Correction du TD 3

Exercice 1

1. (a) Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}\left[(X_1 - t)^2\right]$. Pour tout t, $f(t) = t^2 - 2\mathbb{E}(X_1)t + E(X_1^2)$ est un trinôme en t strictement convexe. Il admet donc un unique minimum là où sa dérivée s'annule : $f'(t) = 2t - 2\mathbb{E}(X_1) = 0 \Leftrightarrow t = \mathbb{E}(X_1)$.

   (b) De la même manière que précédemment, $t \in \mathbb{R} \mapsto t^2 - 2\left(n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i\right)t + n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2$ admet un unique minimum en son point critique qui est $t = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}_n$.

2. Rappelons que pour toute v.a. $Z \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Z > z)\,\mathrm{d}z,$$

car l'égalité de Fubini donne

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(Z > z)\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Z>z}\right]\,\mathrm{d}z = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{Z>z}\,\mathrm{d}z\right] = \mathbb{E}[Z].$$

   (a) En utilisant l'égalité ci-dessus pour $Z = |X_1 - t|$ et en remarquant que

$$\mathbb{P}(|X_1 - t| > z) \quad = \quad \mathbb{P}\{X_1 - t > z\} + \mathbb{P}\{t - X_1 > z\},$$

   on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|X_1 - t|\right) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_1 - t| > z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_1 - t > z)\,\mathrm{d}z + \int_0^\infty \mathbb{P}(t - X_1 > z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^\infty (1 - F(z+t))\,\mathrm{d}z + \int_0^\infty F(t-z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_t^\infty (1 - F(u))\,\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^t F(u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

   Rappelons que les deux intégrales sont finies pour tout réel t. Étudions la seconde : on peut donc écrire

$$\int_{-\infty}^t F(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^0 F(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^t F(u)\,\mathrm{d}u = C + \int_0^t F(u)\,\mathrm{d}u,$$

   où $C = \int_{-\infty}^0 F(u)\,\mathrm{d}u$ est une constante. Comme F est continue, elle admet une primitive Φ, qui est donc de classe C^1 et vérifie

$$\int_{-\infty}^t F(u)\,\mathrm{d}u = C + \Phi(t) - \Phi(0).$$

Par conséquent, la seconde intégrale, vue comme une fonction de t, est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{-\infty}^{t} F(u)\,\mathrm{d}u\right) = \Phi'(t) = F(t).$$

Un raisonnement similaire donne

$$\int_{t}^{+\infty} (1-F(u))\;\mathrm{d}u = \int_{0}^{+\infty} (1-F(u))\;\mathrm{d}u - \int_{0}^{t} (1-F(u))\;\mathrm{d}u = C' - t + \Phi(t) - \Phi(0),$$

avec $C' = \int_0^{+\infty} (1-F(u))\;\mathrm{d}u$ est une constante, si bien que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{t}^{+\infty} (1-F(u))\;\mathrm{d}u\right) = F(t) - 1.$$

Au total, la fonction $t \mapsto \mathbb{E}\left[|X_1 - t|\right]$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}\left[|X_1 - t|\right] = 2F(t) - 1.$$

Par suite, comme F est une bijection strictement croissante d'un voisinage de $x_{1/2}$ dans un voisinage de $1/2$, on a

$$2F(t) - 1 > 0 \Leftrightarrow t > x_{1/2} \text{ et } 2F(t) - 1 < 0 \Leftrightarrow t < x_{1/2}$$

donc la fonction $t \mapsto \mathbb{E}|X_1 - t|$ atteint son unique minimum en $t = x_{1/2}$.

(b) La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i - t|$ est affine par morceaux et sa pente change à chaque X_i. En ordonnant les X_i de la façon suivante

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)},$$

et en notant $X_{(0)} = -\infty$ et $X_{(n+1)} = +\infty$, on remarque que la pente de la fonction g vaut $-n/n$ sur $]-\infty, X_{(1)}[$, $-(n-2)/n$ sur $[X_{(1)}, X_{(2)}[$, etc, puis $(n-2)/n$ sur $[X_{(n-1)}, X_{(n)}[$ et n/n sur $[X_{(n)}, \infty[$. Autrement dit, la pente vaut $(2(k-1)-n)/n$ sur l'intervalle $[X_{(k-1)}, X_{(k)}[$ (en excluant $X_{(0)}$ pour $k=1$). Ainsi, de deux choses l'une :

- si n est pair, la pente de g va s'annuler sur un intervalle, correspondant à $[X_{(n/2)}, X_{(n/2+1)}]$. Donc la fonction g est minimale sur l'intervalle $[X_{(n/2)}, X_{(n/2+1)}]$ (l'argmin est alors un intervalle).
- Si n est impair, la pente de g ne va pas s'annuler et cette fonction atteint son unique minimum en $X_{((n+1)/2)}$.

