# TD 5 : Comparaison et optimalité des estimateurs

**Exercice 1 (Régularité et information de Fisher)**

1. Soit $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de densité $f_\theta(x) = f(x - \theta)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, pour une certaine densité $f$ sur $\mathbb{R}$ connue et un paramètre inconnu $\theta \in \mathbb{R}$. Donner des conditions suffisantes sur $f$ pour que le modèle soit régulier et préciser la valeur de l'information de Fisher.
2. Pour chacun des modèles suivants, dire si le modèle est régulier et si oui calculer l'information de Fisher :
   (a) $f_\theta(x) = \exp(-(x-\theta)^2/2)/(2\pi)^{1/2}$, $\theta \in \mathbb{R}$ ;
   (b) $f_\theta(x) = \theta^{-1}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$, $\theta > 0$ ;
   (c) $f_\theta(x) = c_1(1-(x-\theta)^2)\mathbb{1}_{[\theta-1,\theta+1]}(x)$, $\theta \in \mathbb{R}$, pour une constante $c_1 > 0$ à déterminer ;
   (d) $f_\theta(x) = c_2(1-(x-\theta)^2)^2\mathbb{1}_{[\theta-1,\theta+1]}(x)$, $\theta \in \mathbb{R}$, pour une constante $c_2 > 0$ à déterminer.

**Exercice 2 (Loi de Laplace)** Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. i.i.d. de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}, \ \ x \in \mathbb{R},$$

pour un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Le modèle est-il régulier ? Si oui, calculer l'information de Fisher $I_1(\theta)$ du modèle à une observation.
2. Donner un estimateur du maximum de vraisemblance ainsi que sa loi limite.
3. Est-il asymptotiquement efficace ?

**Exercice 3 (Loi Bêta)** On considère la densité

$$f(y) = \frac{1}{2(1-y)^{1/2}}\mathbb{1}_{[0,1[}(y).$$

1. Si $Y$ a pour densité $f$, quelle est la densité $f_\theta$ de $X = \theta Y$, où $\theta > 0$ ?
2. Le modèle $(f_\theta)_{\theta>0}$ est-il régulier ?
3. On observe un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de même loi que $X$. L'estimateur du maximum de vraisemblance est-il bien défini ? Proposer un estimateur $\widehat{\theta}_n$ de $\theta$ et trouver la loi limite de $n(\theta - \widehat{\theta}_n)^{1/2}$.
4. Déterminer la médiane de la loi de $X$. En déduire un nouvel estimateur $\widetilde{\theta}_n$. Entre $\widehat{\theta}_n$ et $\widetilde{\theta}_n$, lequel est préférable ?

**Exercice 4** ($\star$) **(Information de Fisher nulle)** Soient $\theta \in \mathbb{R}$ un paramètre inconnu et $X_1, \dots, X_n$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$.

1. Déterminer l'EMV $\widehat{\theta}_n$ de $\theta$ et montrer qu'il est asymptotiquement efficace.
2. On définit le paramètre inconnu $\eta \in \mathbb{R}$ de sorte que $\theta = \eta^3$. Proposer un estimateur $\widehat{\eta}_n$ consistant de $\eta$. Quelle est l'information de Fisher pour ce nouveau modèle ? Que remarque-t-on ?
3. Supposons $\eta \neq 0$. Quelle est la loi limite correctement normalisée de $\widehat{\eta}_n$ ?
4. Plaçons-nous maintenant dans le cas où $\eta = 0$. Déterminer la loi limite de $\sqrt{n}\overline{X}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$ et en déduire la loi limite de $\widehat{\eta}_n$ adéquatement normalisé.
5. Calculer la densité de la loi limite obtenue à la question précédente. Conclure sur l'efficacité asymptotique de $\widehat{\eta}_n$.

