TD 1 : Outils probabilistes

Exercice 1 (Modes de convergence)

1. Rappeler les définitions des modes de convergence suivants : en probabilité, dans $\mathbb{L}^2$, en loi, presque sûre.
2. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^2} X$ implique $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers une constante a. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $(h(X_n))_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $h(a)$.
4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant pour densité
$$f(x) = 2x \exp(-x^2)\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$
par rapport à la mesure de Lebesgue.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(X_1^2)$.
   (b) Étudier la convergence presque sûre de $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.
   (c) Étudier la convergence presque sûre de $W_n = n/\sum_{i=1}^n X_i^2$.
5. Étudier la convergence de la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ dans chacun des cas suivants : $X_n = 1/n$; $X_n = (-1)^n$; $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$ pour une suite d'événements A_n telle que $\mathbb{P}(A_n) \to 0$; $X_n = Z_n\mathbb{1}_{B_n}$ pour $Z_n \rightsquigarrow Z$ et $\mathbb{P}(B_n) \to 1$.
6. (**Résultat à savoir !**) Que dire de la suite de variable aléatoire $(X_n)_{n\geq 1}$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$, pour une variable aléatoire X donnée ?

Exercice 2 (Cauchy et Fréchet) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant pour densité (par rapport à la mesure de Lebesgue)
$$f(x) = 1/(\pi(1 + x^2)),\ \ x \in \mathbb{R}$$
(loi de Cauchy). On note M_n la variable aléatoire définie par $M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$.

1. Déterminer la loi de M_n/n.
2. Montrer que M_n/n converge en loi. Rappel : $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.
3. Montrer que cette loi limite admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, que l'on déterminera.

Exercice 3 (Loi Gamma, formules à retenir !) On dit que X suit une loi Gamma de paramètres p et θ ($p > 0$, $\theta > 0$), notée $\gamma(p, \theta)$, si sa densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) est :
$$f(x) = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \exp(-\theta x)x^{p-1}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\ ,$$

ou de façon équivalente, si sa fonction caractéristique vaut $\Phi_X(t) = 1/(1 - it/\theta)^p$ pour tout réel t. On rappelle les propriétés suivantes de la fonction Gamma :

$$\forall \alpha > 0, \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x) dx, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

1. Vérifier que la loi $\gamma(p, \theta)$ est bien une loi de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{E}(X^k)$ pour $k \geq 1$. En déduire que $\mathbb{E}(X) = p/\theta$ et $\mathrm{Var}(X) = p/\theta^2$.
3. Soit Y de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Calculer la densité de Y^2. En déduire que $\gamma(1/2, 1/2) = \chi^2(1)$.
4. Si $a > 0$, montrer que $X/a \sim \gamma(p, a\theta)$.
5. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois respectives $\gamma(p_1, \theta)$ et $\gamma(p_2, \theta)$. Montrer que $X + Y \sim \gamma(p_1 + p_2, \theta)$.
6. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes de même loi $\gamma(1, \theta)$ (dite loi exponentielle de paramètre θ), donner la loi de la somme $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.
7. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$, donner la loi de $S'_n = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ et en déduire que $\gamma(n/2, 1/2) = \chi^2(n)$. Calculer $\mathbb{E}(S'_n)$ et $\mathrm{Var}(S'_n)$.

Exercice 4 (Inégalité de type Bennett) On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = (1 + x)\ln(1 + x) - x$, et ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \exp(x) - x - 1$. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.

1. Pour tout nombre réel λ, exprimer $\mathbb{E}\left(\exp(\lambda(X - \theta))\right)$ à l'aide de la fonction ϕ.
2. Montrer que $\forall \lambda \geq 0$, $\forall x > 0$, $\mathbb{P}(X - \theta \geq x) \leq \exp(\theta\phi(\lambda) - \lambda x)$.
3. Calculer $\sup_{\lambda \geq 0}(\lambda x - \phi(\lambda))$ pour tout $x > 0$.
4. En déduire que pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}(X - \theta \geq x) \leq \exp\left(-\theta h(x/\theta)\right)$.
5. Majorer, lorsque $\theta = 2$, la probabilité $\mathbb{P}(X \geq 10)$ en utilisant l'inégalité de Bennett, puis celle de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 5 ($\star$)(Inégalité de Hoeffding) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $|X_n| \leq M$ p.s. pour un $M > 0$. On rappelle que $2\cosh(u) = \exp(u) + \exp(-u)$.