Cependant, puisque la médiane empirique est définie de façon unique par $X_{((n+1)/2)}$ si n est impair et $X_{(n/2)}$ si n est pair, elle minimise dans tous les cas la fonction g (c'est la plus petite valeur minimisant g).

Exercice 2

1. Par symétrie, on a $X \sim -X$ donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(-X)$ ce qui donne $\mathbb{E}(X) = 0$. Ainsi, $\mathbb{E}_\theta(X_1) = \theta + \mathbb{E}(X) = \theta$.
2. Comme X est symétrique, on a $\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X \leq 0)$, i.e. puisque F est continue : $1 - F(0) = F(0)$, donc $F(0) = 1/2$. Comme F est strictement croissante sur un voisinage de 0, la médiane de la loi de X est donc égale à 0.

   A présent, on a $F_\theta(\theta) = F(\theta - \theta) = F(0) = 1/2$ donc comme F_θ est strictement croissante sur un voisinage de θ, on a $\theta = F_\theta^{-1}(\frac{1}{2})$.

3. Dans les trois questions suivantes, la loi de X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, qui est paire, continue et strictement positive en 0. Ainsi, F est continue sur $\mathbb{R}$ et est strictement croissante au voisinage de 0, et la loi associée est symétrique. D'après 1) et 2), les X_i ont donc pour espérance et médiane θ.
   (a) On suppose que F est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On a par le TCL :
   $$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$
   Par ailleurs, comme la fonction F_θ est dérivable en θ avec une dérivée égale à $f_\theta(\theta) = f(0) = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2} > 0$, le théorème de convergence en loi des quantiles empiriques nous donne, dans ce cas :
   $$\sqrt{n}(F_n^{-1}(1/2) - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-2}}\right) = \mathcal{N}(0, \pi\sigma^2/2).$$
   La moyenne empirique est donc un meilleur estimateur que la médiane empirique, et ce quel que soit σ.
   (b) On a $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) = 1/5$. On a par le TCL :
   $$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1/5).$$
   Comme la fonction F_θ est dérivable en θ avec une dérivée égale à $f_\theta(\theta) = f(0) = 3/4 > 0$, le théorème de convergence en loi des quantiles empiriques nous donne, dans ce cas :
   $$\sqrt{n}(F_n^{-1}(1/2) - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\frac{1}{(3/4)^2}\right) = \mathcal{N}(0, 4/9).$$
   La moyenne empirique est donc meilleur que la médiane empirique.
   (c) Si X a pour densité $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ (loi de Laplace), on a
   $$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}_+} x^2 \exp(-x)dx = \Gamma(3) = 2.$$
   On a par le TCL :
   $$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 2).$$
   Comme la fonction F_θ est dérivable en θ avec une dérivée égale à $f_\theta(\theta) = f(0) = 1/2 > 0$, le théorème de convergence en loi des quantiles empiriques nous donne, dans ce cas :
   $$\sqrt{n}(F_n^{-1}(1/2) - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\frac{1}{(1/2)^2}\right) = \mathcal{N}(0, 1).$$
   La médiane empirique est donc meilleure que la moyenne empirique.

Exercice 3

1. Puisque $\mathbb{E}_\theta(X_1) = \theta/2$, un estimateur de θ par la méthode des moments est donné par $\widehat{\theta}_1 = 2\overline{X}_n$.
2. Concernant $\widehat{\theta}_2$, la f.d.r. de la loi $U[0, \theta]$ s'écrit : $F(x) = \frac{x}{\theta}$ pour $x \in [0, \theta]$. Ainsi, $\forall x \in [0, 1]$, $F(\theta x) = x$ et $F^{-1}(u) = \theta u$. La médiane de la loi $U[0, \theta]$ est donc définie par : $F^{-1}(1/2) = \theta/2$. On peut définir l'estimateur $\widehat{\theta}_2 = 2F_n^{-1}(1/2)$, où F_n est la f.d.r. empirique de l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$. Puisque F_θ est strictement croissante en $\theta/2$, alors par le théorème de convergence des quantiles empiriques, $F_n^{-1}(1/2) \xrightarrow{p.s.} \theta/2$, donc $\widehat{\theta}_2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ et $\widehat{\theta}_2$ est un estimateur (fortement) consistant de θ.

