

CORRECTION DU TD 9

EXERCICE 1 (Modèle Gamma-Poisson)

1. Notons π la densité de la loi a priori et $\pi(\cdot | \mathbf{X})$ la densité a posteriori. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\pi(\theta | \mathbf{X}) \propto \theta^{p-1} e^{-\lambda\theta} \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta} \theta^{X_i}}{X_i!} \propto \theta^{p+n\bar{X}_n-1} e^{-(n+\lambda)\theta} \mathbb{1}_{\theta>0}.$$

Ainsi la loi a posteriori $\Pi[\cdot | \mathbf{X}]$ est une loi Gamma($p + n\bar{X}_n, n + \lambda$).

2. Un estimateur de Bayes pour Π est donné par l'espérance a posteriori, soit ici

$$T^*(\mathbf{X}) = \frac{p + n\bar{X}_n}{\lambda + n}.$$

3. Pour tout $\theta > 0$, on peut effectuer une décomposition biais-variance, en tenant compte du fait que $\mathbb{E}_\theta[\bar{X}_n] = \theta$ et $\text{Var}_\theta(\bar{X}_n) = \frac{\theta}{n}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\theta, T^*) &= \text{Var}_\theta(T^*) + (\mathbb{E}_\theta[T^*] - \theta)^2 \\ &= \frac{n^2}{(n + \lambda)^2} \times \frac{\theta}{n} + \left(\frac{p + n\theta}{n + \lambda} - \theta \right)^2 \\ &= \frac{n\theta + \lambda^2 \left(\theta - \frac{p}{\lambda} \right)^2}{(n + \lambda)^2}. \end{aligned}$$

4. Puisque $\theta \sim \text{Gamma}(p, \lambda)$, on sait que $\mathbb{E}[\theta] = p/\lambda$ et $\text{Var}(\theta) = p/\lambda^2$.

Première méthode :

Puisque le risque ponctuel a été calculé à la question précédente, on peut obtenir le risque de Bayes pas intégration :

$$\mathbf{R}_B(\Pi) = \mathbf{R}_B(\Pi, T^*) = \mathbb{E}[\mathbf{R}(\theta, T^*)] = \frac{1}{(n + \lambda)^2} \left(n\mathbb{E}[\theta] + \lambda^2 \mathbb{E} \left[\left(\theta - \frac{p}{\lambda} \right)^2 \right] \right)$$

donc

$$\mathbf{R}_B(\Pi) = \frac{1}{(n + \lambda)^2} (n\mathbb{E}[\theta] + \lambda^2 \text{Var}(\theta)) = \frac{p}{\lambda(n + \lambda)}.$$

Deuxième méthode :

Puisque l'on considère la perte quadratique, le risque de Bayes est donné par

$$\mathbf{R}_B(\Pi) = \mathbf{R}_B(\Pi, T^*) = \mathbb{E}[(m_{\mathbf{X}} - \theta)^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(m_{\mathbf{X}} - \theta)^2 | \mathbf{X}]] = \mathbb{E}[v_{\mathbf{X}}] = \mathbb{E} \left[\frac{p + n\bar{X}_n}{(n + \lambda)^2} \right].$$

En remarquant que $\mathbf{X} | \theta = \theta$ est un n -échantillon de loi $\mathcal{P}(\theta)$, on obtient

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\bar{X}_n | \theta]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1 | \theta]] = \mathbb{E}[\theta] = \frac{p}{\lambda}.$$

Ainsi, $\mathbf{R}(\theta, T^*) = \frac{p}{\lambda(n + \lambda)}$.

