

Contrôle Continu

Rappels

- Il sera tenu compte du soin apporté à la présentation et à la rédaction.
- Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat, vous pouvez l'admettre pour la suite de l'exercice.
- On suppose pouvoir simuler selon toutes les lois usuelles.

EXERCICE 1 (5 points) On considère la fonction de répartition

$$F(x) = \frac{1}{2} (x + x^2) \mathbf{1}_{0 \leq x < 1} + \mathbf{1}_{x \geq 1}.$$

On souhaite simuler X de fonction de répartition F .

1. Expliquer comment simuler X par la méthode d'inversion ?
2. Calculer la densité f associée à la fonction de répartition F . Majorer f par une fonction constante sur $[0, 1]$ et décrire une méthode de rejet pour simuler X .
3. Montrer qu'on peut voir la loi de X comme un mélange de deux lois classiques que l'on précisera et décrire une nouvelle méthode pour simuler X .
4. Des trois méthodes, laquelle choisissez-vous ?

EXERCICE 2 (5 points) On considère un couple (X, Y) dont la loi admet la densité

$$f(x, y) = x e^{-(1+y)x} \mathbf{1}_{x > 0, y > 0}.$$

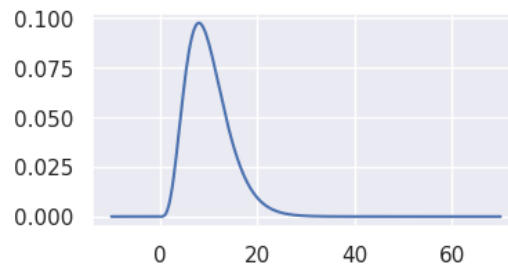
1. Soit $y > 0$, quelle est la loi de X sachant $Y = y$? Soit $x > 0$, quelle est la loi de Y sachant $X = x$? Reconnaître des lois usuelles.
2. En déduire un échantillonneur de Gibbs séquentiel admettant f pour loi stationnaire.
3. La chaîne de Markov ainsi construite est-elle irréductible ? apériodique ? S'ils sont vérifiés, formuler précisément la convergence en variation totale et le Théorème ergodique.
4. Quelle est la loi de X ? En déduire une méthode pour générer un couple (X, Y) de densité f .
5. Entre cette méthode et l'échantillonneur de Gibbs, laquelle choisissez-vous ?

EXERCICE 3 (5 points)

1. Que représente le script suivant ? Quelle est la loi considérée ?

```
[3]: dist = stats.gamma(a=5, scale=2)

t = np.linspace(-10, 70, num=500)
plt.figure(figsize=(4, 2))
plt.plot(t, dist.pdf(t));
```



2. Le script suivant affiche une réalisation d'un estimateur $\hat{I}_n$. Donner la formulation de cet estimateur et justifier sa convergence vers une quantité I à préciser (on ne demande pas de calculer I).

```
[4]: n = 10**5

x = dist.rvs(size=n)
est = np.mean( np.exp(-(x-50)**2/2) )

print(f"{est:.3e}")
```

6.395e-13

3. On souhaite afficher l'évolution de $\hat{I}_n$ en fonction de n . Par quoi faut-il remplacer ??? dans le script ci-dessous ?

```
[6]: n_range = np.arange(1, n+1)
     est_cum = ???

     plt.plot(n_range, est_cum);
```

4. Proposer un estimateur Monte-Carlo par échantillonnage préférentiel de I , noté $\tilde{I}_n$.
 5. Par quoi faut-il remplacer ??? et \$\$\$ ci-dessous pour implémenter l'estimateur $\tilde{I}_n$?

```
[5]: aux = ???

y = aux.rvs(size=n)
estEP = $$$

print(f"{estEP:.3e}")
```

6. L'estimateur $\tilde{I}_n$ correctement normalisé dispose-t-il d'une variance asymptotique finie ?

Rappel : La loi Gamma(a, b) (où $a > 0$ et $b > 0$) a une densité proportionnelle à $x \mapsto x^{a-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{x \geq 0}$.

EXERCICE 4 (5 points)

1. Pour $\mu \geq 0$ et $\sigma > 0$, on note $\mathcal{N}_+(\mu, \sigma^2)$ la loi de densité f vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \propto e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

Expliquer en quoi la fonction ci-dessous simule par rejet selon une loi de la forme $\mathcal{N}_+(\mu, 1)$.

```
[8]: def sample(loc=0, size=1):
    aux = stats.norm(loc=loc)
    TryAgain = True
    while TryAgain:
        x = aux.rvs(size=3*size)
        x = x[x >= 0]
        TryAgain = (x.size < size)
    return x[:size]
```

2. On considère le schéma bayésien suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta} \sim \chi_4^2 \\ \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N) \mid \boldsymbol{\theta} \sim (\mathcal{N}_+(\boldsymbol{\theta}, 1))^{\otimes N}. \end{cases}$$

Compléter le code suivant pour simuler une réalisation $\mathbf{X}$ du vecteur aléatoire $\mathbf{X}$.

```
[9]: N = 200

prior = stats.chi2(df=4)
```

3. Expliciter, à une constante multiplicative près, la loi a posteriori $\Pi[\cdot \mid \mathbf{X}]$.

Rappel : Pour un entier non nul d , la loi χ_d^2 a une densité proportionnelle à $x \mapsto x^{d/2-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{x \geq 0}$.

4. Expliquer en termes mathématiques et en détail l'objectif de ce script :

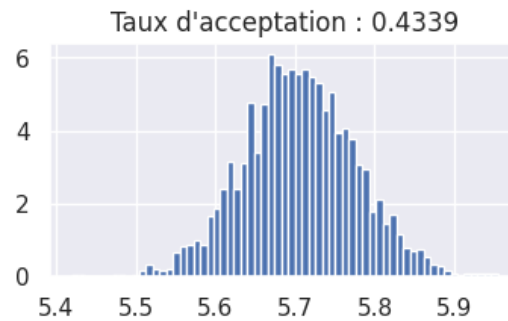
```
[10]: n = 10**4
init = X.mean()

unif = stats.uniform()
kernel = stats.uniform(loc=-0.25, scale=0.5)
threshold = unif.rvs(size=n)
move = kernel.rvs(size=n)

sample = [init]
n_acc = 0
for i in range(n):
    x = sample[-1]
    y = x + move[i]
    crit = y * np.exp(-(y + np.sum((X-y)**2))/2) * (y >= 0) / ( x * np.exp(-(x +
↪ np.sum((X-x)**2))/2) * (x >= 0) )
    dec = threshold[i] < crit
    sample.append(y if dec else x)
    n_acc += dec
```

```
sample = np.asarray(sample)
rate = n_acc / n
```

5. Un histogramme de `sample` donne le résultat suivant. Que pouvez-vous en dire ?



6. Qu'affiche le script suivant ?

```
[12]: alpha = 0.05

inter_low = np.quantile(sample, alpha/2, method='inverted_cdf')
inter_up = np.quantile(sample, 1-alpha/2, method='inverted_cdf')

print(f"[{inter_low:0.3f}, {inter_up:0.3f}]")
```