Correction du TD 2

Exercice 1

1. On a
$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = m \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(X_{n-1})\big) = m,$$
les deux estimateurs sont donc sans biais pour l'estimation de m.

2. Le risque quadratique d'un estimateur $\widehat{m}$ de m est donné par
$$R(\widehat{m}, m) = (\mathbb{E}(\widehat{m}) - m)^2 + \mathrm{Var}(\widehat{m}).$$
On compare les risques quadratiques des deux estimateurs. On a
$$\begin{aligned} R(\overline{X}_n, m) &= 0 + \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) \text{ (par indépendance)} \\ &= \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}; \\ R(Z_n, m) &= 0 + \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X_n + X_{n-1}) = \frac{\sigma^2}{2}. \end{aligned}$$
Pour tout $n \geq 3$, pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a $R(\overline{X}_n, m) < R(Z_n, m)$, l'estimateur $\overline{X}_n$ est donc préférable à Z_n au sens du risque quadratique. Ne pas oublier de comparer les risques quadratiques pour toutes les valeurs possibles du paramètre inconnu, ici $m \in \mathbb{R}$.

3. Le risque de l'estimateur (stupide) W_n est égal à m^2 donc il est préférable à $\overline{X}_n$ pour des valeurs de paramètre extrêmes $|m| \leq \sigma/\sqrt{n}$. Ainsi, $\overline{X}_n$ n'est pas toujours préférable à $W_n = 0$, ce qui montre bien la limite de la méthode consistant à comparer les risques des estimateurs pour toutes les valeurs possibles du paramètre (c'est-à-dire uniformément). Remarquons tout de même que cet effet s'estompe avec n tendant vers l'infini.

Petit rappel

Lorsqu'une suite U_n converge en loi vers une variable U, avec des fonctions de répartition F_{U_n} et F_U continues sur $\mathbb{R}$, nous avons pour $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, avec les conventions usuelles $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$ pour toute fonction de répartition :
$$\mathbb{P}\left(a \leq U_n \leq b\right) = F_{U_n}(b) - F_{U_n}(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_U(b) - F_U(a).$$
Lorsque $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ (ce qui est souvent le cas), il suffit de prendre (pour $\beta \in [0, \alpha]$) $b = \Phi^{-1}(1-\beta)$ (le $(1-\beta)$-quantile de $\mathcal{N}(0,1)$) et $a = \Phi^{-1}(\alpha - \beta)$ (le $\alpha - \beta$-quantile). On obtient alors :
$$\mathbb{P}\left(a \leq U_n \leq b\right) \to 1 - \beta - (\alpha - \beta) = 1 - \alpha.$$

On a donc une infinité de possibilité, conduisant à une infinité d'intervalles de confiance. L'option la plus classique est de choisir $\beta = \alpha/2$, autrement dit $b = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ et $a = -\Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(\alpha/2)$ (on considère donc le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$). On vérifie de nouveau que :

$$\mathbb{P}\left(a \leq U_n \leq b\right) \to 1 - \alpha/2 - \alpha/2 = 1 - \alpha.$$

On aurait aussi très bien pu choisir $\beta = \alpha$ (i.e. $b = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ et $a = \Phi^{-1}(0) = -\infty$) ou $\beta = 0$ (i.e. $b = \Phi^{-1}(1) = \infty$ et $a = \Phi^{-1}(\alpha)$).

Exercice 2

1. Comme $\mathbb{E}X_1 = \theta$ et $\operatorname{Var} X_1 = \theta$, le théorème de la limite centrale appliqué aux variables X_i i.i.d. de carré intégrable donne
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \theta).$$
2. Pour toute fonction g dérivable en tout $\theta > 0$, nous pouvons appliquer la méthode Delta :
$$\sqrt{n}(g(\widehat{\theta}_n) - g(\theta)) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \theta(g'(\theta))^2).$$
Pour "stabiliser la variance", choisissons g de sorte que, pour tout $\theta > 0$,
$$\theta(g'(\theta))^2 = 1.$$
Ceci incite à choisir g comme une primitive de $\theta \mapsto 1/\sqrt{\theta}$, ainsi $g(\theta) = 2\sqrt{\theta}$ convient. Avec ce choix, nous trouvons
$$\sqrt{n}\left(2\sqrt{\widehat{\theta}_n} - 2\sqrt{\theta}\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1),$$
ce qui « stabilise » bien la variance asymptotique, toujours égale à 1 quel que soit $\theta > 0$. On en déduit que
$$\mathbb{P}\left(-2 \leq \sqrt{n}\left(2\sqrt{\widehat{\theta}_n} - 2\sqrt{\theta}\right) \leq 2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \text{Cte} \geq 0.95,$$
ce qui implique que
$$\left[\left(\max\left(0, \sqrt{\widehat{\theta}_n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 ; \left(\sqrt{\widehat{\theta}_n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right]$$
est un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour θ.
3. On a vu que
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \theta).$$
Par le théorème de continuité et le lemme de Slutsky (voir TD 1, Exercice 7), on a donc
$$\sqrt{n}\frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\widehat{\theta}_n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1).$$
un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour θ est donc
$$\left[\widehat{\theta}_n - 2\frac{\sqrt{\widehat{\theta}_n}}{\sqrt{n}} ; \widehat{\theta}_n + 2\frac{\sqrt{\widehat{\theta}_n}}{\sqrt{n}}\right].$$

4. Les intervalles précédents ne sont valables qu'asymptotiquement, c'est-à-dire lorsque n tend vers l'infini, or dans ce cas, on a pour la borne supérieure du premier intervalle :

$$\left(\sqrt{\widehat{\theta}_n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\widehat{\theta}_n+2\frac{\sqrt{\widehat{\theta}_n}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\approx\widehat{\theta}_n+2\frac{\sqrt{\widehat{\theta}_n}}{\sqrt{n}},$$

qui correspond à la borne supérieure du second intervalle. Le fait que $\widehat{\theta}_n$ tende presque sûrement vers $\theta>0$ assure bien que $1/n$ est asymptotiquement négligeable devant $\sqrt{\widehat{\theta}_n}/\sqrt{n}$:

$$\frac{1/n}{\sqrt{\widehat{\theta}_n}/\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{\sqrt{\widehat{\theta}_n}}\xrightarrow[n\to\infty]{p.s.}0.$$

Bref, la méthode de stabilisation de la variance n'apporte rien de plus qu'un simple plug-in, lequel ne requiert aucun calcul de primitive.

