^T(\mathbf{X})$ est nettement plus grand que $I^B(\mathbf{X})$ pour α petit.

Remarques :

1. Preuve de l'équivalence $x\Phi(-x) \sim \phi(x)$ quand $x \to +\infty$. Nous allons montrer un résultat bien plus fin, à savoir que, pour tout $x > 0$,
$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\frac{\phi(x)}{x} \le \Phi(-x) \le \frac{\phi(x)}{x}. \tag{2}$$
En effet, une intégration par parties donne
$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \frac{1}{u}ue^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{\phi(x)}{x} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \frac{1}{u^2}e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$
donc
$$0 \le \frac{\phi(x)}{x} - \Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \frac{1}{u^3}ue^{-\frac{u^2}{2}}du \le \frac{1}{x^3}\phi(x),$$
l'inégalité de droite venant de ce que $u \ge x > 0$, donc $u^{-3} \le x^{-3}$, pour tout u dans l'intégrale.

2. Preuve de l'équivalence $\Phi^{-1}(1-\alpha) \sim \sqrt{-2\log\alpha}$ quand $\alpha \to 0^+$. Notant $q_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$, on sait que $\alpha \to 0^+$ correspond à $q_\alpha \to +\infty$. Par l'encadrement (2), pour tout $q_\alpha > 0$,
$$\left(1 - \frac{1}{q_\alpha^2}\right)\frac{\phi(q_\alpha)}{q_\alpha} \leq \alpha \leq \frac{\phi(q_\alpha)}{q_\alpha}.$$
Il suffit de passer au logarithme et de tout diviser par $-q_\alpha^2/2$ pour conclure que $-2\log\alpha/q_\alpha^2$ tend vers 1 lorsque $q_\alpha \to +\infty$, ce qui est le résultat voulu.
3. En toute rigueur, pour pouvoir appliquer le Théorème de Bernstein-von Mises, il y a plusieurs points à vérifier. Tout d'abord, montrons que le modèle est régulier au sens fort. Pour tout $x \in \{0,1\}$, la fonction $\theta \mapsto \sqrt{p_\theta(x)} = \sqrt{\theta^x(1-\theta)^{1-x}}$ est C^1 sur $\Theta =]0,1[$ puisqu'elle vaut tout bonnement $\sqrt{1-\theta}$ ou $\sqrt{\theta}$. Le score vaut
$$\ell'_\theta(X) = \frac{X-\theta}{\theta(1-\theta)},$$
donc, puisque $X \in \{0,1\}$,
$$\ell'_\theta(X)^2 \leq \left(\frac{1+\theta}{\theta(1-\theta)}\right)^2.$$
Fixons $\theta_0 \in]0,1[$, alors pour tout $h > 0$ assez petit pour que $[\theta_0 - h; \theta_0 + h] \subset]0,1[$, on a bien
$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\sup_{\theta_0 - h \leq \theta \leq \theta_0 + h} \ell'_\theta(X)^2\right] < \infty.$$
Ceci garantit l'existence et la continuité de l'information de Fisher : celle-ci correspond au moment d'ordre 2 du score, c'est-à-dire
$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\ell'_\theta(X)^2\right] = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{X-\theta}{\theta(1-\theta)}\right)^2\right] = \frac{1}{\theta(1-\theta)}.$$
Le modèle $(P_\theta)_{\theta>0}$ est donc régulier au sens fort, d'information de Fisher $I(\theta_0) > 0$ pour tout $\theta_0 \in]0,1[$. De plus, la loi a priori $\Pi = \mathrm{Beta}(a,b)$ admet une densité π par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\theta_0 \in]0,1[$, cette densité est continue en θ_0, avec $\pi(\theta_0) > 0$ et $I(\theta_0) > 0$. L'estimateur du maximum de vraisemblance est $\overline{X}_n$. On peut noter que $\mathbb{P}_{\theta_0}$-p.s., pour n assez grand, on a $\overline{X}_n > 0$ puisque $\overline{X}_n$ tend $\mathbb{P}_{\theta_0}$-p.s. vers $\theta_0 > 0$. Il faut enfin vérifier la condition de test (1). Ici encore, il suffit de considérer la suite de tests
$$\phi_n = \phi_n(\mathbf{X}) = \mathbb{1}_{\{|\overline{X}_n - \theta_0| \geq \varepsilon/2\}}.$$
Mutatis mutandis, les arguments sont alors les mêmes que ceux détaillés précédemment.

