TD 11 : Convergence de lois a posteriori

Exercice 1 (Consistance dans le modèle Gamma-Poisson)
Soit $p, \lambda > 0$. On considère le modèle

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &\sim \Gamma(p,\lambda) \\ \mathbf{X} \,|\, \boldsymbol{\theta} &\sim \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta})^{\otimes n} . \end{aligned}$$

Partie A. Le but est de montrer que la loi a posteriori est consistante à vitesse (au moins) $\frac{M_n}{\sqrt{n}}$, pour n'importe quelle suite (M_n) tendant vers $+\infty$, c'est-à-dire que pour tout $\theta_0 > 0$ et toute suite (M_n) tendant vers $+\infty$, on a, sous P_{θ_0},

$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-\theta_0| \geq \frac{M_n}{\sqrt{n}} \,\Big|\, \mathbf{X}\right) = \Pi\left[\left\{\theta > 0,\ |\theta-\theta_0| \geq \frac{M_n}{\sqrt{n}}\right\} \,\Big|\, \mathbf{X}\right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 .$$

1. Rappeler la loi a posteriori, la moyenne a posteriori $m_{\mathbf{X}}$ et la variance a posteriori $v_{\mathbf{X}}$.
2. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-\theta_0| \geq \frac{M_n}{\sqrt{n}} \,\Big|\, \mathbf{X}\right) \leq \mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-m_{\mathbf{X}}| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}} \,\Big|\, \mathbf{X}\right) + \mathbb{1}_{\left\{|m_{\mathbf{X}}-\theta_0| \geq \frac{M_n}{2\sqrt{n}}\right\}} .$$
3. Montrer que, sous P_{θ_0},
$$\frac{\sqrt{n}(m_{\mathbf{X}}-\theta_0)}{M_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{et} \quad \frac{n v_{\mathbf{X}}}{M_n^2} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$
4. Conclure.

Partie B. Nous allons maintenant montrer une borne inférieure correspondante : pour tout $\theta_0 > 0$ et toute suite (m_n) tendant vers 0, on a, sous P_{θ_0},

$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta}-\theta_0| \leq \frac{m_n}{\sqrt{n}} \,\Big|\, \mathbf{X}\right) = \Pi\left[\left\{\theta > 0,\ |\theta-\theta_0| \leq \frac{m_n}{\sqrt{n}}\right\} \,\Big|\, \mathbf{X}\right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 .$$

1. Justifier que le modèle $(P_\theta)_{\theta>0}$ est régulier au sens fort et préciser l'information de Fisher $I(\theta_0)$. Pour la suite, on admettra qu'on peut appliquer le Théorème de Bernstein-von Mises.
2. Montrer que, si on note
$$A_n := \left[\theta_0 - \frac{m_n}{\sqrt{n}}\ ;\ \theta_0 + \frac{m_n}{\sqrt{n}}\right] \cap]0,+\infty[= \left\{\theta > 0,\ |\theta-\theta_0| \leq \frac{m_n}{\sqrt{n}}\right\}$$
et $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)(B)$ la probabilité qu'une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ tombe dans le borélien B, alors sous P_{θ_0}
$$\Pi\left[A_n \,|\, \mathbf{X}\right] - \mathcal{N}\left(\overline{X}_n, \frac{\theta_0}{n}\right)(A_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 .$$

3. En notant Φ la fonction de répartition de la loi normale standard, montrer que

$$\mathcal{N}\left(\overline{X}_n, \frac{\theta_0}{n}\right)(A_n) \leq 2\Phi(m_n/\sqrt{\theta_0}) - 1.$$

4. Conclure.

Exercice 2 (Consistance dans le modèle gaussien)
On considère le modèle gaussien $\mathcal{P} = \{P_\theta^{\otimes n},\ \theta \in \mathbb{R}\}$ avec $P_\theta = \mathcal{N}(\theta, 1)$. On dispose de n observations $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ et on se place dans le cadre bayésien

$$\boldsymbol{\theta} \sim \Pi = \mathcal{N}(a, 1)$$
$$\mathbf{X} \,\big|\, \boldsymbol{\theta} \sim P_{\boldsymbol{\theta}}^{\otimes n},$$

où a est un réel fixé.