Exercice 3

1. Les X_i suivent une loi normale $\mathcal{N}(0,\theta^2)$. On sait donc que $\mathrm{Var}(X_i)=\mathbb{E}(X_i^2)=\theta^2=\tau$. Pour estimer τ, on propose l'estimateur suivant :

$$\widehat{\tau}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2.$$

On a alors $\frac{n\widehat{\tau}}{\tau}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\theta}\right)^2$. Or comme pour tout i, $\frac{X_i}{\theta}\sim\mathcal{N}(0,1)$ et comme les v.a. X_i sont i.i.d., on en déduit que

$$\frac{n\widehat{\tau}}{\tau}\sim\chi^2(n).$$

Cette caractérisation de la loi de $\widehat{\tau}$ suffit, cependant on peut remarquer qu'une loi du $\chi^2(n)$ est aussi une loi $\gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$. Ainsi,

$$\widehat{\tau}=\frac{\tau}{n}\frac{n\widehat{\tau}}{\tau}\sim\gamma\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2\tau}\right).$$

2. On note $F_{\chi^2_n}$ la f.d.r. de la loi du $\chi^2(n)$ et $F^{-1}_{\chi^2_n}$ la fonction quantile (qui est ici l'inverse de $F_{\chi^2_n}$ car cette dernière est une bijection). On peut alors écrire :

$$\mathbb{P}\left(F^{-1}_{\chi^2_n}(\alpha/2)\leq\frac{n\widehat{\tau}}{\tau}\leq F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha/2)\right)=1-\alpha,$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{n\widehat{\tau}}{F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha/2)}\leq\tau\leq\frac{n\widehat{\tau}}{F^{-1}_{\chi^2_n}(\alpha/2)}\right)=1-\alpha.$$

En posant

$$S_1=\frac{n\widehat{\tau}}{F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha/2)}\quad\text{et}\quad S_2=\frac{n\widehat{\tau}}{F^{-1}_{\chi^2_n}(\alpha/2)},$$

on en déduit que $\mathbb{P}(\tau < S_1) = \mathbb{P}(\tau > S_2) = \alpha/2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\tau < S_1\big) &= \mathbb{P}\left(\tau < \frac{n\widehat{\tau}}{F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha/2)}\right) = \mathbb{P}\left(F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha/2) < \frac{n\widehat{\tau}}{\tau}\right) \\
&= 1 - F_{\chi^2_n}\big(F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha/2)\big) = \alpha/2. \\
\mathbb{P}\big(\tau > S_2\big) &= \mathbb{P}\left(\tau > \frac{n\widehat{\tau}}{F^{-1}_{\chi^2_n}(\alpha/2)}\right) = \mathbb{P}\left(F^{-1}_{\chi^2_n}(\alpha/2) > \frac{n\widehat{\tau}}{\tau}\right) = F_{\chi^2_n}\big(F^{-1}_{\chi^2_n}(\alpha/2)\big) = \alpha/2.
\end{aligned}$$

3. Les X_i suivent une loi normale et admettent donc des moments à tous les ordres, en particulier à l'ordre 4. Les v.a. X_i^2 sont donc dans $\mathbb{L}^2$ et satisfont le TCL :

$$\sqrt{n}\frac{\widehat{\tau}-\tau}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1^2)}} = \sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \theta^2}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1^2)}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1).$$

De plus, $\mathrm{Var}(X_1^2) = \theta^4 \mathrm{Var}((X_1/\theta)^2) = 2\theta^4 = 2\tau^2$ car la variance d'une $\chi^2(1)$ est égale à 2.
On peut alors construire un IC asymptotique pour τ. La convergence en loi vue plus haut donne, en notant Φ la fonction de répartition de la $\mathcal{N}(0,1)$,

$$\mathbb{P}\left(-\Phi^{-1}(1-\alpha/2) \leq \sqrt{n}\frac{\widehat{\tau}-\tau}{\sqrt{2\tau^2}} \leq \Phi^{-1}(1-\alpha/2)\right) \to 1-\alpha,$$

c'est-à-dire,

$$\mathbb{P}\left(1-\Phi^{-1}(1-\alpha/2)/\sqrt{n/2} \leq \widehat{\tau}/\tau \leq 1+\Phi^{-1}(1-\alpha/2)/\sqrt{n/2}\right) \to 1-\alpha,$$

on encore

$$\mathbb{P}\left(\frac{\widehat{\tau}}{1+\Phi^{-1}(1-\alpha/2)/\sqrt{n/2}} \leq \tau \leq \frac{\widehat{\tau}}{1-\Phi^{-1}(1-\alpha/2)/\sqrt{n/2}}\right) \to 1-\alpha.$$

4. On a $F^{-1}_{\chi^2_n}(\alpha/2) \simeq 3.25$, $F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha/2) \simeq 20.48$ et $\Phi^{-1}(1-\alpha/2) \simeq 2$. L'intervalle non asymptotique (question 2) associé est $[0.97, 6.16]$ (environ), alors que l'intervalle asymptotique est $[1.05, 18.95]$ (environ). On remarque que l'intervalle de confiance asymptotique est différent de l'intervalle de confiance non asymptotique. Ceci est normal car $n = 10$ est trop petit pour que l'approche asymptotique soit valide (la convergence n'a pas eu lieu).
Remarque : On préférera l'IC non-asymptotique car il a été construit avec la vraie loi, et est donc plus précis.