Concernant $\widehat{\theta}_3$, sa fonction de répartition s'écrit :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} : F_{\widehat{\theta}_3}(x) &= \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq x\right) \\
&= (\mathbb{P}(X_1 \leq x))^n \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n/\theta^n & \text{si } x \in [0,\theta] \\ 1 & \text{sinon.} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

De plus $\widehat{\theta}_3 \leq \theta$ p.s., donc nous avons :

$$\begin{aligned}
\forall \epsilon > 0 : \mathbb{P}\left(|\widehat{\theta}_3 - \theta| > \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\theta - \widehat{\theta}_3 > \epsilon\right) \\
&= F_{\widehat{\theta}_3}(\theta - \epsilon) \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \epsilon > \theta \\ (\theta-\epsilon)^n/\theta^n & \text{sinon} \end{array} \right. \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Autrement dit, $\widehat{\theta}_3 \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ et $\widehat{\theta}_3$ est un estimateur consistant de θ. À l'instar de $\widehat{\theta}_2$, $\widehat{\theta}_3$ est aussi fortement consistant par application du Lemme de Borel-Cantelli, puisque pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(|\widehat{\theta}_3 - \theta| > \epsilon\right) = r^n$ avec $r \in [0, 1[$, donc $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|\widehat{\theta}_n 3 - \theta| > \epsilon\right) < \infty$.

3. Pour la convergence de $\widehat{\theta}_1$, le TCL nous indique que :

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_1 - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 4\operatorname{Var}_\theta(X)) = \mathcal{N}(0, \theta^2/3).$$

Concernant la convergence de $\widehat{\theta}_2$, F est continue sur $[0,\theta]$, donc dérivable sur cet intervalle, de dérivée $f(x) = \theta^{-1}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$. D'où, $f(\theta/2) = \theta^{-1} > 0$. Ainsi, par le théorème de convergence en loi des quantiles empiriques :

$$\sqrt{n}(F_n^{-1}(1/2) - \theta/2) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1/2(1-1/2)}{\theta^{-2}}\right) = \mathcal{N}(0, \theta^2/4).$$

On obtient donc par la delta méthode :

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_2 - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \theta^2).$$

On considère finalement la convergence de $\widehat{\theta}_3$. Puisqu'il n'y a pas de théorème central limite pour $\widehat{\theta}_3$, nous allons étudier la convergence simple de la fonction de répartition de $n(\theta - \widehat{\theta}_3)$ (le choix de n plutôt que $\sqrt{n}$ ainsi que $\theta - \widehat{\theta}_3$ plutôt que $\widehat{\theta}_3 - \theta$ se détermine par analyse et synthèse) :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\left(n(\theta - \widehat{\theta}_3) \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(\widehat{\theta}_3 \geq \theta - \frac{x}{n}\right) \\
&= 1 - F_{\widehat{\theta}_3}\left(\theta - \frac{x}{n}\right) \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \geq n\theta \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0, n\theta] \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)\right) \quad \text{et} \quad n\ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right) \sim -\frac{nx}{n\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{x}{\theta},$$

$\mathbb{1}_{[0,n\theta]}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $\mathbb{1}_{[n\theta,+\infty]}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\left(n(\theta - \widehat{\theta}_3) \leq x\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 - \exp\left(-\dfrac{x}{\theta}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit,

$$n(\theta - \widehat{\theta}_3) \rightsquigarrow \mathcal{E}(1/\theta).$$

Ainsi, les estimateurs $\widehat{\theta}_1$ et $\widehat{\theta}_2$ sont asymptotiquement normaux, ce qui n'est pas le cas de $\widehat{\theta}_3$. Pour finir sur les propriétés de convergence de ces trois estimateurs, on peut invoquer le corollaire 2 du cours indiquant que lorsqu'il existe un réel a et une suite (v_n) de réels tendant vers $+\infty$ tels que

$$v_n(X_n - a) \rightsquigarrow X,$$

alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$. Ainsi, les estimateurs $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ et $\widehat{\theta}_3$ sont consistants (ils convergent en probabilité vers θ).