5. On cherche un minimiseur du risque a posteriori. Le risque a posteriori d'un estimateur T pour la perte ℓ s'écrit

$$\rho(\Pi, T | \mathbf{X}) = \int_{\Theta} \theta^3 e^{-2\theta} (\theta - T)^2 d\Pi(\theta | \mathbf{X}).$$

En utilisant que $\Pi[\cdot | \mathbf{X}] = \text{Gamma}(p + n\bar{X}_n, \lambda + n)$, on obtient

$$\rho(\Pi, T | \mathbf{X}) = \frac{(\lambda + n)^{p+n\bar{X}_n}}{\Gamma(p + n\bar{X}_n)} \int_0^{+\infty} (\theta - T)^2 \theta^{p+n\bar{X}_n+2} e^{-(\lambda+n+2)\theta} d\theta.$$

Ainsi, la fonction $T \mapsto \rho(\Pi, T | \mathbf{X})$ est proportionnelle à $\mathbb{E}[(\tilde{\theta} - T)^2 | \mathbf{X}]$ où la loi de $\tilde{\theta}$ sachant \mathbf{X} est la loi $\text{Gamma}(n\bar{X}_n + p + 3, \lambda + n + 2)$. Comme pour toute variable aléatoire Z de carré intégrable, la fonction $a \mapsto \mathbb{E}[(Z - a)^2]$ est minimale en $a = \mathbb{E}[Z]$, on obtient qu'un estimateur de Bayes pour Π et la perte ℓ est donné par

$$\tilde{T}(\mathbf{X}) = \frac{n\bar{X}_n + p + 3}{\lambda + n + 2}.$$

EXERCICE 2 (Estimateurs de Bayes)

1. Un estimateur de Bayes pour la perte quadratique est la moyenne a posteriori $\hat{\theta}(X) = \mathbb{E}[\theta | X]$. Comme vu lors d'un TD précédent, un simple calcul montre que la loi a posteriori est

$$\Pi[\cdot | X] = \mathcal{N}\left(\frac{X}{\sigma^{-2} + 1}, \frac{1}{\sigma^{-2} + 1}\right).$$

Ainsi $\hat{\theta}(X) = \frac{X}{\sigma^{-2} + 1}$ et, comme en exercice précédent,

$$\mathbf{R}_B(\Pi) = \mathbb{E}[v_X] = \frac{1}{\sigma^{-2} + 1}.$$

Remarque : Tout comme ci-dessus, on peut commencer par calculer le risque ponctuel $\mathbf{R}(\theta, \hat{\theta}(X))$ puis écrire que $\mathbf{R}_B(\Pi) = \mathbb{E}[\mathbf{R}(\theta, \hat{\theta}(X))]$, ce qui correspond à intégrer ce risque ponctuel par rapport à la loi a priori de θ . En effet, la décomposition biais-variance permet d'obtenir que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{R}(\theta, \hat{\theta}(X)) = \frac{\sigma^{-4}\theta^2 + 1}{(\sigma^{-2} + 1)^2}.$$

Le résultat s'obtient directement en utilisant le fait que $\mathbb{E}[\theta^2] = \sigma^2$.

2. Le raisonnement est le même que ci-dessus. Un estimateur de Bayes pour la perte ℓ peut s'obtenir en cherchant un minimiseur en T du risque a posteriori

$$\begin{aligned} \rho(\Pi, T | X) &= \int_{\Theta} \ell(\theta, T) d\Pi(\theta | X) \propto \int_{\mathbb{R}} (\theta - T)^2 \exp\left\{\frac{3\theta^2}{4} - \frac{\sigma^{-2} + 1}{2} \left(\theta - \frac{X}{\sigma^{-2} + 1}\right)^2\right\} d\theta \\ &\propto \int_{\mathbb{R}} (\theta - T)^2 \exp\left\{-\frac{\sigma^{-2} - 1/2}{2} \left(\theta - \frac{X}{\sigma^{-2} - 1/2}\right)^2\right\} d\theta \end{aligned}$$

L'intégrale est convergente si et seulement si $\sigma^{-2} > 1/2$. Dans ce cas, la quantité

$$\exp\left\{-\frac{\sigma^{-2} - 1/2}{2} \left(\theta - \frac{X}{\sigma^{-2} - 1/2}\right)^2\right\}$$

est le terme principal (non normalisé) de la densité d'une variable gaussienne $\mathcal{N}\left(\frac{X}{\sigma^{-2}-1/2}, \frac{1}{\sigma^{-2}-1/2}\right)$. Ainsi, la fonction $T \mapsto \rho(\Pi, T | X)$ est proportionnelle à $\mathbb{E}\left[(\tilde{\theta} - T)^2 | X\right]$ où la loi de $\tilde{\theta}$ sachant \mathbf{X} est la loi $\mathcal{N}\left(\frac{X}{\sigma^{-2}-1/2}, \frac{1}{\sigma^{-2}-1/2}\right)$, donc

$$T^*(X) = \frac{X}{\sigma^{-2} - 1/2}$$

est un estimateur de Bayes pour la perte ℓ .