Exercice 4 (Test consistant I)

1. Pour $\theta = p, q$, notons $p_\theta(\mathbf{X}) = \theta^{n\overline{X}_n}(1-\theta)^{n-n\overline{X}_n}$ la vraisemblance de $\mathbf{X}$ sous $\mathcal{B}(\theta)^{\otimes n}$. Par la formule de Bayes, la loi a posteriori est donnée par
$$\Pi\left[\{p\} \,\middle|\, \mathbf{X}\right] = \frac{\frac{1}{2}\cdot p_p(\mathbf{X})}{\frac{1}{2}\cdot p_p(\mathbf{X}) + \frac{1}{2}\cdot p_q(\mathbf{X})} = \frac{p_p(\mathbf{X})}{p_p(\mathbf{X}) + p_q(\mathbf{X})},$$
et $\Pi\left[\{q\} \,\middle|\, \mathbf{X}\right] = 1 - \Pi\left[\{p\} \,\middle|\, \mathbf{X}\right]$. Ainsi le test de Bayes pour Π et la perte équilibrée est donné par
$$\varphi^*(\mathbf{X}) = \mathbb{1}_{\left\{\Pi\left[\{q\} \,\middle|\, \mathbf{X}\right] \geq \Pi\left[\{p\} \,\middle|\, \mathbf{X}\right]\right\}} = \mathbb{1}_{\{p_q(\mathbf{X}) \geq p_p(\mathbf{X})\}}.$$

Or

$$\begin{aligned}
p_q(\mathbf{X}) \geq p_p(\mathbf{X}) &\Leftrightarrow q^{n\overline{X}_n}(1-q)^{n-n\overline{X}_n} \geq p^{n\overline{X}_n}(1-p)^{n-n\overline{X}_n} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{q}{p}\right)^{n\overline{X}_n} \geq \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n-n\overline{X}_n} \\
&\Leftrightarrow n\overline{X}_n \ln\left(\frac{q}{p}\right) \geq (n-n\overline{X}_n)\ln\left(\frac{1-p}{1-q}\right) \\
&\Leftrightarrow \overline{X}_n \geq \frac{\ln\left(\frac{1-p}{1-q}\right)}{\ln\left(\frac{q}{p}\right)+\ln\left(\frac{1-p}{1-q}\right)}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi^*(\mathbf{X}) = \mathbb{1}_{\{\overline{X}_n \geq c_{p,q}\}}$ avec

$$c_{p,q} = \frac{\ln\left(\frac{1-p}{1-q}\right)}{\ln\left(\frac{q}{p}\right)+\ln\left(\frac{1-p}{1-q}\right)}.$$

2. Oui, il l'est par les propositions 5.2 et 5.9 du cours : puisque l'on considère un modèle discret fini et identifiable $\{\mathcal{B}(p), \mathcal{B}(q)\}$ avec un a priori chargeant toutes les lois du modèle, la loi a posteriori $\Pi(\cdot \,|\, \mathbf{X})$ est consistante en tout point. De plus, $\Theta_0 = \{p\}$ et $\Theta_1 = \{q\}$ sont bien séparés (puisque $p < q$). Ainsi, φ^* étant un test de Bayes pour la perte équilibrée, il est bien consistant.

   Remarque : si on veut vérifier la consistance directement (i.e. sans passer par les propositions 5.2 et 5.9 du cours), il faut montrer que

$$\mathbb{E}_\theta \varphi^*(\mathbf{X}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in \Theta_0 = \{p\}, \\ 1 & \text{si } \theta \in \Theta_1 = \{q\}. \end{cases}$$

   Supposons $\theta = p$, i.e. sous $\mathbb{P}_p$, alors on sait que $\overline{X}_n$ tend p.s. vers p, donc si $p \neq c_{p,q}$ (point que nous allons vérifier ci-dessous), le Théorème de continuité implique

$$\varphi^*(\mathbf{X}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{1}_{\{p \geq c_{p,q}\}}.$$

   Puisque par ailleurs $0 \leq \varphi^*(\mathbf{X}) \leq 1$, pour montrer que $\mathbb{E}_\theta \varphi^*(\mathbf{X}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il suffit par le Théorème de convergence dominée de montrer que $p < c_{p,q}$. Ceci revient à prouver que

$$p \ln\left(\frac{q}{p}\right) + (1-p)\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right) < 0.$$

   Or $p \neq q$ et la fonction log est strictement concave donc l'inégalité de Jensen implique

$$p \ln\left(\frac{q}{p}\right) + (1-p)\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right) < \ln\left(p\frac{q}{p} + (1-p)\frac{1-q}{1-p}\right) = 0.$$

   Le cas $\theta = q$ se traite par des arguments similaires.