5. Dans les deux cas, on raisonne de manière non-asymptotique car on souhaite que l'approche soit valable pour $n = 10$.

Première option Par un raisonnement similaire à celui de la question 2 (en remplaçant $1-\alpha/2$ par $1-\alpha$ et $\alpha/2$ par 0), $\left[\frac{n\widehat{\tau}}{F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha)}, \infty\right[$ est un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour τ. Ainsi, on construit le test

$$T = \mathbb{1}_{]0,3]\cap\left[\frac{n\widehat{\tau}}{F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha)},\infty\right[=\emptyset} = \mathbb{1}_{\widehat{\tau} > \frac{3F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha)}{n}},$$

qui est bien de niveau α.

Deuxième option Construisons le test directement. On cherche donc $c_\alpha \geq 0$ tel que $\sup_{\tau \leq 3} \mathbb{P}\big(\widehat{\tau} > c_\alpha\big) = \alpha$. Or nous avons :

$$\begin{aligned}\sup_{\tau \leq 3} \mathbb{P}\big(\widehat{\tau} > c_\alpha\big) &= \sup_{\tau \leq 3} \mathbb{P}\left(\frac{n\widehat{\tau}}{\tau} > \frac{nc_\alpha}{\tau}\right) \\ &= 1 - \inf_{\tau \leq 3} F_{\chi^2_n}\left(\frac{nc_\alpha}{\tau}\right) \\ &= 1 - F_{\chi^2_n}(nc_\alpha/3).\end{aligned}$$

Nous choisissons donc c_α de sorte que $1 - F_{\chi^2_n}(nc_\alpha/3) = \alpha$, c'est -à-dire, $c_\alpha = 3n^{-1}F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha)$. Finalement, le test rejetant H_0 si $\widehat{\tau} > 3n^{-1}F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha)$ est de niveau α. Pour $n = 10$, et $\alpha = 5\%$, nous avons $3n^{-1}F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha) \simeq 5.49$. Ainsi H_0 est acceptée lorsque $\widehat{\tau} = 4$.
De plus, la p-valeur est donnée par

$$\alpha_0 = \inf\{\alpha \in [0,1], \text{ tel que } H_0 \text{ est rejetée au niveau } \alpha\}.$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned}H_0 \text{ est rejetée au niveau } \alpha &\Leftrightarrow \widehat{\tau} > 3n^{-1}F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha) \\ &\Leftrightarrow n\widehat{\tau}/3 > F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha) \\ &\Leftrightarrow F_{\chi^2_n}(n\widehat{\tau}/3) > 1-\alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha > 1 - F_{\chi^2_n}(n\widehat{\tau}/3),\end{aligned}$$

donc $\alpha_0 = 1 - F_{\chi^2_n}(n\widehat{\tau}(\omega)/3)$. Pour les valeurs numériques plus haut, cela donne $\alpha_0 = 1 - F_{\chi^2_{10}}(40/3) \simeq 0.2$. En particulier, on retrouve bien que le test accepte H_0 pour $\alpha = 0.05$.

Exercice 4

1. (a) La v.a. Y_n est bien définie sur l'événement $\{\sum_{i=1}^n X_i > 0\}$ qui est de probabilité 1 car les X_i sont strictement positifs p.s. (la loi de X_i ne charge pas 0 car elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue). Ainsi, Y_n est bien définie p.s.

   (b) Les v.a. X_i suivent une loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$. On a ainsi $\mathbb{E}(X_1) = 1/\theta$. Et la loi des grands nombres appliquée aux X_i (i.i.d. et intégrables) montre que $\overline{X}_n$ converge p.s. vers $1/\theta > 0$. Par le théorème de continuité, $Y_n = 1/\overline{X}_n$ converge p.s. vers θ. Cela indique que $Y_n = 1/\overline{X}_n$ est un estimateur consistant et donc raisonnable de θ.
   Comme nous le verrons plus tard, ce dernier correspond à l'estimateur par la méthode des moments.

   (c) Comme $\mathrm{Var}X_1 = 1/\theta^2 < \infty$, le TCL donne que $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mathbb{E}X_1) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}X_1)$ c'est-à-dire $\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1/\theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1/\theta^2)$. A présent, on utilise la méthode delta avec la fonction $x \mapsto 1/x$, qui est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée en $1/\theta$ égale à $-1/(1/\theta)^2 = -\theta^2$:

   $$\sqrt{n}(Y_n - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, (-\theta^2)^2/\theta^2)$$

   donc

   $$\sqrt{n}(Y_n - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \theta^2).$$

   (d) D'après les propriétés de la loi Gamma (cf. TD 1), comme les X_i sont indépendantes et puisque chaque X_i est de loi $\mathcal{E}(\theta) = \gamma(1,\theta)$, nous avons $\sum_{i=1}^n X_i \sim \gamma(n,\theta)$. On en déduit $\mathbb{E}(Y_n)$, $\mathrm{Var}(Y_n)$

et $\mathbb{E}[(Y_n-\theta)^2]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n) &= \mathbb{E}\left(n/\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\mathbb{E}\left(1/\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\int_{\mathbb{R}_+}\frac{1}{x}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}\exp(-\theta x)dx \\
&= \frac{n\theta}{\Gamma(n)}\int_{\mathbb{R}_+} u^{n-2}\exp(-u)du = \frac{n\theta}{\Gamma(n)}\Gamma(n-1) = \frac{n\ \theta}{n-1},
\end{aligned}$$