Pour calculer le risque de Bayes de T^* , on commence par calculer le risque ponctuel : pour tout réel θ , il s'écrit

$$\mathbf{R}(\theta, T^*) = \mathbb{E}_\theta[\ell(\theta, T^*)] = e^{\frac{3\theta^2}{4}} \mathbb{E}_\theta \left[(T^* - \theta)^2 \right] = e^{\frac{3\theta^2}{4}} (\text{Var}_\theta(T^*) + (\mathbb{E}_\theta[T^*] - \theta)^2).$$

Or on sait que $\mathbb{E}_\theta[X] = \theta$ et $\text{Var}_\theta(X) = 1$, donc en posant $c := \sigma^{-2} - 1/2$, c'est-à-dire $T^* = X/c$, on en déduit que

$$\mathbf{R}(\theta, T^*) = \frac{1 + (c-1)^2\theta^2}{c^2} e^{\frac{3\theta^2}{4}}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathbf{R}_B(\Pi, T^*) = \mathbb{E}[\mathbf{R}(\theta, T^*)] = \frac{1}{c^2} \mathbb{E} \left[(1 + (c-1)^2\theta^2) e^{\frac{3\theta^2}{4}} \right] = \frac{1}{c^2} \int_{\mathbb{R}} (1 + (c-1)^2\theta^2) e^{\frac{3\theta^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}} d\theta.$$

Ceci montre que le risque de Bayes est infini si $\sigma^2 \geq 2/3$, puisque dans ce cas cette intégrale est divergente. Si $\sigma^2 < 2/3$, on fait à nouveau apparaître une loi gaussienne en notant que

$$e^{\frac{3\theta^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-3\sigma^2/2}} \sqrt{\frac{\sigma^{-2}-3/2}{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^{-2}-3/2}{2}\theta^2}.$$

Soit $Y \sim \mathcal{N}(0, 1/(\sigma^{-2} - 3/2))$, alors $\mathbb{E}[Y^2] = 1/(\sigma^{-2} - 3/2) = 1/(c-1)$ donc

$$\mathbf{R}_B(\Pi, T^*) = \frac{1}{c^2 \sqrt{1-3\sigma^2/2}} \mathbb{E}[(1 + (c-1)^2 Y^2)] = \frac{1}{c \sqrt{1-3\sigma^2/2}} = \frac{1}{(\sigma^{-2} - 1/2) \sqrt{1-3\sigma^2/2}}.$$

Remarque : Les calculs précédents montrent que si $\sigma^2 \geq 2/3$, tout estimateur est de Bayes puisque tout estimateur est de risque infini, qui est le risque de Bayes.

EXERCICE 3 (De Bayes et de risque constant implique minimax)

1. La formule de Bayes donne, pour tous $a, b > 0$,

$$\pi_{a,b}(\theta | \mathbf{X}) \propto \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} \mathbf{1}_{0 < \theta < 1} \theta^{n\bar{X}_n} (1-\theta)^{n-n\bar{X}_n} \propto \theta^{a+n\bar{X}_n-1} (1-\theta)^{b+n-n\bar{X}_n-1} \mathbf{1}_{0 < \theta < 1}.$$

