TD 10 : Tests bayésiens

Exercice 1 (Borne de Le Cam)

1. On considère le modèle $\mathcal{P} = \{P_\theta = \mathcal{N}(\theta, 1), \theta \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Rappeler l'EMV dans $\mathcal{P}$ et déterminer son risque quadratique.
   (b) Exprimer, pour $P_\theta \in \mathcal{P}$ et $P_{\theta'} \in \mathcal{P}$, la distance de Hellinger entre P_θ et $P_{\theta'}$, notée $h(P_\theta, P_{\theta'})$ et en déduire, pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$, un équivalent de $h(P_\theta, P_{\theta+\varepsilon})$ lorsque $\varepsilon \to 0$.
   (c) Exprimer la borne de Le Cam pour le risque quadratique en fonction de θ et ε et justifier que le supremum est atteint pour ε proche de 0.
   (d) En utilisant l'équivalent de $h(P_\theta, P_{\theta+\varepsilon})$ lorsque $\varepsilon \to 0$, donner l'ordre de la borne de Le Cam en fonction de n et le comparer au risque maximal de l'EMV. Conclure sur l'ordre du risque minimax.
2. Reprendre la question 1 avec $\mathcal{P} = \{\mathcal{E}(1) + \theta, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 (Test bayésien I)
Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \,\big|\, \boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{B}(\boldsymbol{\theta})^{\otimes n}$, avec $\boldsymbol{\theta} \in]0,1[$. On souhaite tester $H_0 : \boldsymbol{\theta} = 1/2$ contre $H_1 :\ \boldsymbol{\theta} \neq 1/2$. On considère une loi a priori de la forme

$$\Pi = \alpha \delta_{1/2} + (1-\alpha)\mathrm{Unif}[0,1]\,, \quad \alpha \in]0,1[\,.$$

Quel est le test de Bayes pour H_0 contre H_1 pour cette loi a priori et la fonction de perte équilibrée ?

Exercice 3 (Test bayésien II)
Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \,\big|\, \boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}, 1)^{\otimes n}$.

1. On considère le problème de test $H_0 :\ \boldsymbol{\theta} = 0$ versus $H_1 :\ \boldsymbol{\theta} \neq 0$, et on choisit une loi a priori Π de la forme $\Pi = \alpha\delta_0 + (1-\alpha)\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\alpha \in]0,1[$ et $\sigma^2 > 0$. Déterminer le test de Bayes pour Π et la perte équilibrée.
2. Pour $\varepsilon > 0$, on considère $H_0' :\ |\boldsymbol{\theta}| \leq \varepsilon$ versus $H_1' :\ |\boldsymbol{\theta}| > \varepsilon$. On choisit cette fois la loi a priori $\Pi' = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Déterminer le test de Bayes pour Π' et la perte équilibrée.

Exercice 4 (Le phénomène de Hodges)
On considère, pour $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, l'estimateur $T_n = \overline{X}_n$ ainsi que l'estimateur de Hodges $S_n = \overline{X}_n \mathbf{1}_{|\overline{X}_n| > n^{-1/4}}$.

1. En notant $\mathbf{R}$ le risque quadratique, rappeler ce que vaut $\mathbf{R}(\theta, T_n)$ et montrer que

$$\mathbf{R}(\theta, S_n) = \theta^2 \mathbb{P}_\theta\left(|\overline{X}_n| \leq n^{-1/4}\right) + \mathbb{E}_\theta\left[(\overline{X}_n - \theta)^2 \mathbb{1}_{\{|\overline{X}_n| > n^{-1/4}\}}\right]\,.$$

2. Prouver que
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbf{R}(\theta,S_n)}{\mathbf{R}(\theta,T_n)}=\begin{cases}0 & \text{si } \theta=0,\\ 1 & \text{si } \theta\neq 0.\end{cases}$$
Indication : pour majorer $\mathbb{P}_\theta(|\overline{X}_n|\leq n^{-1/4})$ lorsque $\theta\neq 0$, on pourra utiliser l'inégalité de Markov ou la majoration classique pour les queues gaussiennes : pour tout $x>0$,
$$\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)>x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-t^2/2}dt\leq\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}te^{-t^2/2}dt=\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$
3. Montrer que pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}_\theta[(S_n-\theta)^2]\geq\theta^2\mathbb{P}\left(0\leq\mathcal{N}\Big(\theta,\frac{1}{n}\Big)\leq\frac{1}{n^{1/4}}\right).$$
4. En déduire que pour $\theta_\star=n^{-1/4}$, on a
$$\mathbb{E}_{\theta_\star}[(S_n-\theta_\star)^2]\geq\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2}-o(1)\right).$$
5. Comparer le risque maximal de T_n à celui de S_n. Ce dernier est-il “uniformément bon” ?

Exercice 5 ($\star$) (Distance en variation totale et couplage)
Soient P et Q deux lois de probabilités sur $\mathbb{N}$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on note $p_k=P(\{k\})$ et $q_k=Q(\{k\})$. On rappelle que la distance en variation totale entre P et Q est définie par $d_{\mathrm{VT}}(P,Q)=\sup_{A\subset\mathbb{N}}|P(A)-Q(A)|$.

1. Montrer que le supremum dans la définition de $d_{\mathrm{VT}}(P,Q)$ est atteint en une partie de $\mathbb{N}$ que l'on déterminera, et en déduire que $d_{\mathrm{VT}}(P,Q)=\sum_{k\in\mathbb{N}}(p_k-q_k)_+$ où pour $z\in\mathbb{R}$, $z_+=\max(z,0)$.
2. Montrer que $d_{\mathrm{VT}}(P,Q)=1-\sum_{k\in\mathbb{N}}\min(p_k,q_k)$.
3. On appelle *couplage* de P et Q un couple de variables aléatoires (X,Y) tel que $X\sim P$ et $Y\sim Q$. Montrer que pour tout couplage (X,Y) de P et Q, on a $d_{\mathrm{VT}}(P,Q)\leq\mathbb{P}(X\neq Y)$ et vérifier que le couple (X,Y) de loi donnée par : pour $(x,y)\in\mathbb{N}^2$,
$$\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\min(p_x,q_x)\mathbb{1}_{x=y}+\frac{(p_x-q_x)_+(q_y-p_y)_+}{d(P,Q)},$$
est un couplage de P et Q tel que $\mathbb{P}(X\neq Y)=d_{\mathrm{VT}}(P,Q)$.
4. Montrer que $d_{\mathrm{VT}}(P^{\otimes n},Q^{\otimes n})\leq n d_{\mathrm{VT}}(P,Q)$.
5. Soit $\lambda>0$. On prend $P=\mathcal{B}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$ et $Q=\mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $d_{\mathrm{VT}}(P,Q)\leq\lambda\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)$.