TD 8 : Régions de crédibilité

Exercice 1 (Poisson et Gamma)
Pour a et b strictement positifs fixés, on considère le cadre bayésien suivant

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &\sim \Gamma(a,b) = \Pi \\ \mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_n) \,\big|\, \boldsymbol{\theta} &\sim \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta})^{\otimes n} \end{aligned}$$

1. Déterminer la loi a posteriori $\Pi[\cdot \,|\, \mathbf{X}]$. Commenter.
2. Calculer la moyenne a posteriori $m_{\mathbf{X}}$ ainsi que la variance a posteriori
$$v_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\left[(\boldsymbol{\theta} - m_{\mathbf{X}})^2 \,\big|\, \mathbf{X}\right].$$
3. Construire un intervalle de crédibilité $I(\mathbf{X})$ de niveau au moins $(1-\alpha)$ en utilisant l'inégalité de Tchebychev et la question précédente.
4. Montrer que $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\theta}$ (on pourra utiliser l'inégalité de Tchebychev).
5. Comment varie la taille de $I(\mathbf{X})$ avec n ?

Exercice 2 (Régions PHD)

1. Si une loi a posteriori sur $\mathbb{R}$ a une densité continue, symétrique par rapport à m, strictement croissante sur $]-\infty, m]$ (et donc strictement décroissante sur $[m, +\infty[$), montrer que les régions PHD de niveau $1-\alpha$ coïncident avec les intervalles définis par les quantiles d'ordres $\alpha/2$ et $1-\alpha/2$ de la densité a posteriori.
2. Donner un exemple de densité a posteriori pour laquelle les deux types de régions $(1-\alpha)$-crédibles de la question précédente ne coïncident pas.
3. On considère le modèle gaussien $\mathbf{X} \,|\, \boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}, 1)^{\otimes n}$ avec $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Construire un intervalle de crédibilité $J(\mathbf{X})$ de niveau $(1-\alpha)$ en utilisant les quantiles de la loi a posteriori. Est-ce une région PHD ?

Exercice 3 (Méthodes de Monte-Carlo et de rejet)
Soit le modèle bayésien :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta} \sim \text{Cauchy} \\ \mathbf{X} \,|\, \boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}, 1)^{\otimes n}. \end{cases}$$

1. Déterminer la densité $\pi(\cdot \,|\, \mathbf{X})$ de la loi a posteriori et l'estimateur de Bayes pour la perte quadratique, noté $\widehat{\theta}_n$.
2. En déduire un estimateur Monte-Carlo $\widehat{\theta}_n^N$ de l'estimateur de Bayes $\widehat{\theta}_n$, construit sur un échantillon $(\boldsymbol{\theta}_j)_{1 \leq j \leq N}$ issu de la loi a priori.

3. On se place momentanément dans le cadre général où $\boldsymbol{\theta} \sim \Pi$ et $\mathbf{X} \,\big|\, \boldsymbol{\theta} \sim P_{\boldsymbol{\theta}}$, avec P_θ de densité p_θ, et on souhaite échantillonner selon la loi a posteriori $\Pi[\cdot \,|\, \mathbf{X}]$. Décrire l'algorithme du rejet avec pour loi instrumentale la loi a priori Π et montrer que la constante optimale m est liée à l'estimateur du maximum de vraisemblance :
$$\widehat{\theta}_n^{MV} \in \arg\max_\theta p_\theta(\mathbf{X}).$$
La méthode du rejet fait-elle explicitement intervenir la densité marginale de $\mathbf{X}$?
4. Expliciter le calcul du rapport d'acceptation dans le cas particulier du modèle bayésien choisi dans cet exercice.