La loi a posteriori est une loi Beta($a + n\bar{X}_n, b + n - n\bar{X}_n$). Par le cours, un estimateur de Bayes $\hat{\theta}_{a,b}(\mathbf{X})$ pour $\Pi_{a,b}$ et la perte quadratique est la moyenne a posteriori. En utilisant que l'espérance d'une loi Beta(a, b) est égale à $\frac{a}{a+b}$, on obtient

$$\hat{\theta}_{a,b}(\mathbf{X}) = \frac{a + n\bar{X}_n}{a + b + n}.$$

2. D'après le cours, un estimateur de Bayes de risque constant est minimax. Il suffit donc de trouver, parmi les estimateurs $(\hat{\theta}_{a,b}(\mathbf{X}))_{a,b>0}$ (qui sont de Bayes), un estimateur qui soit de risque constant. L'énoncé suggère de poser $a = b$, on calcule donc le risque quadratique de l'estimateur $\hat{\theta}_{a,a}(\mathbf{X})$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta \left[(\hat{\theta}_{a,a}(\mathbf{X}) - \theta)^2 \right] &= \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{n(\bar{X}_n - \theta)}{2a + n} - \frac{2a\theta - a}{2a + n} \right)^2 \right] \\ &= \frac{n^2 \text{Var}_\theta(\bar{X}_n)}{(2a + n)^2} + \frac{a^2(2\theta - 1)^2}{(2a + n)^2} \\ &= (2a + n)^{-2} (n\theta(1 - \theta) + a^2(2\theta - 1)^2) \\ &= (2a + n)^{-2} ((4a^2 - n)\theta^2 + (n - 4a^2)\theta + a^2).\end{aligned}$$

On en conclut que si l'on choisit a tel que $4a^2 = n$, soit

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2},$$

l'estimateur

$$\hat{\theta}_{a_n, a_n}(\mathbf{X}) = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{n}\bar{X}_n}{1 + \sqrt{n}}$$

est de risque constant et de Bayes donc, d'après un théorème du cours, il est minimax.

3. Pour savoir si T est minimax, il suffit de comparer $\mathbf{R}_{\max}(T)$ au risque minimax \mathbf{R}_M . Or on peut calculer ce dernier car la question précédente a fourni un estimateur minimax, à savoir $\hat{\theta}_{a_n, a_n}(\mathbf{X})$. Le risque maximal de ce dernier est, d'après la question précédente, puisqu'il est de risque constant, égal à

$$\mathbf{R}_{\max}(\hat{\theta}_{a_n, a_n}(\mathbf{X})) = \frac{a_n^2}{(2a_n + n)^2} = \frac{n}{4(n + \sqrt{n})^2}.$$

Or, le risque maximal de T vaut

$$\mathbf{R}_{\max}(T) = \sup_{\theta \in [0,1]} \mathbf{R}(\theta, T) = \sup_{\theta \in [0,1]} \text{Var}_\theta(\bar{X}_n) = \sup_{\theta \in [0,1]} \frac{\theta(1 - \theta)}{n} = \frac{1}{4n},$$

On en conclut $\mathbf{R}_{\max}(T) > \mathbf{R}_{\max}(\hat{\theta}_{a_n, a_n}(\mathbf{X})) = \mathbf{R}_M$, donc T n'est pas minimax.

EXERCICE 4 (Contrôle continu 2020)

1. Si $Y \sim \mathcal{N}(0, s^2)$, alors par parité de la fonction intégrée

$$\mathbb{E}[|Y|] = 2 \int_0^\infty y \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-\frac{y^2}{2s^2}} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} s \left[-e^{-\frac{y^2}{2s^2}} \right]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}} s.$$

2. Un calcul classique donne $\Pi[\cdot | \mathbf{X}] = \mathcal{N}\left(\frac{\mu\sigma^{-2} + n\bar{X}_n}{n + \sigma^{-2}}, \frac{1}{n + \sigma^{-2}}\right)$.
3. Par un résultat du cours, un estimateur de Bayes pour la perte en valeur absolue est donné par la médiane a posteriori de θ , qui correspond ici à sa moyenne, i.e. $T^*(\mathbf{X}) = \frac{\mu\sigma^{-2} + n\bar{X}_n}{n + \sigma^{-2}}$.
4. On a, en utilisant la question préliminaire,

$$\mathbf{R}_B(\Pi, T^*) = \mathbb{E}[|\theta - \mathbb{E}[\theta | \mathbf{X}]|] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[|\theta - \mathbb{E}[\theta | \mathbf{X}]| | \mathbf{X}]] = \mathbb{E}\left[\left|\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n + \sigma^{-2}}\right)\right|\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma^{-2} + n}}.$$