en posant $u=\theta x$ et en reconnaissant sous la dernière intégrale la densité de la $\gamma(n-1,1)$, au facteur $\Gamma(n-1)$ près. On obtient de la même manière :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n^2) &= \frac{n^2\theta^2}{\Gamma(n)}\Gamma(n-2) = \frac{n^2\ \theta^2}{(n-1)(n-2)}, \\
\mathrm{Var}(Y_n) &= \mathbb{E}(Y_n^2)-\mathbb{E}(Y_n)^2 = \frac{n^2\ \theta^2}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{n\ \theta}{n-1}\right)^2 = \frac{n^2\ \theta^2}{(n-1)^2(n-2)}, \\
R(Y_n,\theta) &= \mathbb{E}[(Y_n-\theta)^2] = (\mathbb{E}(Y_n)-\theta)^2 + \mathrm{Var}(Y_n) = \left(\frac{n\ \theta}{n-1}-\theta\right)^2 + \frac{n^2\ \theta^2}{(n-1)^2(n-2)} \\
&= \frac{\theta^2}{n-2}\frac{n^2+n-2}{(n-1)^2}.
\end{aligned}$$

où l'on remarque d'ores et déjà que le terme entre parenthèses et strictement supérieur à 1 dès lors que $n>1$.

2. (a) Les propriétés asymptotiques de Z_n sont similaires à celles de Y_n : comme $\frac{n-1}{n}\to 1$ et $Y_n \overset{p.s.}{\to} \theta$, on a bien sûr $Z_n \overset{p.s.}{\to} \theta$. De plus, comme $\sqrt{n}(Y_n-\theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,\theta^2)$, nous avons

$$\sqrt{n}(Z_n-\theta) = \sqrt{n}(Y_n-\theta) - \sqrt{n}(Y_n-Z_n) = \sqrt{n}(Y_n-\theta) - Y_n/\sqrt{n} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,\theta^2),$$

où nous avons utilisé le lemme de Slutsky car $Y_n/\sqrt{n}$ converge en probabilité vers 0 (constante).

(b) On calcule le risque de Z_n :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) &= \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(Y_n) = \theta \text{ (estimateur sans biais)} \\
\mathrm{Var}(Z_n) &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\mathrm{Var}(Y_n) = \frac{\theta^2}{n-2} \\
R(Z_n,\theta) &= \mathbb{E}[(Z_n-\theta)^2] = 0 + \mathrm{Var}(Z_n) = \frac{\theta^2}{n-2}.
\end{aligned}$$

On voit facilement que le risque quadratique de Z_n est inférieur à celui de Y_n (pour toute valeur de θ, puisque $\frac{n^2+n-2}{(n-1)^2}>1$), l'estimateur Z_n est donc un peu meilleur au sens du risque quadratique.

3. Puisque $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta^2}}(Z_n-\theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, nous avons :

$$\mathbb{P}\left(-\Phi^{-1}(1-\alpha/2) \le \sqrt{n}(Z_n/\theta-1) \le \Phi^{-1}(1-\alpha/2)\right) \to 1-\alpha.$$

On obtient un intervalle de confiance asymptotique en réorganisant les termes des inégalités :

$$\mathbb{P}\left(\frac{Z_n}{1+\Phi^{-1}(1-\alpha/2)/\sqrt{n}} \le \theta \le \frac{Z_n}{1-\Phi^{-1}(1-\alpha/2)/\sqrt{n}}\right) \to 1-\alpha.$$

4. Pour tout $\theta>0$, par le même raisonnement que ci-dessus, un intervalle de confiance unilatère de niveau asymptotique $1-\alpha$ pour θ est (en prenant comme convention $]a,b]=\emptyset$ pour $b\le a$)

$$\left]0, \frac{Z_n}{1+\frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{n}}}\right].$$

Le lien entre intervalles de confiance (asymptotiques) et tests (asymptotiques) assure donc que le test consistant à rejeter H_0 ssi

$$[1,+\infty[\cap\left]0,\frac{Z_n}{1+\frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{n}}}\right]=\emptyset$$

est de niveau asymptotique α. Dit autrement, on rejette H_0 ssi

$$Z_n<1+\frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{n}}.$$

Remarque 1 : en mettant le test sous cette dernière forme, on a supposé que $1+\Phi^{-1}(\alpha)/\sqrt{n}>0$, or à n fixé petit ceci n'est pas toujours vrai puisque pour les valeurs de α courantes (i.e. inférieures à $1/2$, par exemple $\alpha=5\%$), on a $\Phi^{-1}(\alpha)<0$ (par exemple $\Phi^{-1}(0.05)\approx-1,64$), donc pour $n<\Phi^{-1}(\alpha)^2$ (par exemple $n<\Phi^{-1}(0.05)^2\approx 2.7$), il est clair que $1+\Phi^{-1}(\alpha)/\sqrt{n}<0$ et le passage à la dernière forme n'est pas licite. Néanmoins, il faut bien garder à l'esprit que tout ce qu'on dit n'est valable que pour $n\to\infty$, or quel que soit $\alpha\in]0,1[$ on a bien asymptotiquement $1+\Phi^{-1}(\alpha)/\sqrt{n}>0$, donc le passage à la dernière expression est correct. Quoi qu'il en soit, si on veut éviter toute discussion, il suffit de garder le test sous la forme : rejet de H_0 ssi

$$\frac{Z_n}{1+\frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{n}}}<1.$$

Remarque 2 : pour construire un test, il suffit que l'intervalle de confiance soit vrai sous H_0. On aurait donc très bien pu écrire que pour tout $\theta\geq 1$, $\left]1,\frac{Z_n}{1+\frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{n}}}\right]$ est un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\alpha$ pour θ sous H_0, et construire le test par intersection avec $[1,+\infty[$, ce qui serait revenu au même.