**Exercice 5** **(Loi géométrique, décembre 2016)** Soit $0 < \theta < 1$ un paramètre inconnu. On dit que la variable aléatoire $X$ suit une loi géométrique de paramètre $\theta$ si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ avec

$$\forall x \in \mathbb{N}^\star \qquad \mathbb{P}(X = x) = f_\theta(x) = \theta(1-\theta)^{x-1},$$

auquel cas $\mathbb{E}[X] = 1/\theta$ et $\mathrm{Var}(X) = (1-\theta)/\theta^2$. Dans toute la suite, on suppose disposer de $n$ observations i.i.d. $X_1, \dots, X_n$ de densité $f_\theta$ par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^\star$.

1. Déterminer un estimateur $\widehat{\theta}_n$ par maximum de vraisemblance. Est-il consistant ? Asymptotiquement normal ?
2. Montrer que le modèle $(f_\theta)_{0<\theta<1}$ est régulier. L'estimateur $\widehat{\theta}_n$ est-il asymptotiquement efficace ?
3. Soit $0 < \alpha < 1$. On veut tester $H_0 : \theta = 1/2$ contre $H_1 : \theta \neq 1/2$. Proposer un test de niveau asymptotique $\alpha$. Pour $n = 50$ et une moyenne empirique $\overline{x}_n = \overline{x}_{50} = 5/3$, préciser la p-valeur associée.

**Exercice 6** **(Loi Bêta dilatée et translatée)** Soien $\theta \in \mathbb{R}$ et $X_1, \dots, x_n$ i.i.d. de densité :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f_k(x, \theta) = c_k \left[1 - (x-\theta)^2\right]^{k-1} \mathbb{1}_{[\theta-1, \theta+1]}(x),$$

où $k \geq 1$ est connu et $c_k = \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)^2 2^{2k-1}}$. Cette densité est celle d'une variable aléatoire qui s'obtient par homothétie de rapport 2 et translation de $\theta - 1$ d'une variable de loi $\mathrm{Beta}(k, k)$.
Dans toute la suite, on appellera $\widehat{\theta}_n$ un estimateur du maximum de vraisemblance et on étudiera ses propriétés.

**Partie 1** On se place tout d'abord dans la situation où $k > 2$.

1. Existence de $\widehat{\theta}_n$.
   (a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que l'intervalle $[X_{(n)} - 1, X_{(1)} + 1]$ est d'intérieur non-vide $\mathbb{P}_\theta$-p.s. et que si $\widehat{\theta}_n$ existe, alors $\widehat{\theta}_n \in ]X_{(n)} - 1, X_{(1)} + 1[$.
   (b) Montrer que pour $\theta' \in ]X_{(n)} - 1, X_{(1)} + 1[$, la dérivée $\ell_n'(\theta')$ de la log-vraisemblance s'écrit :
   $$\ell_n'(\theta') = (k-1)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{1-(X_i-\theta')} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+(X_i-\theta')}\right).$$
   Prouver que

i. $\ell'_n(\theta') \xrightarrow[\theta' \to X_{(n)}-1]{} \infty$ ;

ii. $\ell'_n(\theta') \xrightarrow[\theta' \to X_{(1)}+1]{} -\infty$ ;

iii. $\theta' \in ]X_{(n)} - 1, X_{(1)} + 1[ \mapsto \ell'_n(\theta')$ est strictement décroissante.

(c) En déduire que l'estimateur du maximum de vraisemblance est l'unique solution de $\ell'_n(\theta) = 0$. Montrer que la résolution de $\ell'_n(\theta) = 0$ nécessite de rechercher les racines d'un polynôme de degré élevé.

2. Consistance de $\widehat{\theta}_n$.

(a) Montrer que l'on peut trouver une constante $C$ (ne dépendant pas de $\theta$) telle que, pour $\epsilon \in [0, 1]$ :

$$\mathbb{P}_\theta(X_1 \leq \theta - 1 + \epsilon) \geq C\epsilon^k.$$

En déduire que :

$$\mathbb{P}_\theta\left((X_{(1)} + 1) - \theta \geq \epsilon\right) = \mathbb{P}_\theta\left(X_{(1)} - (\theta - 1) \geq \epsilon\right) \leq (1 - C\epsilon^k)^n.$$

(b) Par symétrie, montrer que pour tout $\epsilon \in [0, 1]$ :

$$\mathbb{P}_\theta(\theta + 1 - \epsilon \leq X_1) \geq C\epsilon^k$$

et

$$\mathbb{P}_\theta\left(\theta - (X_{(n)} - 1) \geq \epsilon\right) = \mathbb{P}_\theta\left((\theta + 1) - X_{(n)} \geq \epsilon\right) \leq (1 - C\epsilon^k)^n.$$

(c) En déduire que $\widehat{\theta}_n$ est consistant. Est-il fortement consistant ?