5. Le risque ponctuel de l'estimateur \bar{X}_n est donné par

$$\mathbf{R}(\theta, \bar{X}_n) = \mathbb{E}_\theta [|\bar{X}_n - \theta|] = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}[|\mathcal{N}(0, 1)|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, le risque de \bar{X}_n est constant donc $\mathbf{R}_{\max}(\bar{X}_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}$. En considérant la suite de lois a priori $(\Pi_k)_{k \geq 1}$ avec $\Pi_k = \mathcal{N}(0, k)$, on obtient

$$\mathbf{R}_{\max}(\bar{X}_n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k} + n}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{R}_B(\Pi_k).$$

Par une Proposition du cours, on en déduit que \bar{X}_n est minimax pour la perte en valeur absolue.

EXERCICE 5 (Contrôle continu 2020)

1. On a

$$\begin{aligned} \pi(\theta | \mathbf{X}) &\propto \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(\theta) \prod_{i=1}^n (X_i + 1) (1-\theta)^2 \theta^{X_i} \\ &\propto \theta^{a+n\bar{X}_n-1} (1-\theta)^{b+2n-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(\theta) \end{aligned}$$

et on a donc $\theta | \mathbf{X} \sim \text{Beta}(a + n\bar{X}_n, b + 2n)$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[\theta | \mathbf{X}] = \frac{a + n\bar{X}_n}{a + b + 2n + n\bar{X}_n}, \quad \mathbb{V}(\theta | \mathbf{X}) = \frac{(a + n\bar{X}_n)(b + 2n)}{(a + b + 2n + n\bar{X}_n)^2 (a + b + 2n + n\bar{X}_n + 1)}.$$

2. Avec les calculs usuels on obtient l'intervalle de crédibilité

$$IC_{1-\alpha}(\mathbf{X}) = \left[\mathbb{E}[\theta | \mathbf{X}] \pm \sqrt{\frac{\mathbb{V}(\theta | \mathbf{X})}{\alpha}} \right]$$

3. Un estimateur de Bayes pour la perte quadratique est donné par la moyenne a posteriori $\mathbb{E}[\theta | \mathbf{X}]$.

4. On considère maintenant la perte $\ell(\theta, T) = \frac{1}{(1-\theta)^2} (\theta - T)^2$.

(a) On cherche un élément T^* qui minimise le risque a posteriori, i.e. la fonction $T \mapsto \rho(\Pi, T | X) = \mathbb{E}[\ell(\theta, T) | \mathbf{X}]$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} \ell(\theta, T) d\Pi(\theta | \mathbf{X}) &\propto \int_0^1 \frac{(\theta - T)^2}{(1-\theta)^2} \theta^{a+n\bar{X}_n-1} (1-\theta)^{b+2n-1} d\theta \\ &\propto \int_0^1 (\theta - T)^2 \theta^{a+n\bar{X}_n-1} (1-\theta)^{b+2n-3} d\theta \end{aligned}$$

et comme $n \geq 1$, $\theta^{a+n\bar{X}_n-1} (1-\theta)^{b+2n-3} \mathbf{1}_{[0,1]}(\theta)$ est le terme général de la densité d'une loi Beta($a + n\bar{X}_n, b + 2(n-1)$), et on obtient donc l'estimateur de Bayes

$$T^*(\mathbf{X}) = \frac{a + n\bar{X}_n}{a + b + n\bar{X}_n + 2(n-1)}.$$

(b) On souhaite estimer

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}_B(\Pi) = \mathbb{E}[\ell(\boldsymbol{\theta}, T^*(X_1, \dots, X_n))].$$