4. $\widehat{\theta}_3$ converge à la vitesse $1/n$ alors que $\widehat{\theta}_1$ et $\widehat{\theta}_2$ convergent à la vitesse $1/\sqrt{n}$. On préfère donc $\widehat{\theta}_3$. Par ailleurs, $\widehat{\theta}_1$ a une plus petite variance asymptotique que $\widehat{\theta}_2$, on le préfère donc à $\widehat{\theta}_2$. Mais il faut vraiment utiliser $\widehat{\theta}_3$!
5. Pour déterminer un IC, on utilise le *meilleur* estimateur de θ, à savoir $\widehat{\theta}_3$. On sait que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\widehat{\theta}_3 \leq \theta\right) = 1, \\ &\forall x \in [0,\theta], \mathbb{P}\left(\widehat{\theta}_3 \leq x\right) = \frac{x^n}{\theta^n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in [0,\theta], \mathbb{P}\left(x \leq \widehat{\theta}_3 \leq \theta\right) = 1 - \frac{x^n}{\theta^n}.$$

Donc, pour $\alpha \in [0,1]$, en choisissant $x = \theta\alpha^{1/n}$, on obtient $x \in [0,\theta]$, puis :

$$\mathbb{P}\left(\theta\alpha^{1/n} \leq \widehat{\theta}_3 \leq \theta\right) = 1 - \alpha,$$

i.e.

$$\mathbb{P}\left(\widehat{\theta}_3 \leq \theta \leq \alpha^{-1/n}\widehat{\theta}_3\right) = 1 - \alpha.$$

En conséquence, un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour θ est donné par $\left[\widehat{\theta}_3, \alpha^{-1/n}\widehat{\theta}_3\right]$.

Exercice 4

1. Notons $f(x_{1/2})$ la dérivée de F en $x_{1/2}$. Par hypothèse $f(x_{1/2}) > 0$, et l'on a

$$\sqrt{n}(x_{1/2}(n) - x_{1/2}) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4f(x_{1/2})^2}\right).$$

Cependant

$$I = \left[x_{1/2}(n) - \frac{\Phi^{-1}(1-\alpha/2)}{2f(x_{1/2})\sqrt{n}} \ ; \ x_{1/2}(n) + \frac{\Phi^{-1}(1-\alpha/2)}{2f(x_{1/2})\sqrt{n}}\right]$$

ne constitue pas un intervalle de confiance valide car f est inconnue ! Il faut donc faire autre chose. On va voir qu'on peut en fait s'en sortir même sans supposer F dérivable en sa médiane !

2. L'astuce est de déterminer un intervalle de fluctuation pour $F_n(x_{1/2})$ et d'« inverser »F_n en remarquant que, pour tout ω, $x \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i(\omega)\leq x}$ est la fonction de répartition d'une loi discrète, donc par la relation du cours sur l'inverse généralisée, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$:
$$F_n(x) \geq q \iff x \geq F_n^{-1}(q).$$
Par contraposée, il vient pour tout $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$:
$$q_1 \leq F_n(x) < q_2 \iff F_n^{-1}(q_1) \leq x < F_n^{-1}(q_2). \tag{1}$$
Comme F est continue sur $\mathbb{R}$, on a $F(x_{1/2}) = 1/2$, et le TCL vu en cours donne
$$\sqrt{n}(F_n(x_{1/2}) - F(x_{1/2})) = \sqrt{n}(F_n(x_{1/2}) - 1/2) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1/4)$$
3. Si $q_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, on a alors :
$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} - \frac{q_\alpha}{2\sqrt{n}} \leq F_n(x_{1/2}) < \frac{1}{2} + \frac{q_\alpha}{2\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha.$$
Grâce à (1), ceci fournit directement un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\alpha$ pour $x_{1/2}$:
$$J = \left[F_n^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{q_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)\ ;\ F_n^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{q_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)\right[.$$
On peut remarquer que puisque
$$\left\{\frac{1}{2} - \frac{q_\alpha}{2\sqrt{n}} \leq F_n(x_{1/2}) < \frac{1}{2} + \frac{q_\alpha}{2\sqrt{n}}\right\} \subset \left\{\frac{1}{2} - \frac{q_\alpha}{2\sqrt{n}} \leq F_n(x_{1/2}) \leq \frac{1}{2} + \frac{q_\alpha}{2\sqrt{n}}\right\},$$
l'intervalle
$$J' = \left[F_n^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{q_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)\ ;\ F_n^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{q_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)\right]$$
est un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\alpha$ par excès pour $x_{1/2}$.
4. Par ce qui précède, et en utilisant le fait que $\Phi^{-1}(97,5/100) \leq 2$, un intervalle de confiance pour la médiane est donné par
$$\left[F_n^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ ;\ F_n^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$
En se rappelant que pour tout $p \in [0,1]$, $x_p(n) = X_{(\lceil np \rceil)}$, et en prenant $n = 10^4$, on obtient l'intervalle de confiance pour la médiane $\left[X_{(4900)}, X_{(5100)}\right]$.