5. Sous $H_0:\theta=1$, on sait d'après ci-dessus que

$$\sqrt{n}(Z_n-1)\rightsquigarrow\mathcal{N}(0,1),$$

donc un intervalle de confiance bilatère de niveau asymptotique $1-\alpha$ pour la valeur 1 est

$$\left[Z_n-\frac{\Phi^{-1}(1-\alpha/2)}{\sqrt{n}},Z_n+\frac{\Phi^{-1}(1-\alpha/2)}{\sqrt{n}}\right]$$

et le test consistant à rejeter H_0 ssi 1 n'est pas dans cet intervalle est de niveau asymptotique α, ce qui revient à dire que l'on rejette H_0 ssi

$$|Z_n-1|>\frac{\Phi^{-1}(1-\alpha/2)}{\sqrt{n}}.$$

Remarque : comme dans l'exemple du Pile ou Face vu en cours, on peut noter que l'intervalle de confiance n'a en soi aucun intérêt (un intervalle de confiance de longueur minimale, i.e. 0, et de niveau de confiance maximale, i.e. 100%, est tout simplement $\{1\}$), mais que le test qui en découle est, lui, pertinent.

Exercice 5

1. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{X_{(n)}}(x) = \mathbb{P}\big(X_{(n)} \le x\big) \quad = \quad \big(\mathbb{P}(X_1 \le x)\big)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{2}{\theta^2}\int_0^x s ds\right)^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^{2n} & \text{si } 0 \le x \le \theta \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, la fonction de répartition de $X_{(n)}$ est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. La loi de $X_{(n)}$ est donc absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Une densité est donnée par la dérivée (p.p.) de cette fonction de répartition, c'est-à-dire,

$$f_{X_{(n)}}(x) \quad = \quad \frac{2nx^{2n-1}}{\theta^{2n}}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x).$$

(b) On calcule :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(X_{(n)}\big) &= \int_0^\theta s\frac{2ns^{2n-1}}{\theta^{2n}}ds = \frac{2n}{2n+1}\theta; \\ \mathbb{E}\big(X_{(n)}^2\big) &= \int_0^\theta s^2\frac{2ns^{2n-1}}{\theta^{2n}}ds = \frac{2n}{2n+2}\theta^2; \\ \mathrm{Var}\big(X_{(n)}\big) &= \frac{2n}{2n+2}\theta^2 - \left(\frac{2n}{2n+1}\theta\right)^2 = \frac{2n\big((2n+1)^2 - 2n(2n+2)\big)}{(2n+2)(2n+1)^2}\theta^2 \\ &= \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}\theta^2. \end{aligned}$$

(c) Comme $X_{(n)}$ est à valeurs dans $[0,\theta]$, on a $X_{(n)} \le \theta$ *p.s.* Ainsi, Pour tout $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(|X_{(n)} - \theta| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\theta - X_{(n)} > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(X_{(n)} < \theta - \epsilon\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon > \theta \\ \frac{(\theta-\varepsilon)^{2n}}{\theta^{2n}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans tous les cas $\mathbb{P}\left(|X_{(n)} - \theta| > \epsilon\right) \to 0$ quel que soit $\epsilon > 0$, ce qui prouve que $X_{(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$.

(d) Pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(|X_{(n)} - \theta| > \epsilon\right) = r^n$ avec $r \in [0,1[$. Ainsi $\sum_{n\ge1}\mathbb{P}\left(|X_{(n)} - \theta| > \epsilon\right) < \infty$ et par le Lemme de Borel-Cantelli, $X_{(n)} \xrightarrow{\text{p.s.}} \theta$.

2. Les X_i sont des v.a. bornées, elles sont donc intégrables. Leur moment d'ordre 1 est

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta x^2dx = \frac{2\theta^3}{3\theta^2} = \frac{2\theta}{3}.$$

On peut donc appliquer la LFGN (X_i i.i.d.) et on obtient $\overline{X}_n \xrightarrow{p.s.} 2\theta/3$. Comme $3\overline{X}_n/2 \xrightarrow{p.s.} \theta$, alors $3\overline{X}_n/2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ et la suite de v.a. $3\overline{X}_n/2$ est un estimateur consistant de θ.

3. Pour comparer plus précisément les estimateurs $X_{(n)}$ et $3\overline{X}_n/2$, on va calculer leurs risques quadratiques. D'une part, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(3\overline{X}_n/2\big) &= \frac{3}{2}\mathbb{E}\big(X_1\big) = \theta. \\ \mathrm{Var}\big(3\overline{X}_n/2\big) &= \frac{9}{4}\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{9}{4}\frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1) = \frac{9}{4n}\left(\frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta x^3dx - \left(\frac{2\theta}{3}\right)^2\right) \\ &= \frac{9}{4n}\left(\frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta x^3dx - \left(\frac{2\theta}{3}\right)^2\right) = \frac{9}{4n}\left(\frac{2\theta^4}{4\theta^2} - \frac{4\theta^2}{9}\right) = \frac{9}{4n}\left(\theta^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right)\right) \\ &= \frac{\theta^2}{8n}, \end{aligned}$$

donc $R(3\overline{X}_n/2,\theta) = \frac{\theta^2}{8n}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} R(X_{(n)},\theta) &= \left(\mathbb{E}(X_{(n)})-\theta\right)^2 + \mathrm{Var}(X_{(n)}) = \left(\frac{2n}{2n+1}\theta-\theta\right)^2 + \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}\theta^2 \\ &= \frac{\theta^2}{(n+1)(2n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\theta^2}{2n^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $\theta > 0$, on a $R(X_{(n)},\theta)/R(3\overline{X}_n/2,\theta) = \frac{8n}{(n+1)(2n+1)}$, l'estimateur $X_{(n)}$ est donc préférable à $3\overline{X}_n/2$ au sens du risque quadratique dès que $n \geq 3$.