1. En reprenant le raisonnement de l'exercice précédent, montrer que pour toute suite (M_n) tendant vers $+\infty$, sous P_{θ_0},
$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - \theta_0| \geq \frac{M_n}{\sqrt{n}} \,\big|\, \mathbf{X}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$
2. A partir de l'expression de la loi a posteriori $\Pi[\cdot \,|\, \mathbf{X}]$, montrer que
$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - \theta_0| \leq \frac{m_n}{\sqrt{n}} \,\big|\, \mathbf{X}\right) \leq \mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0,1)| \leq m_n\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right).$$
En déduire que, pour tout $m_n \to 0$, on a, sous P_{θ_0},
$$\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - \theta_0| \leq \frac{m_n}{\sqrt{n}} \,\big|\, \mathbf{X}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$
3. Interpréter ces résultats du point de vue de la vitesse de convergence.

Exercice 3 (Intervalles de crédibilité, intervalles de confiance)
On met une loi a priori $\mathrm{Beta}(a, b)$ sur $\boldsymbol{\theta}$, avec $a > 0$ et $b > 0$, et on considère le modèle : $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \,\big|\, \boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{B}(\boldsymbol{\theta})^{\otimes n}$. On rappelle que si $T \sim \mathrm{Beta}(a, b)$,

$$\mathbb{E}[T] = \frac{a}{a+b}, \qquad \mathrm{Var}\,(T) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Par ailleurs, si l'on note respectivement ϕ et Φ les densité et fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a $\Phi(-x) \sim \phi(x)/x$ lorsque $x \to +\infty$, et $\Phi^{-1}(1-\alpha) \sim \sqrt{2\log(1/\alpha)}$ lorsque $\alpha \to 0^+$.

1. Soit $0 < \alpha < 1$. Donner un intervalle $I^T(\mathbf{X})$ de crédibilité au moins $(1-\alpha)$, centré en la moyenne a posteriori $m_{\mathbf{X}}$.
2. Soit $\theta_0 \in]0, 1[$. En notant $v_{\mathbf{X}}$ la variance a posteriori, montrer que, sous P_{θ_0},
$$n v_{\mathbf{X}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_0(1 - \theta_0)$$
et en déduire que
$$\frac{m_{\mathbf{X}} - \theta_0}{\sqrt{v_{\mathbf{X}}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$
Montrer que $I^T(\mathbf{X})$ est un intervalle de confiance asymptotique sous P_{θ_0}, dont on précisera le niveau en fonction de α.

3. Nous admettons que le théorème BvM s'applique. Montrer que la loi a posteriori converge en variation totale (vers quelle loi ?) sous P_{θ_0}.
4. Soit $I^B(\mathbf{X}) = [a_n(\mathbf{X}), b_n(\mathbf{X})]$ l'intervalle défini par les quantiles $\alpha/2$ et $1-\alpha/2$ de la loi a posteriori. Donner l'expression asymptotique de $a_n(\mathbf{X})$ et $b_n(\mathbf{X})$ sous P_{θ_0}.
5. Comparer $I^T(\mathbf{X})$ et $I^B(\mathbf{X})$.

Exercice 4 (Test consistant I)
On considère le modèle d'échantillonnage de Bernoulli $\mathcal{P} = \{\mathcal{B}(\theta)^{\otimes n},\, \theta \in [0,1]\}$ et, pour $0 < p < q < 1$, on souhaite tester

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = p \qquad \text{contre} \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} = q\,.$$

Pour cela, on choisit comme loi a priori $\Pi = \frac{1}{2}\delta_p + \frac{1}{2}\delta_q$, et l'on considère le modèle : $\boldsymbol{\theta} \sim \Pi$ et $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \,\big|\, \boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{B}(\boldsymbol{\theta})^{\otimes n}$.

1. Déterminer le test de Bayes pour Π et la perte équilibrée, noté φ^*, et l'écrire sous la forme $\varphi^*(\mathbf{X}) = \mathbb{1}_{\{\overline{X}_n \geq c_{p,q}\}}$, pour une certaine constante $c_{p,q}$ à déterminer.
2. Le test φ^* est-il consistant ?
3. On considère le test
$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbb{1}_{\{\overline{X}_n \geq \frac{p+q}{2}\}}\,.$$
En utilisant l'inégalité de Hoeffding, montrer que $\mathbf{R}_B(\Pi, \varphi) \leq e^{-\frac{(q-p)^2 n}{2}}$, et en déduire que le test φ est consistant.