Exercice 5 Soit $\theta > 0$ un paramètre inconnu. On considère la densité f_θ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ définie par
$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta}(\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x) + \mathbf{1}_{[2\theta,3\theta]}(x)).$$
Dans toute la suite, on suppose disposer de n observations i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ de densité f_θ.

1. On voit facilement que $\mathbb{E}[X_1] = 3\theta/2$ et
$$\mathbb{E}[X_1^2] = \frac{1}{2\theta}\left(\int_0^\theta x^2 dx + \int_{2\theta}^{3\theta} x^2 dx\right) = \frac{10\theta^2}{3} \implies \mathrm{Var}(X_1) = \frac{13\theta^2}{12}.$$
On déduit de la loi des grands nombres que $\widehat{\theta}_{M,n} = 2\overline{X}_n/3$ est un estimateur consistant de θ. Le théorème central limite et la méthode Delta assurent quant à eux que
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{M,n} - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 13\theta^2/27).$$

2. La fonction de répartition de X_1 vaut

$$F_\theta(x) = \frac{x}{2\theta}\mathbf{1}_{[0,\theta[}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[\theta,2\theta[}(x) + \left(\frac{x}{2\theta} - \frac{1}{2}\right)\mathbf{1}_{[2\theta,3\theta[}(x) + \mathbf{1}_{[3\theta,+\infty[}(x).$$

3. Le premier quartile vaut $q = x_{1/4} = \theta/2$, point où F_θ est strictement croissante et dérivable, de dérivée $f_\theta(\theta/2) = 1/(2\theta)$. En notant $x_{1/4}(n)$ le premier quartile empirique, on en déduit que $\widehat{\theta}_{q,n} = 2x_{1/4}(n)$ est un estimateur consistant pour θ, et asymptotiquement normal avec

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{q,n} - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 3\theta^2).$$

4. Du troisième quartile $Q = x_{3/4} = 5\theta/2$, on déduit comme ci-dessus que $\widehat{\theta}_{Q,n} = 2x_{3/4}(n)/5$ est un estimateur consistant pour θ, et asymptotiquement normal avec

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{Q,n} - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 3\theta^2/25).$$

5. Parmi $\widehat{\theta}_{M,n}$, $\widehat{\theta}_{q,n}$, $\widehat{\theta}_{Q,n}$, on choisit celui ayant la plus petite variance asymptotique, i.e. $\widehat{\theta}_{Q,n}$.
6. Soit $X_{(n)} = \max_{1\leq i\leq n} X_i$. Si $0 < x < \theta$, alors $2\theta < 3\theta - x < 3\theta$ et le calcul précédent de F_θ donne

$$\mathbb{P}(X_{(n)} \leq 3\theta - x) = (F_\theta(3\theta - x))^n = \left(1 - \frac{x}{2\theta}\right)^n.$$

Si on pose $\widehat{\theta}_{S,n} = X_{(n)}/3$, alors presque sûrement $\widehat{\theta}_{S,n} < \theta$ et pour tout $0 < \varepsilon < \theta/3$, on a

$$\mathbb{P}(|\widehat{\theta}_{S,n} - \theta| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\widehat{\theta}_{S,n} \leq \theta - \varepsilon) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leq 3\theta - 3\varepsilon) = \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\theta}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Autrement dit, $\widehat{\theta}_{S,n}$ est un estimateur consistant de θ.
7. Pour tout $t \geq 0$ fixé, on a $0 \leq t/n < \theta/3$ pour n assez grand donc on peut appliquer le calcul précédent en remplaçant ε par t/n, ce qui donne

$$\mathbb{P}(\widehat{\theta}_{S,n} \leq \theta - t/n) = \left(1 - \frac{3t}{2\theta n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{3t}{2\theta}}.$$