4. On construit un IC *non-asymptotique* pour θ à partir de l'estimateur $X_{(n)}$ (le meilleur au sens du risque quadratique). Rassemblons ce que nous savons de $X_{(n)}$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(0 \leq X_{(n)}\right) = 1, \\ &\mathbb{P}\left(X_{(n)} \leq \theta\right) = 1, \\ &\forall x \in [0,\theta] : \mathbb{P}\left(X_{(n)} \leq x\right) = \frac{x^{2n}}{\theta^{2n}}. \end{aligned}$$

Première option On cherche $c_\alpha \geq 0$ et $d_\alpha \geq 0$, ainsi qu'un intervalle de la forme

$$\left[X_{(n)} - c_\alpha, X_{(n)} + d_\alpha\right],$$

tels que

$$\mathbb{P}\left(\theta \in \left[X_{(n)} - c_\alpha, X_{(n)} + d_\alpha\right]\right) = 1-\alpha. \tag{1}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\theta \in \left[X_{(n)} - c_\alpha, X_{(n)} + d_\alpha\right]\right) &= \mathbb{P}\left(\theta - d_\alpha \leq X_{(n)} \leq \theta + c_\alpha\right) \\ &= F_{X_{(n)}}(\theta + c_\alpha) - F_{X_{(n)}}(\theta - d_\alpha) \\ &= 1 - \left(\frac{\theta - d_\alpha}{\theta}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Il suffit donc que $d_\alpha = \theta\left(1-\alpha^{1/2n}\right)$ pour avoir l'égalité (1). Par ailleurs, la valeur de c_α n'importe pas tant que $c_\alpha \geq 0$. Puisque l'on désire un intervalle de confiance le plus court possible, on peut prendre $c_\alpha = 0$. Ainsi, l'intervalle recherché devient :

$$\left[X_{(n)} - c_\alpha, X_{(n)} + d_\alpha\right], = \left[X_{(n)}, X_{(n)} + \theta\left(1-\alpha^{1/2n}\right)\right],$$

qui n'est pas un intervalle de confiance puisque la borne de droite dépend de θ. Toutefois,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\theta \in \left[X_{(n)}, X_{(n)} + \theta\left(1-\alpha^{1/2n}\right)\right]\right) &= \mathbb{P}\left(X_{(n)} \leq \theta \leq X_{(n)} + \theta\left(1-\alpha^{1/2n}\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_{(n)} \leq \theta \leq X_{(n)}\alpha^{-1/2n}\right). \end{aligned}$$

On obtient donc l'intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour θ :

$$\left[X_{(n)}, X_{(n)}\alpha^{-1/2n}\right].$$

Remarque : On aurait obtenu directement ce résultat en cherchant un intervalle de la forme $\left[X_{(n)}c_\alpha, X_{(n)}d_\alpha\right]$, avec $c_\alpha \in [0,1]$ et $d_\alpha \geq 1$. Il faut laisser parler son expérience !

Deuxième option

$$\forall x \in [0,\theta] : \mathbb{P}\left(x \le X_{(n)} \le \theta\right) = 1 - \frac{x^{2n}}{\theta^{2n}}.$$

Ainsi, pour $\alpha \in]0,1[$, en choisissant $x = \theta\alpha^{1/(2n)}$, on obtient $x \in]0,\theta[$, puis :

$$\mathbb{P}\left(\theta\alpha^{1/(2n)} \le X_{(n)} \le \theta\right) = 1 - \alpha.$$

En réordonnant les inégalités, on en déduit :

$$\mathbb{P}\left(X_{(n)} \le \theta \le X_{(n)}\alpha^{-1/(2n)}\right) = 1 - \alpha,$$

d'où un intervalle de confiance pour θ de niveau $1-\alpha$ donné par $\left[X_{(n)}, X_{(n)}\alpha^{-1/(2n)}\right]$.

5. A partir de l'IC précédent, on peut construire un test de niveau α pour l'hypothèse $H_0 : \theta = 1$. La règle de décision est la suivante : on rejette H_0 si $1 \notin [X_{(n)}, X_{(n)}\alpha^{-1/(2n)}]$, on accepte H_0 sinon. Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{on rejette } H_0 &\iff 1 < X_{(n)} \text{ ou } X_{(n)}\alpha^{-1/(2n)} < 1 \\ &\iff 1 < X_{(n)} \text{ ou } (X_{(n)})^{2n} < \alpha. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour une réalisation $x_{(20)}$ de $X_{(n)}$ (pour $n = 20$), la p-valeur vaut

$$\alpha_0 = \inf\left\{\alpha \in]0,1[\,:\, 1 < x_{(20)} \text{ ou } (x_{(20)})^{2n} < \alpha\right\} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 < x_{(20)} \\ (x_{(20)})^{2n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dit autrement, $\alpha_0 = (x_{(20)})^{2n}\mathbb{1}_{x_{(20)} \le 1}$. En particulier, si l'on observe $x_{(20)} = 0.85$, on obtient $\alpha_0 = 0.85^{40} \simeq 1.5 10^{-3}$. On rejette donc H_0 au niveau 0.05.

Exercice 6

1. On remarque que la densité est obtenue par translation : $f_\theta(x) = g_\theta(x-\theta)$, où la densité

$$g_\theta(u) = \theta^{-1}e^{-\theta^{-1}u}\mathbb{1}_{u \ge 0}$$

est la densité d'une loi exponentielle de paramètre θ^{-1}. Ainsi $X_i - \theta$ est de loi $\mathcal{E}(1/\theta) = \gamma(1, 1/\theta)$ donc $X_i/\theta - 1 \sim \mathcal{E}(1)$. Ceci peut aussi se vérifier par la formule de transfert : pour toute fonction $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\phi(X_i/\theta - 1)) &= \int_\theta^{+\infty} \phi(x/\theta - 1)\theta^{-1}e^{-(x/\theta - 1)}\,dx \\ &= \int_0^{+\infty} \phi(u)e^{-u}\,du, \end{aligned}$$

où on a utilisé le changement de variable $u = x/\theta - 1$. On reconnaît bien la densité de la loi $\mathcal{E}(1)$.