Pour cela, on prend $N \in \mathbb{N}^*$, et on simule N vecteurs $(\boldsymbol{\theta}_j, X_1^j, \dots, X_n^j)$, $j = 1, \dots, N$, i.i.d. de même loi que $(\boldsymbol{\theta}, X_1, \dots, X_n)$. Cela est possible en simulant d'abord $\boldsymbol{\theta}_j$ de loi Beta(a, b). Puis, sachant $\boldsymbol{\theta}_j$, en simulant X_1^j, \dots, X_n^j i.i.d. de loi $P_{\boldsymbol{\theta}_j}$ (loi binomiale négative de paramètres 2 et $1 - \boldsymbol{\theta}_j$). Ensuite, pour $j = 1, \dots, N$, on calcule

$$T_j^* = T_j^*(X_1^j, \dots, X_n^j) = \frac{a + \sum_{i=1}^n X_i^j}{a + b + 2(n-1) + \sum_{i=1}^n X_i^j},$$

et

$$\ell(\boldsymbol{\theta}_j, T_j^*) = \frac{1}{(1 - \boldsymbol{\theta}_j)^2} (\boldsymbol{\theta}_j - T_j^*)^2.$$

On approche alors \mathbf{I} par l'estimateur Monte-Carlo classique

$$\hat{\mathbf{I}}_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \ell(\boldsymbol{\theta}_j, T_j^*),$$

qui est fortement consistant par la loi forte des grands nombres.

Remarque : Ce dernier point suppose que $\mathbf{I} = \mathbf{R}_B(\Pi) < \infty$, sans quoi l'estimateur Monte-Carlo tend presque sûrement vers l'infini. Ceci découle du fait que T^* minimise la fonction $T \mapsto \mathbb{E}[\ell(\boldsymbol{\theta}, T) | \mathbf{X}]$. En particulier, il fait mieux que l'estimateur trivial $\check{T} \equiv 1$, pour lequel $\mathbb{E}[\ell(\boldsymbol{\theta}, \check{T}) | \mathbf{X}] \equiv 1$ et dont le risque de Bayes, qui majore celui de T^* , vaut donc 1.

EXERCICE 6 (Rattrapage 2020)

1. Pour tout $\theta > 0$, on a

$$\begin{aligned} \pi_{a,b}(\theta | \mathbf{X}) &\propto \theta^{a-1} e^{-b\theta} \mathbf{1}_{\theta>0} \prod_{i=1}^n (\theta e^{-\theta X_i}) \\ &\propto \theta^{n+a-1} e^{-(b+n\bar{X}_n)\theta} \mathbf{1}_{\theta>0}. \end{aligned}$$

Ainsi $\Pi_{a,b}[\cdot | \mathbf{X}] = \Gamma(a+n, b+n\bar{X}_n)$. En particulier,

$$m_{\mathbf{X}} = \frac{a+n}{b+n\bar{X}_n} \quad \text{et} \quad v_{\mathbf{X}} = \frac{a+n}{(b+n\bar{X}_n)^2}.$$

2. On procède par minimisation du risque a posteriori. Pour tout estimateur T , on a

$$\rho(\Pi, T | X) = \mathbb{E}[\ell(\boldsymbol{\theta}, T(\mathbf{X})) | \mathbf{X}] = \int_0^{+\infty} \frac{(b+n\bar{X}_n)^{a+n}}{\Gamma(a+n)} (T(\mathbf{X}) - \theta)^2 \theta^{a+n-3} e^{-(b+n\bar{X}_n)\theta} d\theta.$$

À constante près, on reconnaît $\int_0^{+\infty} (T(\mathbf{X}) - \theta)^2 d\tilde{\Pi}_{\mathbf{X}}(\theta)$ avec $\tilde{\Pi}_{\mathbf{X}} = \Gamma(a+n-2, b+n\bar{X}_n)$. On en déduit qu'un estimateur de Bayes est donné par

$$T_{a,b}(\mathbf{X}) = \frac{a+n-2}{b+n\bar{X}_n},$$

qui correspond à l'espérance (conditionnelle à \mathbf{X}) de la loi $\tilde{\Pi}_{\mathbf{X}}$.