Exercice 4 (Famille gaussienne à moyenne et variance inconnues)
On rappelle que la loi inverse-Gamma $\mathrm{IG}(a,b)$, avec $a,b>0$, est la loi sur $\mathbb{R}_+^*$ de densité
$$x \mapsto \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-(a+1)} e^{-b/x}.$$
La loi de Student à p degrés de liberté a une densité f_p sur $\mathbb{R}$ donnée par $f_p(u) \propto \left(1+\frac{u^2}{p}\right)^{-\frac{p+1}{2}}$. Enfin, on appelle loi normale inverse-gamma, notée $\mathrm{NIG}(a,b,c,d)$, la loi de $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ définie par le schéma
$$\boldsymbol{\mu} \,|\, \boldsymbol{\sigma}^2 \sim \mathcal{N}\left(a, \frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{b}\right)$$
$$\boldsymbol{\sigma}^2 \sim \mathrm{IG}(c,d).$$
On considère le modèle $\mathcal{P} = \{P_\theta = P_{\mu,\sigma^2} = \mathcal{N}(\mu,\sigma^2),\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0\}$ où l'on a posé $\theta = (\mu, \sigma^2)$. On dispose de n observations $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, de loi $P_\theta^{\otimes n}$ sachant $\boldsymbol{\theta} = \theta$, avec $n \geq 2$. On considère l'a priori impropre Π donné par
$$\mathrm{d}\Pi(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\sigma^2\,.$$
1. Vérifier que la loi a posteriori $\mathcal{L}((\mu,\sigma^2) \,|\, \mathbf{X})$ est bien définie.
2. Montrer que $\mathcal{L}(\sigma^2 \,|\, \mathbf{X})$ est une loi $\mathrm{IG}(\frac{n-1}{2}, \frac{ns_{\mathbf{X}}}{2})$, où $s_{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2$.
3. Montrer que $\mathcal{L}(\mu \,|\, \sigma^2, \mathbf{X})$ est une loi normale et en déduire que la loi a posteriori $\mathcal{L}((\mu,\sigma^2) \,|\, \mathbf{X})$ est une loi normale inverse-gamma.
4. Montrer que la loi a posteriori de μ est liée à une loi de Student comme suit :
$$\mathcal{L}\left(\frac{\mu - \overline{X}_n}{\sqrt{\frac{s_{\mathbf{X}}}{n-1}}} \,\Big|\, \mathbf{X}\right) = \mathcal{T}(n-1)\,,$$
En déduire une région de crédibilité pour μ au niveau $1-\alpha$.

Exercice 5 (Famille gaussienne conjuguée dans $\mathbb{R}^d$)
Soient Λ et Σ deux matrices de covariance $d \times d$ inversibles fixées.
1. Montrer que si $\boldsymbol{\theta} \sim \Pi = \mathcal{N}(0,\Lambda)$ et
$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \,\big|\, \boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}, \Sigma)^{\otimes n}\,,$$
alors la loi a posteriori $\Pi[\cdot \,|\, \mathbf{X}]$ est $\mathcal{N}(m_{\mathbf{X}}, \Sigma_{\mathbf{X}})$, avec
$$\Sigma_{\mathbf{X}} = (n\Sigma^{-1} + \Lambda^{-1})^{-1}$$
$$m_{\mathbf{X}} = n\Sigma_{\mathbf{X}}\Sigma^{-1}\overline{X}_n.$$

2. La classe de lois a priori $\{\mathcal{N}(0,\Lambda),\ \Lambda$ symétrique définie positive$\}$ est-elle conjuguée pour le modèle $\mathcal{P}=\{\mathcal{N}(\theta,\Sigma)^{\otimes n},\ \theta\in\mathbb{R}^d\}$?

Exercice 6 ($\star$) (Urne de Polya)

Soient $a,b\in\mathbb{N}^*$ deux entiers naturels non nuls. Initialement, une urne contient a boules noires et b blanches. À chaque instant $t\geq 1$, on tire uniformément au hasard une boule dans l'urne. Si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne avec une autre boule noire. Si elle est blanche, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche. On définit

$$I_t=\begin{cases}1 & \text{si la boule tirée au temps } t \text{ est noire,}\\ 0 & \text{si la boule tirée au temps } t \text{ est blanche,}\end{cases}$$

et, pour $n\geq 1$, on note $X_n=\displaystyle\sum_{t=1}^{n} I_t$. On définit aussi $M_n=\frac{a+X_n}{a+b+n}$, la proportion de boules noires dans l'urne après n tirages. On rappelle que la fonction Beta est donnée par : pour tous $x,y>0$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\quad\text{où}\quad\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Pour $k\in\{0,\dots,n\}$, calculer $\mathbb{P}\left(I_1=\cdots=I_k=1, I_{k+1}=\cdots=I_n=0\right)$.
2. Montrer que pour toute permutation π de $\{1,\dots,n\}$, la loi de $(I_1,\dots,I_n)$ est la même que celle de $(I_{\pi(1)},\dots,I_{\pi(n)})$.
3. En déduire que pour tout $(i_1,\dots,i_n)\in\{0,1\}^n$, on a

$$\mathbb{P}\left(I_1=i_1,\dots,I_n=i_n\right)=\frac{B(a+k,b+n-k)}{B(a,b)}\,,$$

   où $k=\sum_{j=1}^n i_j$.
4. Dans cette question, on suppose $a=b=1$.
   (a) Quelle est la loi de X_n ?
   (b) Quelle est la loi limite de la variable X_n/n ? Et celle de M_n ?
5. On suppose maintenant a et b quelconques dans $\mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que X_n a la même loi que Z_n définie par le scénario bayésien suivant :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta} &\sim \mathrm{Beta}(a,b)\\ Z_n\,\big|\,\boldsymbol{\theta} &\sim \mathrm{Bin}(n,\boldsymbol{\theta})\,.\end{aligned}$$

   (b) Montrer que $Z_n/n \xrightarrow{\text{p.s.}} \boldsymbol{\theta}$ (on pourra utiliser l'inégalité de Hoeffding).
   (c) En déduire la loi limite de M_n.