2. Nous avons pour tout x, comme les X_i sont i.i.d.,

$$\mathbb{P}\big(X_{(1)} \le x\big) = 1 - \mathbb{P}\big(X_{(1)} > x\big) = 1 - \big(\mathbb{P}(X_1 > x)\big)^n,$$

Pour calculer $\mathbb{P}\big(X_1 > x\big)$, on peut faire un calcul direct avec un changement de variable, ou on peut utiliser $X_1/\theta - 1 \sim \mathcal{E}(1)$ comme expliqué à la question 1 :

$$\mathbb{P}\big(X_1 > x\big) = \mathbb{P}\big(X_1/\theta - 1 > x/\theta - 1\big) = \begin{cases} e^{1-x/\theta} & \text{pour } x/\theta - 1 \geq 0 \\ 1 & \text{pour } x/\theta - 1 < 0 \end{cases}$$

Finalement, nous obtenons

$$\mathbb{P}\big(X_{(1)} \leq x\big) = \begin{cases} 1 - e^{n(1-x/\theta)} & \text{pour } x \geq \theta \\ 0 & \text{pour } x < \theta \end{cases}. \tag{2}$$

3. Calculons $\mathbb{E}[(X_{(1)} - \theta)^2]$. Comme la fonction de répartition de $X_{(1)}$ est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, la loi de $X_{(1)}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Une densité est donnée par la dérivée de cette fonction de répartition, puis on peut calculer $\mathbb{E}[(X_{(1)} - \theta)^2]$ par intégration. On propose ici une autre solution, plus rapide et utilisant directement (2) avec une petite astuce classique (Fubini) et la formulation suivante de l'espérance d'une v.a. positive : $\forall Y \geq 0$, $\mathbb{E}[Y] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y > y)dy$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_{(1)} - \theta)^2] &= \int_0^\infty \mathbb{P}((X_{(1)} - \theta)^2 > s)ds = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_{(1)} > \sqrt{s} + \theta)ds \quad (\text{car } X_{(1)} - \theta \geq 0 \text{ p.s.}) \\ &= \int_0^\infty e^{-n\sqrt{s}/\theta} ds = 2(\theta/n)^2 \int_0^\infty u e^{-u} du = 2(\theta/n)^2,\end{aligned}$$

où on a utilisé le changement de variable $u = n\sqrt{s}/\theta$ et l'espérance de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, on a finalement

$$R(X_{(1)}, \theta) = 2(\theta/n)^2$$

et $X_{(1)}$ converge vers θ en moyenne quadratique.

4. Pour construire un intervalle de confiance, rassemblons ce que nous savons sur la variable aléatoire $X_{(1)}$:

$$\begin{aligned}&\forall x \geq \theta : \mathbb{P}\big(X_{(1)} \leq x\big) = 1 - e^{n(1-x/\theta)}, \\ &\mathbb{P}(\theta \leq X_{(1)}) = 1.\end{aligned}$$

On a ainsi pour tout $x \geq \theta$:

$$\mathbb{P}\big(\theta \leq X_{(1)} \leq x\big) = \mathbb{P}\big(X_{(1)} \leq x\big) - \mathbb{P}\big(X_{(1)} \leq \theta\big) = 1 - e^{n(1-x/\theta)}.$$

Pour $\alpha \in]0, 1]$, en choisissant $x = \theta(1 - (\ln \alpha)/n)$, on obtient $x \geq \theta$, puis :

$$\mathbb{P}\big(\theta \leq X_{(1)} \leq \theta(1 - (\ln \alpha)/n)\big) = 1 - \alpha.$$

En réordonnant les inégalités, il vient :

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_{(1)}}{1 - (\ln \alpha)/n} \leq \theta \leq X_{(1)}\right) = 1 - \alpha.$$

Ainsi, un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour θ est donné par $\left[\frac{X_{(1)}}{1-(\ln \alpha)/n}, X_{(1)}\right]$.

Exercice 7

1. Le nombre N_n s'écrit $N_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_i = 0)$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, la v.a. $\mathbb{1}(X_i = 0)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_i = 0)$.

   (a) En supposant les X_i i.i.d., on sait alors que N_n suit une loi $\mathcal{B}(n, \mathbb{P}(X = 0))$. On en déduit que $\mathbb{E}(N_n/n) = \mathbb{P}(X = 0)$ donc que $\widehat{p}_1 = N_n/n$ est un estimateur sans biais de $\mathbb{P}(X = 0)$. Son risque quadratique est alors égal à sa variance :

   $$R(\widehat{p}_1, \mathbb{P}(X = 0)) = \mathrm{Var}(\widehat{p}_1) = (1/n)\mathbb{P}(X = 0)(1 - \mathbb{P}(X = 0)).$$

   Par ailleurs, la suite N_n/n (X_i i.i.d. et de carré intégrable) satisfait le TCL :

   $$\sqrt{n}\frac{N_n/n - \mathbb{P}(X = 0)}{\sqrt{\mathbb{P}(X = 0)(1 - \mathbb{P}(X = 0))}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

   (b) Une première solution consiste à adopter une démarche asymptotique : on utilise la convergence précédente, la LFGN $N_n/n \overset{p.s.}{\to} \mathbb{P}(X = 0)$, et le théorème de Slutsky pour obtenir :

   $$\sqrt{n}\frac{N_n/n - \mathbb{P}(X = 0)}{\sqrt{N_n/n(1 - N_n/n)}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