1. Pour tout $x \in [-M, M]$ et $\lambda \geq 0$, établir l'inégalité
$$\exp(\lambda x) \leq \frac{M - x}{2M} \exp(-\lambda M) + \frac{x + M}{2M} \exp(\lambda M).$$
2. En déduire que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(\exp(\lambda X_i)) \leq \cosh(\lambda M) \leq \exp(\lambda^2 M^2/2)$.
(Pour montrer l'inégalité de droite, on pourra comparer les séries entières des fonctions $\cosh(u)$ et $\exp(u^2/2)$).
3. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pour tout $\lambda \geq 0$ et $x > 0$, montrer que l'on a
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) \leq \exp\left(n\left(\frac{\lambda^2 M^2}{2} - \lambda x\right)\right).$$
4. En déduire les inégalités de Hoeffding : pour tout $x > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2M^2}\right) \text{ et } \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq x\right) \leq 2\exp\left(-\frac{nx^2}{2M^2}\right).$$

5. Donner la forme des inégalités de Hoeffding pour des v.a. i.i.d. uniformes sur $[0,2]$. Que vaut la borne quand $n=100$ et $x=0.1$ puis $x=0.5$ enfin quand $n=1000$ et $x=0.1$? Comparer ces bornes avec celles données par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 6 ($\star$)(Weibull) Comme à l'exercice 1, on considère des variables aléatoires $(X_i)_{1\le i\le n}$ i.i.d. de densité

$$f(x) = 2x\exp(-x^2)\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x),$$

et on pose $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

1. Déterminer la loi de X_1^2. En déduire celle de V_n.
2. Montrer que, pour tout réel t,

$$\mathbb{P}\left(V_n - 1 \ge t/\sqrt{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(-t)$$

   où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
3. Fixons maintenant un entier $n\ge 1$. Nous cherchons à montrer pour tout réel $t>0$,

$$\mathbb{P}\left(V_n - 1 \ge t/\sqrt{n}\right) \le \exp\left(-n\psi(t/\sqrt{n})\right),$$

   pour la fonction ψ définie par $\psi(u) = u - \ln(1+u)$.
   (a) Quelle méthode doit-on utiliser ?
   (b) Trouver la fonction ϕ (dépendant éventuellement de n) telle que

$$\mathbb{E}\left(\exp(\lambda(V_n-1))\right) = e^{\phi(\lambda)} \quad \text{pour } 0\le\lambda<n.$$

   (c) Calculer $h(x) = \sup_{\lambda\ge 0}(\lambda x - \phi(\lambda))$ pour tout $x>0$.
   (d) En déduire le résultat annoncé, puis calculer un équivalent de la borne lorsque n tend vers l'infini. Comparer à la question 2.

Exercice 7 (Moyenne et variance empiriques) Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite i.i.d de variables aléatoires réelles, d'espérance m et de variance $0<\sigma^2<\infty$. On note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$.

1. Montrer que $\overline{X}_n$ et σ_n^2 convergent presque sûrement et déterminer leurs limites.
2. En tolérant que la variable aléatoire suivante puisse prendre les valeurs $-\infty$ et ∞, montrer que

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\sigma_n^2}}$$

   converge en loi et déterminer la loi limite.

Exercice 8 (Produit de variables aléatoires) Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$, et $Y_n = 1/(\prod_{i=1}^n X_i)^{1/n}$.

1. Quelle est la loi de $Z_1 = -\ln(X_1)$?
2. Montrer que $\sqrt{n}(Y_n - e)$ converge en loi et identifier la loi limite.

Exercice 9 (Vitesse plus rapide que $1/\sqrt{n}$) Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires i.i.d., centrées, de variance 1, et $\overline{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$.

1. Étudier la convergence p.s. de $\overline{X}_n$ et en loi de $\sqrt{n}\overline{X}_n$.
2. Montrer que $\sqrt{n}(\cos(\overline{X}_n) - 1)$ converge en loi et identifier la loi limite. Pourquoi la limite est-elle dégénérée ?
3. Donner un développement limité non constant de cos en 0.
4. En reprenant la démonstration de la Delta méthode, montrer qu'il existe une suite de réels positifs $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini et une v.a. réelle Z non constante p.s. telles que $v_n(\cos(\overline{X}_n) - 1) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$.

Exercice 10 ($\star$)**(Suite de binomiales)** Soit $\theta \in]0,1[$, X_n de loi $\mathcal{B}(n,\theta)$ et Y_n définie par

$$Y_n = \begin{cases} \ln(X_n/n) & \text{si } X_n \geq 1 \\ 1 & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

1. Peut-on obtenir un résultat de convergence sur X_n/n grâce à la loi des grands nombres ? Pourquoi ?
2. Montrer que X_n/n converge p.s. vers θ.
3. En déduire que Y_n converge p.s. vers $\ln(\theta)$.
4. Montrer que $\sqrt{n}(Y_n - \ln(\theta))$ converge en loi vers une gaussienne centrée de variance $(1-\theta)/\theta$.