3. On a

$$\mathbf{R}_B(\Pi, \varphi) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}_q\left(\sum_{i=1}^n X_i < \frac{p+q}{2}n\right) + \mathbb{P}_p\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq \frac{p+q}{2}n\right)\right).$$

   En soustrayant par le bon recentrage dans chacune des deux probabilités, on a d'une part

$$\mathbb{P}_q\left(\sum_{i=1}^n X_i < \frac{p+q}{2}n\right) = \mathbb{P}_q\left(\sum_{i=1}^n X_i - nq < -\frac{q-p}{2}n\right),$$

et

$$\mathbb{P}_p\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq \frac{p+q}{2}n\right) = \mathbb{P}_p\left(\sum_{i=1}^n X_i - np \geq \frac{q-p}{2}n\right).$$

Par l'inégalité de Hoeffding, comme $0 \leq X_i \leq 1$, chacune de ces deux probabilités est inférieure à $e^{-\frac{2(q-p)^2n^2}{4n}} = e^{-\frac{(q-p)^2n}{2}}$. On obtient

$$\mathbf{R}_B(\Pi, \varphi) \leq e^{-\frac{(q-p)^2n}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

En particulier, $\mathbb{P}_p(\varphi(\mathbf{X}) = 1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\mathbb{P}_q(\varphi(\mathbf{X}) = 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui peut s'écrire

$$\mathbb{E}_\theta\varphi(\mathbf{X}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in \Theta_0 = \{p\}, \\ 1 & \text{si } \theta \in \Theta_1 = \{q\}. \end{cases}$$

Autrement dit, φ est consistant.

Exercice 5 (Test consistant II) Puisque le test est

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbb{1}_{\left\{\alpha\sqrt{\sigma^2n+1} \leq (1-\alpha)\,\mathrm{e}^{\frac{(n\overline{X}_n)^2}{2(n+\sigma^{-2})}}\right\}},$$

le but est de montrer que

$$\mathbb{E}_\theta[\varphi(\mathbf{X})] = \mathbb{P}_\theta(\varphi(\mathbf{X}) = 1) = \mathbb{P}_\theta\left(\alpha\sqrt{\sigma^2n+1} \leq (1-\alpha)\,\mathrm{e}^{\frac{(n\overline{X}_n)^2}{2(n+\sigma^{-2})}}\right)$$

tend vers 0 si $\theta = 0$ et vers 1 si $\theta \neq 0$. Si $\theta = 0$, on sait que $\sqrt{n}\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc

$$\mathbb{E}_0[\varphi(\mathbf{X})] = \mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0,1)| \geq \sqrt{2\left(1 + \frac{\sigma^{-2}}{n}\right)\log\left(\frac{\alpha\sqrt{\sigma^2n+1}}{1-\alpha}\right)}\right) = 2(1 - \Phi(u_n))$$

avec Φ la fonction de répartition de la gaussienne standard et

$$u_n := \sqrt{2\left(1 + \frac{\sigma^{-2}}{n}\right)\log\left(\frac{\alpha\sqrt{\sigma^2n+1}}{1-\alpha}\right)}.$$

Puisque (u_n) tend vers l'infini, on a bien

$$\mathbb{E}_0[\varphi(\mathbf{X})] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

A contrario, lorsque $\theta \neq 0$, on peut utiliser le fait que $\overline{X}_n$ tend $\mathbb{P}_\theta$-p.s. vers θ et noter que

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbb{1}_{|\overline{X}_n| \geq \sqrt{\frac{2(n+\sigma^{-2})}{n^2}\log\left(\frac{\alpha\sqrt{\sigma^2n+1}}{1-\alpha}\right)}}.$$

Dans l'indicatrice, le terme de gauche tend $\mathbb{P}_\theta$-p.s. vers $|\theta| > 0$ tandis que celui de droite tend (de manière déterministe) vers 0, donc la suite de variables aléatoires

$$\mathbb{1}_{|\overline{X}_n| \geq \sqrt{\frac{2(n+\sigma^{-2})}{n^2}\log\left(\frac{\alpha\sqrt{\sigma^2n+1}}{1-\alpha}\right)}}$$

tend $\mathbb{P}_\theta$-p.s. vers 1. Le théorème de convergence dominée permet de conclure que

$$\mathbb{E}_\theta[\varphi(\mathbf{X})] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\,.$$