3. Le modèle statistique $\{f_k(\cdot, \theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ est-il régulier ?
<u>Indication</u> : Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta)$.

**Partie 2** On suppose maintenant que $k \leq 2$.

1. Que dire des propriétés de $\widehat{\theta}_n$ ?
2. Soit $\alpha > 0$. À l'aide de la question 2, montrer que pour tout $\epsilon > 0$ :

$$\mathbb{P}_\theta\left(n^\alpha|\widehat{\theta}_n - \theta| > \epsilon\right) \leq 2\left(1 - C\frac{\epsilon^k}{n^{\alpha k}}\right)^n.$$

3. Conclure sur la vitesse de convergence de $\widehat{\theta}_n$. Quand $k < 2$, cette convergence est-elle plus rapide que lorsque le modèle est régulier (i.e. $k > 2$) ? Qu'en est-il lorsque $k = 2$ ?

**Exercice 7** ($\star$) **(Modèle pathologique)** Soit $0 < \theta < 1$, $U$ une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$, et $X$ définie par : $X = \mathbb{1}_{U \leq \theta/2}$ si $0 < \theta \leq 1/2$ et $X = \mathbb{1}_{U \leq \theta - 1/4}$ si $1/2 < \theta < 1$.

1. Quelles valeurs peut prendre la variable $X$ ? En déduire une mesure dominante naturelle. Donner la densité $g_\theta(x)$ par rapport à cette mesure dominante.
2. Représenter les fonctions $\theta \mapsto g_\theta(x)$ pour $x = 0$ et $x = 1$. Quelle est leur régularité (continuité, etc.) ?
3. Le modèle $(g_\theta)_{0<\theta<1}$ est-il régulier ?

**Exercice 8** ($\star$) **(Exponentielle translatée)** Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon de la loi de densité

$$f_\theta(x) = \exp(-(x - \theta))\mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(x),$$

où $\theta > 0$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widetilde{\theta}_n$ de $\theta$ et donner la loi de $n(\widetilde{\theta}_n - \theta)$. Construire, à partir de cet estimateur, un estimateur sans biais que l'on notera $\widehat{\theta}$, et dont on calculera le risque quadratique.
2. Que peut-on dire de l'information de Fisher du modèle ?
3. Soit $\ell_1 \colon \theta > 0 \mapsto \ln(f_\theta(X_1))$ la log-vraisemblance de $X_1$. Justifier que $\ell_1$ et $\ell_1'$ sont bien définies $\mathbb{P}_\theta$-p.s. et calculer
$$J_1(\theta) = \mathrm{Var}_\theta\left(\ell_1'(\theta)\right).$$
Que constate-t-on si l'on cherche à appliquer l'inégalité de Cramér-Rao à $\widehat{\theta}$ à tout prix ?

**Exercice 9 (Loi normale et minimisation de l'information de Fisher)** On considère une densité centrée réduite $f$ de classe $C^1$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour le modèle de translation associé, sous réserve de convergence de l'intégrale, l'information de Fisher est donc
$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{f'(x)^2}{f(x)} dx.$$

1. Si on note $f_1(x) = x\sqrt{f(x)}$ et $f_2(x) = f'(x)/\sqrt{f(x)}$, montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} (f_1(x) + f_2(x))^2 dx = I - 1.$$
2. En déduire que $I \geq 1$ avec égalité si et seulement si $f$ est la densité d'une gaussienne centrée réduite.