TD 9 : Théorie de la décision

Exercice 1 (Modèle Gamma-Poisson)
Soient $p, \lambda > 0$. On se place dans le cadre bayésien suivant

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &\sim \Pi = \Gamma(p, \lambda)\,, \\ \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \,\big|\, \boldsymbol{\theta} &\sim \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta})^{\otimes n}\,. \end{aligned}$$

1. Quelle est la loi a posteriori de $\boldsymbol{\theta}$ sachant $\mathbf{X}$?
2. Donner un estimateur de Bayes pour la perte quadratique. On le notera $T^\star(\mathbf{X})$.
3. Montrer que pour tout $\theta > 0$, on a

$$\mathbf{R}(\theta, T^\star) = \frac{n\theta + \lambda^2 \left(\theta - \frac{p}{\lambda}\right)^2}{(n+\lambda)^2} \cdot$$

4. Montrer que le risque de Bayes pour Π vaut $\mathbf{R}_B(\Pi) = \frac{p}{\lambda(n+\lambda)}$.
5. Montrer qu'un estimateur de Bayes pour la perte $\ell(\theta, T) = \theta^3 e^{-2\theta}(\theta - T)^2$ est $\widetilde{T}(\mathbf{X}) = \frac{n\overline{X}_n + p + 3}{\lambda + n + 2}$.

Exercice 2 (Estimateurs de Bayes)
Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}, 1)$ sachant $\boldsymbol{\theta}$, et soit $\Pi = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ la loi a priori sur $\boldsymbol{\theta}$, pour $\sigma^2 > 0$ fixé.

1. Donner l'estimateur de Bayes pour la perte quadratique. Que vaut le risque de Bayes ?
2. On suppose $\sigma^2 < 2$ et on considère la fonction de perte $\ell(\theta, T) = \mathrm{e}^{\frac{3\theta^2}{4}}(\theta - T)^2$. Montrer que l'estimateur de Bayes associé est $T^*(X) = \frac{X}{\sigma^{-2} - 1/2}$, et que le risque de Bayes associé vaut l'infini si $\sigma^2 \geq 2/3$, tandis que si $\sigma^2 < 2/3$ il vaut

$$\mathbf{R}_B(\Pi, T^*) = \frac{1}{\sigma^{-2} - 1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 3\sigma^2/2}}\,.$$

Exercice 3 (De Bayes et de risque constant implique minimax)
On considère le modèle de Bernoulli $\mathcal{P} = \{\mathcal{B}(\theta)^{\otimes n},\ \theta \in]0,1[\}$ et l'on prend comme loi a priori sur $\Theta =]0,1[$ une loi $\Pi_{a,b} = \mathrm{Beta}(a, b)$, avec $a, b > 0$.

1. Donner un estimateur de Bayes $\widehat{\theta}_{a,b}(\mathbf{X})$ pour la perte quadratique.
2. On suppose $a = b$. Calculer le risque ponctuel et en déduire un estimateur minimax pour la perte quadratique.
3. L'estimateur $T = \overline{X}_n$ est-il minimax ?

Exercice 4 (Contrôle continu 2020)
On se place dans le modèle gaussien avec a priori gaussien : $\boldsymbol{\theta} \sim \Pi = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, et $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \,\big|\, \boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}, 1)^{\otimes n}$.

1. Question préliminaire : soit $s > 0$ et $Y \sim \mathcal{N}(0, s^2)$, calculer $\mathbb{E}[|Y|]$.
2. Quelle est la loi a posteriori $\Pi[\cdot \,\big|\, \mathbf{X}]$?
3. Donner un estimateur de Bayes pour la fonction de perte $\ell(\theta, T) = |\theta - T|$.
4. Calculer son risque de Bayes.
5. Montrer que l'estimateur $\overline{X}_n$ est minimax pour la perte ℓ.