3. Au vu de la question précédente, on peut chercher à exprimer le risque a posteriori de $T_{a,b}$ en fonction de la variance de la loi $\tilde{\Pi}_{\mathbf{X}}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\ell(\boldsymbol{\theta}, T_{a,b}(\mathbf{X})) \mid \mathbf{X}] &= \frac{(b + n\bar{X}_n)^{a+n}}{\Gamma(a+n)} \int_0^{+\infty} (T_{a,b}(\mathbf{X}) - \theta)^2 \theta^{a+n-3} e^{-(b+n\bar{X}_n)\theta} d\theta \\ &= \frac{(b + n\bar{X}_n)^2}{(a+n-1)(a+n-2)} \int_0^{+\infty} \frac{(b + n\bar{X}_n)^{a+n-2}}{\Gamma(a+n-2)} (T_{a,b}(\mathbf{X}) - \theta)^2 \theta^{a+n-3} e^{-(b+n\bar{X}_n)\theta} d\theta \\ &= \frac{(b + n\bar{X}_n)^2}{(a+n-1)(a+n-2)} \frac{a+n-2}{(b + n\bar{X}_n)^2} \\ &= \frac{1}{a+n-1}.\end{aligned}$$

Ainsi le risque de Bayes vaut $\mathbf{R}_B(\Pi_{a,b}) = \frac{1}{a+n-1}$.

4. Soit $\theta > 0$. On commence par calculer le risque ponctuel. En utilisant l'indication de l'énoncé, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\theta, T^*) &= \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{n-2}{\theta \sum_{i=1}^n X_i} - 1 \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{n-2}{Z} - 1 \right)^2 \right],\end{aligned}$$

où $Z \sim \Gamma(n, 1)$. Par le rappel de l'énoncé, on a

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{Z} \right] = \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{n-1}.$$

et

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{Z^2} \right] = \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\theta, T^*) &= (n-2)^2 \mathbb{E} \left[\frac{1}{Z^2} \right] - 2(n-2) \mathbb{E} \left[\frac{1}{Z} \right] + 1 \\ &= (n-2)^2 \frac{1}{(n-1)(n-2)} - 2(n-2) \frac{1}{n-1} + 1 \\ &= \frac{1}{n-1}.\end{aligned}$$

Le risque de T^* est donc constant égal à $\frac{1}{n-1}$. En particulier, $\mathbf{R}_{\max}(T^*) = \frac{1}{n-1}$.

5. En considérant la suite de lois a priori $(\Pi_{1/k,1})_{k \geq 1}$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{R}_B(\Pi_{1/k,1}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/k + n - 1} = \frac{1}{n-1} = \mathbf{R}_{\max}(T^*).$$

Par une proposition du cours, on en déduit que T^* est minimax.

EXERCICE 7 (Quantiles)

On peut commencer par remarquer que dans le cas où $a = b = 1$, il s'agit de la fonction de perte en valeur absolue, pour laquelle nous avons vu en cours qu'un estimateur de Bayes est la médiane a posteriori.

Pour trouver un estimateur de Bayes pour Π , il suffit de trouver un minimiseur du risque a posteriori soit

$$T^*(X) = \arg \min_t \int_{\Theta} \ell(\theta, t) d\Pi(\theta | X) = \arg \min_t \mathbb{E} [\ell(\theta, t) | X].$$

Par hypothèse, la loi a priori (donc aussi la loi a posteriori) a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . En particulier, la fonction de répartition $F = F_{\theta|X}$ de la loi a posteriori est continue. Par définition de ℓ , on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} [\ell(\theta, t) | X] = \mathbb{E} [b(\theta - t)\mathbf{1}_{\theta > t} | X] + \mathbb{E} [a(t - \theta)\mathbf{1}_{\theta \leq t} | X].$$

Notons que, θ étant par hypothèse intégrable pour la loi a priori Π , les deux termes sont finis presque sûrement car positifs et d'espérance finie. En effet, on peut par exemple écrire pour le premier :

$$\mathbb{E} [\mathbb{E} [b(\theta - t)\mathbf{1}_{\theta > t} | X]] = \mathbb{E} [b(\theta - t)\mathbf{1}_{\theta > t}] \leq b\mathbb{E}[\theta - t] \leq b(\mathbb{E}[\theta] + |t|) < \infty.$$