Exercice 5 (Test consistant II)
Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \,\big|\, \boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}, 1)^{\otimes n}$. On considère le problème de test $H_0 :\ \boldsymbol{\theta} = 0$ versus $H_1 :\ \boldsymbol{\theta} \neq 0$, et on choisit une loi a priori Π de la forme $\Pi = \alpha\delta_0 + (1-\alpha)\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\alpha \in]0,1[$ et $\sigma^2 > 0$. On rappelle que le test de Bayes pour Π et la perte équilibrée est

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbb{1}_{\left\{\alpha\sqrt{\sigma^2 n + 1} \leq (1-\alpha)\,\mathrm{e}^{\frac{(n\overline{X}_n)^2}{2(n+\sigma^{-2})}}\right\}}\,.$$

Montrer qu'il est consistant.

Exercice 6 (Un cas de non-consistance)
On considère le modèle gaussien $\mathcal{P} = \{P_\theta^{\otimes n},\ \theta \in \mathbb{R}\}$ avec $P_\theta = \mathcal{N}(\theta, 1)$. On dispose de n observations $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ et on se place dans le cadre bayésien

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \,\big|\, \boldsymbol{\theta} &\sim P_{\boldsymbol{\theta}}^{\otimes n} \\ \boldsymbol{\theta} &\sim \Pi = \mathrm{Unif}[0,1]. \end{aligned}$$

On rappelle que si l'on note respectivement ϕ et Φ les densité et fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a $\Phi(-x) \sim \phi(x)/x$ lorsque $x \to +\infty$. Par ailleurs, on appelle *loi normale tronquée* sur l'intervalle $J = [a,b]$ la loi de densité sur $\mathbb{R}$ proportionnelle à

$$\phi_{\mu,\sigma^2}(x)\mathbb{1}_J(x),$$

pour ϕ_{μ,σ^2} la densité d'une $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Montrer que la loi a posteriori $\Pi[\cdot \,|\, \mathbf{X}]$ est une loi gaussienne tronquée, de densité $\pi(\cdot \,|\, \mathbf{X})$ vérifiant pour tout θ
$$\pi(\theta \,|\, \mathbf{X}) \geq \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{n}{2}(\theta - \overline{X}_n)^2\right\} \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta).$$

2. On étudie maintenant le comportement de $\Pi[\cdot \,|\, \mathbf{X}]$ sous P_{θ_0}.

   (a) Dans cette question $\theta_0 \in (0,1)$. Introduisons l'événement
   $$\mathcal{E}_n = \left\{|\overline{X}_n - \theta_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$
   Justifier que, sous P_{θ_0}, on a $\mathbb{P}_{\theta_0}(\mathcal{E}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Montrer que, pour ε assez petit,
   $$\mathbb{1}_{\mathcal{E}_n} \mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - \theta_0| \leq \varepsilon \,\middle|\, \mathbf{X}\right) \geq \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{n}/2}^{\varepsilon\sqrt{n}/2} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u.$$
   En déduire que
   $$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\mathbb{P}\left(|\boldsymbol{\theta} - \theta_0| \leq \varepsilon \,\middle|\, \mathbf{X}\right)\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$
   et conclure.

   (b) On suppose $\theta_0 \notin [0,1]$. La loi a posteriori est-elle consistante ?

   (c) Soit $\theta_0 \geq 1$ et $0 < \varepsilon < 1$. Si on note $A_\varepsilon = \{\theta,\ 1 - \varepsilon \leq \theta \leq 1\}$, montrer que
   $$\Pi[A_\varepsilon^c \,|\, \mathbf{X}] = \frac{\int_{-\sqrt{n}\overline{X}_n}^{-\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1 + \varepsilon)} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u}{\int_{-\sqrt{n}\overline{X}_n}^{-\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1)} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u}.$$
   En déduire que
   $$\Pi[A_\varepsilon^c \,|\, \mathbf{X}] \leq \frac{\Phi\left(-\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1 + \varepsilon)\right)}{\Phi\left(-\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1)\right)}.$$
   Si on note $\mathcal{E}_n = \left\{|\overline{X}_n - \theta_0| \leq \frac{\varepsilon}{4}\right\}$, majorer $\mathbb{1}_{\mathcal{E}_n}\Pi[A_\varepsilon^c \,|\, \mathbf{X}]$ par une quantité tendant vers 0 lorsque $n \to \infty$ et en déduire que
   $$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\Pi[A_\varepsilon \,|\, \mathbf{X}]\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   (d) Si $\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = 1$, la loi a posteriori est-elle consistante ?