La variable aléatoire $n(\theta - \widehat{\theta}_{S,n})$ est absolument continue, presque sûrement positive et pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(n(\theta - \widehat{\theta}_{S,n}) \leq t) = 1 - \mathbb{P}(\widehat{\theta}_{S,n} \leq \theta - t/n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - e^{-\frac{3t}{2\theta}}.$$

Ceci prouve que la suite de variables aléatoires $(n(\theta - \widehat{\theta}_{S,n}))$ converge en loi vers une variable de loi exponentielle de paramètre $3/(2\theta)$.
8. Les estimateurs $\widehat{\theta}_{M,n}$, $\widehat{\theta}_{q,n}$ et $\widehat{\theta}_{Q,n}$ convergent à vitesse $1/\sqrt{n}$, tandis que $\widehat{\theta}_{S,n}$ converge à vitesse $1/n$. C'est donc ce dernier que l'on choisira asymptotiquement.
9. La médiane de la loi de X_1 est par définition

$$x_{1/2} = F_\theta^{-1}(1/2) = \inf\left\{x \in \mathbb{R},\ F_\theta(x) \geq \frac{1}{2}\right\} = \theta.$$

Puisque F_θ n'est pas strictement croissante en $x_{1/2}$, on ne peut pas appliquer le résultat de convergence de la médiane empirique vers la vraie médiane. La médiane empirique va en fait osciller éternellement entre des valeurs inférieures à θ et des valeurs supérieures à 2θ.

10. Pour trouver un intervalle de confiance bilatère non asymptotique pour θ au niveau $(1-\alpha)$, on peut appliquer une inégalité non asymptotique, de type Tchebychev ou Hoeffding. Par exemple, pour Tchebychev, il suffit d'écrire que pour tout $c > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \frac{3\theta}{2}\right| \geq c\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{nc^2} = \frac{13\theta^2}{12c^2 n} \iff \mathbb{P}\left(\left|\widehat{\theta}_{M,n} - \theta\right| \geq \theta\sqrt{\frac{13}{27\alpha n}}\right) \leq \alpha.$$

Pour tout couple (n, α) tel que $n\alpha > 13/27$, un intervalle de confiance non asymptotique pour θ est donc

$$\left[\frac{\widehat{\theta}_{M,n}}{1+\sqrt{\frac{13}{27\alpha n}}} \; ; \; \frac{\widehat{\theta}_{M,n}}{1-\sqrt{\frac{13}{27\alpha n}}}\right].$$

Si $n\alpha \leq 13/27$, il suffit de remplacer la borne de droite par l'infini.

Exercice 6

On note $P = \gamma(q, \theta)$ la loi de X. Révisez les formules relatives à la loi Gamma dans le TD1 !

1. On suppose $q > 0$ connu et $\theta > 0$ inconnu.
   (a) Comme $\mathbb{E}_P(X) = \frac{q}{\theta}$, on a $\theta = q/\mathbb{E}_P(X)$ et on propose $\widehat{\theta} = q/\overline{X}_n$ comme estimateur empirique de θ (méthode des moments).
   (b) On applique le TCL aux variables X_1, ..., X_n i.i.d. dans L^2 de variance commune q/θ^2 :

   $$\sqrt{n}(\overline{X}_n - q/\theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, q/\theta^2).$$

   Donc en utilisant la delta-méthode,

   $$\sqrt{n}(\overline{X}_n\theta - q) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, q).$$

   Ainsi, en notant $q_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$, les inégalités suivantes sont vraies avec une probabilité tendant vers $1-\alpha$:

   $$\mathbb{P}\left(-\frac{q_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{q} \leq \overline{X}_n\theta - q \leq \frac{q_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{q}\right) \to 1-\alpha$$
   $$\mathbb{P}\left(q-\frac{q_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{q} \leq \overline{X}_n\theta \leq q+\frac{q_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{q}\right) \to 1-\alpha$$
   $$\mathbb{P}\left((q-\frac{q_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{q})(\overline{X}_n)^{-1} \leq \theta \leq (q+\frac{q_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{q})(\overline{X}_n)^{-1}\right) \to 1-\alpha$$

   D'où l'intervalle de confiance pour θ au niveau asymptotique $1-\alpha$:

   $$I = \left[(q-\frac{q_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{q})(\overline{X}_n)^{-1}, \; (q+\frac{q_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{q})(\overline{X}_n)^{-1}\right].$$