Le test $\varphi(\mathbf{X})$ est donc bien consistant.
Remarque : pour le dernier point, on peut aussi conclure en notant que

$$\mathbb{E}_\theta[\varphi(\mathbf{X})] = 1 - \mathbb{P}_\theta(|\overline{X}_n| < \varepsilon_n)$$

avec

$$\varepsilon_n := \sqrt{\frac{2(n+\sigma^{-2})}{n^2}\log\left(\frac{\alpha\sqrt{\sigma^2 n+1}}{1-\alpha}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

et puisque sous P_θ on sait que $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta) \sim \mathcal{N}(0,1)$, il vient

$$\mathbb{P}_\theta(|\overline{X}_n| < \varepsilon_n) = \Phi(\sqrt{n}(\theta+\varepsilon_n)) - \Phi(\sqrt{n}(\theta-\varepsilon_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

car $\theta \neq 0$ et $\varepsilon_n \to 0$ impliquent

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(\sqrt{n}(\theta+\varepsilon_n)) = \lim_{n\to\infty}\Phi(\sqrt{n}(\theta-\varepsilon_n)) = \mathbf{1}_{\theta>0}.$$

Exercice 6 (Un cas de non-consistance)

1. La formule de Bayes donne

$$\pi(\theta \,|\, \mathbf{X}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (X_i-\theta)^2\right\}\mathbb{1}_{[0,1]}(\theta) \propto \exp\left\{-\frac{n}{2}(\theta-\overline{X}_n)^2\right\}\mathbb{1}_{[0,1]}(\theta).$$

Il s'agit donc d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(\overline{X}_n, n^{-1})$ tronquée sur l'intervalle $[0,1]$. De plus, notons que la constante de normalisation peut se majorer comme suit :

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{n}{2}(\theta-\overline{X}_n)^2\right\}\mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \le \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{n}{2}(\theta-\overline{X}_n)^2\right\}\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{\frac{2\pi}{n}},$$

d'où

$$\pi(\theta \,|\, \mathbf{X}) \ge \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{n}{2}(\theta-\overline{X}_n)^2\right\}\mathbb{1}_{[0,1]}(\theta).$$

2. On étudie maintenant le comportement de $\Pi[\cdot \,|\, \mathbf{X}]$ sous P_{θ_0}.
   (a) Soit $\theta_0 \in (0,1)$ et soit $\varepsilon > 0$. Introduisons l'événement

$$\mathcal{E}_n = \left\{|\overline{X}_n - \theta_0| \le \frac{\varepsilon}{2}\right\}\,.$$

Comme $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_0$ sous P_{θ_0}, on a $\mathbb{P}_{\theta_0}(\mathcal{E}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ainsi, en utilisant la définition de $\mathcal{E}_n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\mathcal{E}_n}\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-\theta_0| \le \varepsilon \,\middle|\, \mathbf{X}\right) &= \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n}\int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} \pi(\theta \,|\, \mathbf{X})\,\mathrm{d}\theta \\
&\ge \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{\overline{X}_n-\varepsilon/2}^{\overline{X}_n+\varepsilon/2} \exp\left\{-\frac{n}{2}(\theta-\overline{X}_n)^2\right\}\mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{n}/2}^{\varepsilon\sqrt{n}/2} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathbb{1}_{\{-\overline{X}_n\sqrt{n}\le u\le(1-\overline{X}_n)\sqrt{n}\}}\,\mathrm{d}u \\
&= \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{n}/2}^{\varepsilon\sqrt{n}/2} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\,,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est valide pour ε assez petit : en effet, sur $\mathcal{E}_n$ et pour ε assez petit,

$$[-\overline{X}_n\sqrt{n},(1-\overline{X}_n)\sqrt{n}] \supset [-(\theta_0-\varepsilon/2)\sqrt{n},(1-\theta_0-\varepsilon/2)\sqrt{n}] \supset [-\varepsilon\sqrt{n}/2,\varepsilon\sqrt{n}/2] .$$

Puisque

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{n}/2}^{\varepsilon\sqrt{n}/2} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

on en conclut que

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-\theta_0|\le\varepsilon \,\middle|\, \mathbf{X}\right)\right] \ge \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{E}_n}\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-\theta_0|\le\varepsilon \,\middle|\, \mathbf{X}\right)\right] \ge \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{E}_n} I_n\right] = \mathbb{P}_{\theta_0}(\mathcal{E}_n) I_n$$

donc

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-\theta_0|\le\varepsilon \,\middle|\, \mathbf{X}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

ce qui prouve la consistance de $\Pi[\cdot \,|\, \mathbf{X}]$ en θ_0.