Ensuite, pour toute variable aléatoire positive U , on a $\mathbb{E}[U] = \int_0^\infty \mathbb{P}(U > u) du$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\ell(\theta, t) | X] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(b(\theta - t) > u | X) du + \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(a(t - \theta) > u | X) du \\ &= \int_0^{+\infty} \left(1 - F\left(t + \frac{u}{b}\right)\right) du + \int_0^{+\infty} F\left(t - \frac{u}{a}\right) du \\ &= b \int_t^{+\infty} (1 - F(s)) ds + a \int_{-\infty}^t F(s) ds, \end{aligned}$$

où l'on a effectué les changements de variables $s = t + \frac{u}{b}$ et $s = t - \frac{u}{a}$ respectivement. Rappelons que les deux intégrales sont finies pour tout réel t . Etudions la seconde : on peut donc écrire

$$\int_{-\infty}^t F(s) ds = \int_{-\infty}^0 F(s) ds + \int_0^t F(s) ds = C + \int_0^t F(s) ds.$$

Comme F est continue, elle admet une primitive Φ , qui est donc de classe C^1 et vérifie

$$\int_{-\infty}^t F(s) ds = C + \Phi(t) - \Phi(0).$$

Par conséquent, la seconde intégrale, vue comme une fonction de t , est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée

$$\frac{d}{dt} \left(a \int_{-\infty}^t F(s) ds \right) = a\Phi'(t) = aF(t).$$

Un raisonnement similaire donne

$$\int_t^{+\infty} (1 - F(s)) ds = \int_0^{+\infty} (1 - F(s)) ds - \int_0^t (1 - F(s)) ds = C' - t + \Phi(t) - \Phi(0),$$

si bien que

$$\frac{d}{dt} \left(b \int_t^{+\infty} (1 - F(s)) ds \right) = b(F(t) - 1).$$

Au total, la fonction $t \mapsto \mathbb{E} [\ell(\theta, t) | X]$ est C^1 sur \mathbb{R} , de dérivée

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E} [\ell(\theta, t) | X] = (a + b)F(t) - b.$$

Pour trouver son minimum, on écrit

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E} [\ell(\boldsymbol{\theta}, t) \mid X] \geq 0 \Leftrightarrow F(t) \geq \frac{b}{a+b}.$$

Notons comme d'habitude F^{-1} l'inverse généralisée (ou fonction quantile) de F . On rappelle que pour tout $0 < u < 1$, le quantile d'ordre u est défini par

$$F^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R}, F(t) \geq u\},$$

et que l'on a l'équivalence suivante :

$$F(t) \geq u \Leftrightarrow t \geq F^{-1}(u).$$

En particulier, $t < F^{-1}(u)$ implique $F(t) < u$. Rappelons aussi que, si F est continue (comme c'est le cas ici), on sait que $F(F^{-1}(u)) = u$ pour tout $0 < u < 1$. Pour ce qui nous concerne, en notant $T^*(X)$ le quantile d'ordre $b/(a+b)$ de F , il s'ensuit que la dérivée de $t \mapsto \mathbb{E} [\ell(\boldsymbol{\theta}, t) \mid X]$ est strictement négative si $t < T^*(X)$ et positive (au sens large) si $t \geq T^*(X)$. Ce dernier est donc un minimiseur de la fonction $t \mapsto \mathbb{E} [\ell(\boldsymbol{\theta}, t) \mid X]$. Au total, $T^*(X)$ est un estimateur de Bayes pour la fonction de perte ℓ . Ceci généralise bien le cas $a = b = 1$ vu en cours.

Remarque : La fonction F est continue mais rien n'empêche qu'elle soit constante sur un intervalle de la forme $[T^*(X), T^*(X) + h]$, auquel cas toute valeur $\tilde{T}(X) \in [T^*(X), T^*(X) + h]$ est aussi un estimateur de Bayes. Il n'y a donc pas nécessairement unicité.