Exercice 5 (Contrôle continu 2020)
On considère le modèle bayésien suivant : $\boldsymbol{\theta} \sim \text{Beta}(a, b)$ avec $a, b > 0$ et $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ avec $\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta} \sim P_{\boldsymbol{\theta}}^{\otimes n}$, où, pour tout $\theta \in [0, 1]$, la densité p_θ de P_θ par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est donnée par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_\theta(k) = (k+1)(1-\theta)^2\theta^k$. On rappelle que la variance d'une loi $\text{Beta}(a, b)$ est $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

1. Donner la loi a posteriori de $\boldsymbol{\theta}$ sachant $\mathbf{X}$. Donner la moyenne et la variance a posteriori.
2. En déduire un intervalle de crédibilité pour $\boldsymbol{\theta}$ de niveau $1 - \alpha$.
3. Déterminer un estimateur de Bayes pour la perte quadratique.
4. On considère maintenant la fonction de perte $\ell(\theta, T) = \frac{1}{(1-\theta)^2}(\theta - T)^2$.
   (a) Donner un estimateur de Bayes associé à la perte ℓ (noté T^*).
   (b) On sait simuler facilement une réalisation de $X_i \,|\, \boldsymbol{\theta}$ (c'est une loi binomiale négative). Décrire une méthode Monte-Carlo pour estimer le risque de Bayes de T^*.

Exercice 6 (Rattrapage 2020) Soit $n \geq 3$. On considère le modèle bayésien suivant : $\boldsymbol{\theta} \sim \Pi_{a,b} = \Gamma(a, b)$, pour $a, b > 0$, et $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ avec $\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta} \sim P_{\boldsymbol{\theta}}^{\otimes n}$, où, pour tout $\theta > 0$, $P_\theta = \mathcal{E}(\theta)$, loi exponentielle de paramètre θ. On rappelle que si $T \sim \Gamma(n, 1)$ alors pour tout $p < n$, on a $\mathbb{E}[T^{-p}] = \Gamma(n-p)/\Gamma(n)$.

1. Déterminer la loi a posteriori $\Pi_{a,b}[\cdot \,\big|\, \mathbf{X}]$, la moyenne a posteriori $m_{\mathbf{X}}$ et la variance a posteriori $v_{\mathbf{X}}$.

On considère la fonction de perte ℓ donnée par :

$$\forall \theta, t > 0\,,\; \ell(\theta, t) = \frac{(t-\theta)^2}{\theta^2}\,\cdot$$

2. Déterminer un estimateur de Bayes pour $\Pi_{a,b}$ et la perte ℓ. On le notera $T_{a,b}$.
3. Déterminer le risque a posteriori de $T_{a,b}$ et en déduire le risque de Bayes $\mathbf{R}_B(\Pi_{a,b})$.
4. Soit $T^*(\mathbf{X}) = \frac{n-2}{\sum_{i=1}^n X_i}$. Calculer $\mathbf{R}_{\max}(T^*)$. On pourra noter que, sous $P_\theta^{\otimes n}$, on a $\theta \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, 1)$.
5. Montrer que T^* est minimax.

Exercice 7 (Quantiles)
Soit X une variable aléatoire réelle de loi $P_{\boldsymbol{\theta}}$ sachant $\boldsymbol{\theta}$, où $\boldsymbol{\theta}$ est une variable aléatoire réelle et intégrable de loi Π. On suppose que les lois P_θ, $\theta \in \mathbb{R}$, et Π sont à densité par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire $\mathrm{d}P_\theta(x) = p_\theta(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}\Pi(\theta) = \pi(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Pour $a > 0$ et $b > 0$, soit la fonction de perte $\ell(\theta, T) = b(\theta - T)\mathbf{1}_{\theta > T} + a(T - \theta)\mathbf{1}_{\theta \leq T}$. Soit $F = F_{\boldsymbol{\theta}|X}$ la fonction de répartition de la loi a posteriori, montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\ell(\boldsymbol{\theta}, t) \,\middle|\, X\right] = b\int_t^{+\infty} (1 - F(s))\,\mathrm{d}s + a\int_{-\infty}^t F(s)\,\mathrm{d}s.$$

En déduire qu'un estimateur de Bayes pour la fonction de perte ℓ est le quantile d'ordre $b/(a+b)$ de la loi a posteriori. Que retrouve-t-on lorsque $a = b$?