(b) Si $\theta_0 \notin [0,1]$, alors comme $[0,1]^c$ est ouvert, on peut trouver un intervalle ouvert V contenant θ_0 tel que $V \subset [0,1]^c$. Or $\Pi(V)=0$ car Π met de la masse sur $[0,1]$ seulement par définition. On en déduit que $\Pi[V \,|\, \mathbf{X}] = 0$ (cela résulte immédiatement de la formule de Bayes). Donc $\Pi[\cdot \,|\, \mathbf{X}]$ ne peut être consistante en θ_0.

(c) On a

$$\Pi[A_\varepsilon^c \,|\, \mathbf{X}] = \int_0^{1-\varepsilon} \pi(\theta \,|\, \mathbf{X})\,\mathrm{d}\theta = \frac{\int_0^{1-\varepsilon} \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}(\theta-\overline{X}_n)^2}\,\mathrm{d}\theta}{\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}(\eta-\overline{X}_n)^2}\,\mathrm{d}\eta} = \frac{\int_{-\sqrt{n}\overline{X}_n}^{-\sqrt{n}(\overline{X}_n-1+\varepsilon)} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u}{\int_{-\sqrt{n}\overline{X}_n}^{-\sqrt{n}(\overline{X}_n-1)} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u} .$$

Un calcul direct montre que si $0<a\le b$, et $c\ge 0$, alors $a/b \le (a+c)/(b+c)$. Ainsi, en ajoutant en haut et en bas $\int_{-\infty}^{-\sqrt{n}\overline{X}_n} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$, il vient

$$\Pi[A_\varepsilon^c \,|\, \mathbf{X}] \le \frac{\Phi\left(-\sqrt{n}(\overline{X}_n-1+\varepsilon)\right)}{\Phi\left(-\sqrt{n}(\overline{X}_n-1)\right)}$$

Sur $\mathcal{E}_n$, on a

$$\mathbb{1}_{\mathcal{E}_n}\Pi[A_\varepsilon^c \,|\, \mathbf{X}] \le \frac{\Phi\left(-\sqrt{n}(\theta_0-1+\frac{3\varepsilon}{4})\right)}{\Phi\left(-\sqrt{n}(\theta_0-1+\frac{\varepsilon}{4})\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Cela peut se vérifier en utilisant le fait que $\Phi(-x) \sim \phi(x)/x$ quand $x\to+\infty$ (voir la preuve ci-dessous). En notant

$$a := \left(\theta_0-1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)^2 - \left(\theta_0-1+\frac{\varepsilon}{4}\right)^2 > 0,$$

on a en effet, lorsque $n\to\infty$,

$$\frac{\Phi\left(-\sqrt{n}(\theta_0-1+\frac{3\varepsilon}{4})\right)}{\Phi\left(-\sqrt{n}(\theta_0-1+\frac{\varepsilon}{4})\right)} \sim \frac{\theta_0-1+\frac{\varepsilon}{4}}{\theta_0-1+\frac{3\varepsilon}{4}} e^{-\frac{na}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Comme, sous P_{θ_0}, $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_0 \ge 1$, on a $\mathbb{P}_{\theta_0}(\mathcal{E}_n)\to 1$. On en déduit

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\Pi[A_\varepsilon \,|\, \mathbf{X}] \ge \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{E}_n}\Pi[A_\varepsilon \,|\, \mathbf{X}]\right] = \mathbb{P}_{\theta_0}(\mathcal{E}_n) - \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{E}_n}\Pi[A_\varepsilon^c \,|\, \mathbf{X}]\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(d) Si $\theta_0 = 1$, il résulte de la question (c) que la loi a posteriori est consistante en ce point. En effet, tout voisinage ouvert V de θ_0 contient un ensemble A_ε pour ε assez petit, donc $\mathbb{E}_{\theta_0}\Pi[V \,|\, \mathbf{X}] \to 1$, ce qui montre la consistance. Si $\theta_0 = 0$, le raisonnement de la question (c) s'applique et on conclut que la loi a posteriori est aussi consistante en ce point.