   Pour $\alpha = 0.05$, $q = 2$ et $n = 10$, on a $q_\alpha \simeq 1.96$ et l'intervalle I s'approche par

   $$\left[(2-1.96/\sqrt{5})/\overline{X}_n, (2+1.96/\sqrt{5})/\overline{X}_n\right] \simeq [1.12/\overline{X}_n, 2.88/\overline{X}_n].$$

2. On suppose $q > 0$ inconnu et $\theta > 0$ connu.
   (a) Comme $\mathbb{E}_P(X) = \frac{q}{\theta}$, on a $q = \theta\mathbb{E}_P(X)$ et on propose $\widehat{q} = \theta\overline{X}_n$ comme estimateur empirique de q (méthode des moments).

(b) On applique le TCL aux variables X_1, ..., X_n i.i.d. dans L^2 de variance commune q/θ^2 :

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - q/\theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, q/\theta^2).$$

Ainsi, en utilisant la delta-méthode, on obtient la convergence

$$\sqrt{n}(\widehat{q} - q) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, q),$$

donc via Slutsky

$$\sqrt{n}\frac{\widehat{q} - q}{\sqrt{\widehat{q}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

En notant $q_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$, on en déduit un intervalle de confiance pour q au niveau asymptotique $1-\alpha$:

$$I = \left[\widehat{q} - \frac{q_\alpha\sqrt{\widehat{q}}}{\sqrt{n}}\ ,\ \widehat{q} + \frac{q_\alpha\sqrt{\widehat{q}}}{\sqrt{n}}\right].$$

3. On suppose $q > 0$ et $\theta > 0$ inconnus. On cherche deux équations de moments : on a $\mathbb{E}(X) = \frac{q}{\theta}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{q}{\theta^2}$. On a donc

$$\theta = \frac{\mathbb{E}(X)}{\mathrm{Var}(X)} \quad \text{et} \quad q = \frac{(\mathbb{E}(X))^2}{\mathrm{Var}(X)},$$

on propose donc les estimateurs empiriques :

$$\widehat{\theta} = \frac{\overline{X}_n}{\overline{X^2_n} - (\overline{X}_n)^2} \quad \text{et} \quad \widehat{q} = \frac{(\overline{X}_n)^2}{\overline{X^2_n} - (\overline{X}_n)^2}.$$

Comme d'habitude, la LFGN donne $\overline{X}_n \overset{p.s.}{\to} q/\theta$ et $\overline{X^2_n} \overset{p.s.}{\to} q/\theta^2 + (q/\theta)^2$ ce qui montre que les estimateurs sont consistants.

Exercice 7

Ce modèle est le même que celui proposé dans la feuille de TD2. On a $X_1/\theta - 1$ qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

1. Comme $\mathbb{E}_\theta(X_1/\theta - 1) = 1$, on a $\mathbb{E}_\theta X_1 = 2\theta$ donc $\theta = \mathbb{E}_\theta(X_1)/2$ et l'estimateur par la méthode des moments est $\widehat{\theta} = \overline{X}_n/2$.
2. D'après le TCL appliqué aux $Y_i = X_i/\theta - 1$ i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1, nous avons

$$\sqrt{n}(\overline{Y}_n - 1) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

i.e.

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n/\theta - 2) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

soit, par la delta-méthode,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \theta^2/4).$$

Comme $\widehat{\theta} = \overline{X}_n/2$ est sans biais, $\mathbb{E}\left((\widehat{\theta} - \theta)^2\right) = R(\widehat{\theta}, \theta) = \mathrm{Var}(\overline{X}_n/2) = \mathrm{Var}(X_1)/(4n) = \mathrm{Var}(X_1/\theta - 1)\theta^2/(4n) = \theta^2/(4n)$ car la variance de la loi exponentielle de paramètre 1 est 1. Donc $\widehat{\theta}$ converge vers θ en moyenne quadratique (à la vitesse $1/n$). Notez au passage que cela est cohérent avec la variance asymptotique trouvée plus haut.
3. Le risque de $\widehat{\theta}$ est de l'ordre de $1/n$ donc d'ordre beaucoup plus grand que $1/n^2$, qui était l'ordre du risque de l'estimateur $X_{(1)}$ du TD2. Donc on doit ABSOLUMENT préférer $X_{(1)}$ à $\widehat{\theta}$.