   On calcule alors facilement l'IC asymptotique de niveau $1 - \alpha$:

   $$\mathbb{P}\Big(N_n/n - \epsilon_n \leq \mathbb{P}(X = 0) \leq N_n/n + \epsilon_n\Big) \to 1 - \alpha$$

   pour

   $$\epsilon_n = \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha/2)\sqrt{N_n/n(1 - N_n/n)}}{\sqrt{n}}$$

   Une deuxième solution est de construire un IC en utilisant l'inégalité de Hoeffding :

   $$\mathbb{P}(|N_n/n - \mathbb{P}(X = 0)| \geq x) \leq 2e^{-2nx^2},$$

   ce qui donne l'intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$

   $$\left[N_n/n - \sqrt{\frac{1}{2n}\ln(2/\alpha)}, N_n/n + \sqrt{\frac{1}{2n}\ln(2/\alpha)}\right].$$

2. (a) On utilise la fonction caractéristique d'une loi de Poisson. A savoir,

   $$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[e^{itY_1}\right] = \exp(\lambda_1(e^{it} - 1)) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left[e^{itY_2}\right] = \exp(\lambda_2(e^{it} - 1)), \\ \Longrightarrow\ &\mathbb{E}\left[e^{it(Y_1+Y_2)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itY_1}e^{itY_2}\right] \overset{(\perp\!\!\!\perp)}{=} \mathbb{E}\left[e^{itY_1}\right]\mathbb{E}\left[e^{itY_2}\right] = \exp((\lambda_1 + \lambda_2)(e^{it} - 1)), \end{aligned}$$

   où l'on reconnaît la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

   (b) Il estime λ par $\overline{X}_n$ puis $\exp(-\lambda)$ par $\widehat{p}_2 = \exp(-\overline{X}_n)$. La LFGN nous indique que $\overline{X}_n \overset{p.s.}{\to} \lambda$ et, en composant par la fonction $x \mapsto \exp(-x)$ (continue), on obtient $\widehat{p}_2 = \exp(-\overline{X}_n) \overset{p.s.}{\to} \exp(-\lambda) = \mathbb{P}(X = 0)$.

   Pour calculer le biais et la variance de $\widehat{p}_2$, il faut calculer sa loi (car on ne peut pas se servir de la linéarité ou bilinéarité). En passant par les fonctions caractéristiques, nous savons que la somme de deux v.a. indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$ est une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$. Par récurrence, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}(n\lambda)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\widehat{p}_2) &= \mathbb{E}(\exp(-\overline{X}_n)) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-k/n) \frac{(n\lambda)^k \exp(-n\lambda)}{k!} \\ &= \exp(-n\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{-1/n} n\lambda)^k}{k!} \\ &= \exp(-\lambda n(1-e^{-1/n})) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-\lambda).\end{aligned}$$

Le biais de $\widehat{p}_2$ est donc

$$\mathbb{E}(\widehat{p}_2) - e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\left(\exp\{-\lambda(n(1-e^{-1/n})-1)\} - 1\right),$$

qui est non nul car $1-e^{-1/n} \neq 1/n$. Comme $n(1-e^{-1/n}) - 1 = -1/(2n) + o(1/n)$, l'équivalent asymptotique du biais est donné par

$$\mathbb{E}(\widehat{p}_2) - e^{-\lambda} \sim e^{-\lambda} \frac{\lambda}{2n}.$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\widehat{p}_2^2) &= \mathbb{E}(\exp(-2\overline{X}_n)) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-2k/n) \frac{(n\lambda)^k \exp(-n\lambda)}{k!} \\ &= \exp(-\lambda n(1-e^{-2/n})) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-2\lambda).\end{aligned}$$

Sa variance est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\widehat{p}_2) &= \mathbb{E}(\widehat{p}_2^2) - \mathbb{E}(\widehat{p}_2)^2 = \exp(-\lambda n(1-e^{-2/n})) - \exp(-2\lambda n(1-e^{-1/n})) \\ &= \exp(-2\lambda)\left(\Big[\exp(2\lambda/n + o(1/n)) - 1\Big] - \Big[\exp(\lambda/n + o(1/n)) - 1\Big]\right) \\ &= \exp(-2\lambda)\left(\Big[1 + \frac{2\lambda}{n} + o(1/n) - 1\Big] - \Big[1 + \frac{\lambda}{n} + o(1/n) - 1\Big]\right) \\ &\underset{\infty}{\sim} e^{-2\lambda}\frac{\lambda}{n}.\end{aligned}$$

(c) Le risque quadratique de $\widehat{p}_2$ est d'après ce qui précède :

$$R(\widehat{p}_2, \exp(-\lambda)) = \mathrm{Var}(\widehat{p}_2) + (\mathbb{E}(\widehat{p}_2) - e^{-\lambda})^2 \underset{\infty}{\sim} e^{-2\lambda}\frac{\lambda}{n}.$$

Le risque quadratique de $\widehat{p}_1$ est

$$R(\widehat{p}_1, e^{-\lambda}) = \frac{e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})}{n}.$$

Ainsi,

$$\frac{R(\widehat{p}_1, e^{-\lambda})}{R(\widehat{p}_2, e^{-\lambda})} \underset{\infty}{\sim} \frac{e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})}{\lambda e^{-2\lambda}} = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda e^{-\lambda}}.$$

On peut montrer que pour tout $\lambda > 0$, $1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} > 0$ par une étude de fonction, ce qui indique que $\widehat{p}_2$ est meilleur que $\widehat{p}_1$ au sens du risque quadratique. Il faut cependant noter que $\widehat{p}_1$ ne suppose aucune connaissance sur la loi des X_i, tandis que $\widehat{p}_2$ suppose et exploite le fait que les X_i sont des variables de Poisson.