TD 12 : Simulation de lois a posteriori

Exercice 1 (Algorithme de Metropolis : un exemple jouet)
On veut simuler (approximativement) une loi normale centrée réduite grâce à l'algorithme de Metropolis.

1. On choisit comme noyau de proposition q de sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $q(x, \cdot)$ corresponde à la densité de la variable aléatoire $Y = x + U$ avec $U \sim \mathcal{U}([-1/2, 1/2])$. Autrement dit, $q(x, \cdot)$ est la densité de probabilité d'aller en y sachant qu'on part du point x. Déterminer $q(x, y)$. En déduire $q(y, x)$.
2. Traduire l'algorithme de Metropolis-Hastings dans ce cadre.

Exercice 2 (Metropolis vs Rejet)
On considère la loi F de densité f sur $\mathbb{R}^2$, telle que

$$f(u, v) \propto (\cos u)^2 (\sin v)^2 \, \mathrm{e}^{-0.05(u^2+v^2)} .$$

1. On veut simuler (approximativement) selon la loi F en utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings. Partant de $x = (u, v)$, on considère le noyau de proposition q défini de sorte que $q(x, \cdot)$ corresponde à la densité de $Y = x + \sigma W$, où $\sigma > 0$ est un paramètre de réglage et $W \sim \mathcal{N}\left(\binom{0}{0}, I_2\right)$, loi gaussienne centrée réduite dans $\mathbb{R}^2$. Expliquer pourquoi nous sommes dans le cadre de l'algorithme de Metropolis.
2. Proposer une méthode de rejet pour simuler suivant la loi F à partir d'une loi instrumentale gaussienne.

Exercice 3 (Algorithme de Gibbs)
Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité jointe sur $\mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{-y} \mathbb{1}_{0 \leq x \leq y}$.

1. Déterminer la loi marginale de X.
2. Sachant $X = x \geq 0$, déterminer la densité conditionnelle de $Y \,\big|\, X = x$, notée $f_{Y \,|\, X=x}$. Quelle loi reconnaissez-vous ?
3. En déduire une méthode pour simuler une réalisation du couple aléatoire (X, Y).
4. Sachant $Y = y \geq 0$, déterminer la densité conditionnelle de $X \,\big|\, Y = y$, notée $f_{X \,|\, Y=y}$. Quelle loi reconnaissez-vous ?
5. En partant par exemple du point $(x_0, y_0) = (0, 1)$, proposer un échantillonneur de Gibbs pour obtenir une trajectoire $((X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n))$ de densité cible f.
6. Des deux méthodes proposées, laquelle choisiriez-vous pour simuler selon la densité f ?

Exercice 4 (Algorithme de Metropolis pour l'échantillonnage d'une loi a posteriori)
On considère le modèle bayésien :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta} &\sim \mathcal{U}([0,1]) \\ \mathbf{X} \,\big|\, \boldsymbol{\theta} &\sim (\boldsymbol{\theta}\mathcal{N}(1,1) + (1-\boldsymbol{\theta})\mathcal{N}(-1,1))^{\otimes n}\,.\end{aligned}$$

Notons φ la densité de $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, sachant $\boldsymbol{\theta} = \theta$, X_1 a pour densité $\theta\varphi(x-1) + (1-\theta)\varphi(x+1)$.

1. Soient $\theta \in [0,1]$ et trois variables aléatoires Y_1, Y_{-1} et Z de lois respectives $\mathcal{N}(1,1)$, $\mathcal{N}(-1,1)$ et $\mathcal{B}(\theta)$, telles que $Y_1 \perp\!\!\!\perp Z$ et $Y_{-1} \perp\!\!\!\perp Z$. Montrer que, sachant $\boldsymbol{\theta} = \theta$, $X_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} ZY_1 + (1-Z)Y_{-1}$. En déduire une méthode de simulation de $\mathbf{X}$.
2. Expliciter la loi a posteriori $\Pi[\cdot \,|\, \mathbf{X}]$ et un estimateur de Bayes $\widehat{\theta}_n$ pour la perte quadratique.
3. En déduire un estimateur Monte-Carlo $\widehat{\theta}_n^N$ de $\widehat{\theta}_n$.
4. On souhaite générer un échantillon suivant la loi a posteriori $\Pi[\cdot \,|\, \mathbf{X}]$. On adopte pour cela la méthode de Metropolis-Hastings (qui fournira donc approximativement un échantillon de loi $\Pi[\cdot \,|\, \mathbf{X}]$, i.e. une trajectoire de loi cible $\Pi[\cdot \,|\, \mathbf{X}]$) avec comme noyau de proposition q, de sorte que $q(\theta,\theta') = \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta')$. Quelle est la loi de proposition ? Que vaut le rapport de Metropolis-Hastings $r(\theta,\theta')$?

Exercice 5 (Slice sampler)
On considère la fonction $f : (u,x) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{1}_{0<u<\frac{1}{2}\exp\left(-\sqrt{x}\right)}$.

1. Montrer que $g : x \mapsto \frac{1}{2}\exp\left(-\sqrt{x}\right)\mathbb{1}_{x>0}$ est une densité sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est une densité sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit (U,X) de densité f. Déterminer, pour tout $(u,x) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, les lois conditionnelles de $U \,|\, X = x$ et $X \,|\, U = u$.
3. En déduire un échantillonneur de Gibbs pour obtenir une trajectoire $((U_1,X_1),\ldots,(U_n,X_n))$ de densité cible f.