

TD 1 : SIMULATION MONTE-CARLO

EXERCICE 1 (Méthode d'inversion)

1. Soit $\lambda > 0$. Rappeler la définition d'une fonction mesurable $\varphi_\lambda :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, telle que si $U \sim \text{Unif}([0, 1])$, alors $\varphi_\lambda(U) \sim \text{Exp}(\lambda)$.
2. Donner un générateur de la loi de Pareto de paramètres $(x_m, k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, dont une densité est donnée par :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto k \frac{x_m^k}{x^{k+1}} \mathbf{1}_{x \geq x_m}.$$

3. Proposer une manière de simuler la loi de Cauchy de paramètres $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, dont une densité est donnée par :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sigma}{\pi [(x - m)^2 + \sigma^2]}.$$

4. Faire de même avec la loi de Bernoulli de paramètre p , $\text{Ber}(p)$, où $p \in]0, 1[$.
5. Proposer une manière concrète de simuler suivant la loi géométrique de paramètre p , $\text{Geo}_{\mathbb{N}^*}(p)$, où $p \in]0, 1[$.
6. Soit $p \in]0, 1[$. Montrer que si $T \sim \text{Exp}(-\log(1 - p))$, alors $\lfloor T + 1 \rfloor \sim \text{Geo}_{\mathbb{N}^*}(p)$.

EXERCICE 2 (Méthode du rejet)

Soit $\lambda \in]0, 1[$.

1. Décrire la méthode du rejet pour simuler la loi $\text{Poi}(\lambda)$ à partir de la loi $\text{Geo}_{\mathbb{N}}(1 - \lambda)$.
2. Comment simuler simplement $Y \sim \text{Geo}_{\mathbb{N}}(1 - \lambda)$?
3. Quelle est la probabilité de rejet ?

EXERCICE 3 ((*) Méthode du rejet optimisée)

On veut simuler une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ en utilisant comme proposition une loi de Laplace de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire de densité $g_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$.

1. Déterminer la valeur de λ qui permet de minimiser la probabilité de rejet. Vérifier que cette dernière vaut environ 0,24.
2. Comment simuler une variable X suivant une loi de Laplace ?

EXERCICE 4 (Conditionnement et inversion)

On considère le couple (X, Y) de densité

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto yx^{y-1}e^{-y}\mathbf{1}_{y>0}\mathbf{1}_{0<x<1}.$$

1. Quelle est la loi de Y ?
2. Soit $y > 0$. Déterminer $\text{Loi}(X|Y = y)$.
3. Déterminez, pour tout $x \in]0, 1[$, $\mathbb{P}(X \leq x|Y = y)$ et en déduire une méthode de simulation du couple (X, Y) .

EXERCICE 5 ((★) Conditionnement)

On considère le couple (X, Y) de densité

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-y^2 x/2} e^{-\sqrt{x}} \mathbf{1}_{x>0}.$$

1. Soit $x > 0$. Quelle est la loi $\text{Loi}(Y|X = x)$?
2. Quelle est la loi de $\sqrt{X}$?
3. En déduire une méthode de simulation du couple (X, Y) .

EXERCICE 6 (Rejet et conditionnement)

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F , supposée bijective, et de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On suppose savoir simuler la loi de X .

1. Exhiber une densité de $\text{Loi}(X|X > a)$.
2. Comment simuler $\text{Loi}(X|X > a)$ à l'aide d'une méthode de rejet ? Que se passe-t-il lorsque a devient grand ?
3. Soient $U \sim \text{Unif}([0, 1])$ et T définie par

$$T = F^{-1}(F(a) + (1 - F(a))U).$$

Déterminer la fonction de répartition de T et en déduire une méthode de simulation de X conditionnellement à $X > a$. Comparer à la méthode de la question précédente.

4. Détailler comment simuler X de loi de Cauchy conditionnellement à $X > a$?

EXERCICE 7 ((★) Méthodes de Box-Muller et de Marsaglia)

On cherche ici à proposer deux méthodes de simulation de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Soit (U, V) un couple de variables i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que les variables X et Y définies par

$$\begin{cases} X = \sqrt{-2 \log U} \times \cos(2\pi V) \\ Y = \sqrt{-2 \log U} \times \sin(2\pi V) \end{cases}$$

sont i.i.d. gaussiennes centrées réduites. Le principe consistant à simuler U et V puis à calculer X et Y est appelé méthode de Box-Muller.

Indication (changement de variable multivarié) : Soient d un entier non-nul quelconque, U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et $\varphi^{-1} : U \rightarrow V$ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Alors

$$\int_V f = \int_U f \circ \varphi^{-1} |\det(J_{\varphi^{-1}})|,$$

où $J_{\varphi^{-1}}$ est la matrice jacobienne de φ^{-1} .

Par exemple, dans le cas $d = 2$ où l'on cherche à évaluer

$$\int_V f(u, v) du dv,$$

il suffit d'écrire $(x, y) = \varphi(u, v)$, puis « $dx dy = |\det(J_{\varphi}(u, v))| du dv$ », ou $(u, v) = \varphi^{-1}(x, y)$ puis « $du dv = |\det(J_{\varphi^{-1}}(x, y))| dx dy$ », conduisant à

$$\int_V f(u, v) du dv = \int_U (f \circ \varphi^{-1})(x, y) \frac{dx dy}{|\det((J_{\varphi} \circ \varphi^{-1})(x, y))|} = \int_U (f \circ \varphi^{-1})(x, y) |\det(J_{\varphi^{-1}}(x, y))| dx dy.$$

On rappelle que, pour tout $(u, v) \in V$, si l'on écrit $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix},$$

et que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme si et seulement si :

- (a) φ est une bijection ;
 - (b) φ est $\mathcal{C}^1$;
 - (c) pour tout $(u, v) \in V$, $\det(J_\varphi(u, v)) \neq 0$.
2. Soit $(R, \theta) = (\sqrt{-2 \log U}, 2\pi V)$ les coordonnées polaires du point (X, Y) dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la loi du vecteur (R^2, θ) ?
 3. Déterminer la loi du couple de variables aléatoires $(W, Z) = (\sqrt{U} \cos(2\pi V), \sqrt{U} \sin(2\pi V))$. Comment peut-on simuler cette loi par méthode du rejet ?
 4. Dédurre de la question précédente une nouvelle méthode de simulation de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Cette dernière est appelée méthode polaire de Marsaglia. Quel est son avantage par rapport à l'algorithme de Box-Muller. Quel est son défaut ?

EXERCICE 8 (Loi de Poisson)

On s'intéresse à la simulation de la loi de Poisson : $\text{Poi}(\lambda)$, où $\lambda > 0$. Dans la bibliothèque Python `Numpy`, ceci est mis en place via deux méthodes décrites ci-dessous, selon la valeur de λ . La première génère concrètement un processus de Poisson, tandis que la seconde est une méthode d'inversion ne nécessitant pas de calculer l'inverse généralisée de la fonction de répartition de la loi $\text{Poi}(\lambda)$.

1. Méthode du processus de Poisson

- (a) Soient (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\text{Exp}(\lambda)$ et

$$N = \sup \left\{ n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n X_k \leq 1 \right\}$$

(avec la convention qu'une somme vide vaut 0). Montrer que $N \sim \text{Poi}(\lambda)$.

Indication : Le volume du simplexe $\{x \in [0, 1]^n, x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$ est $1/n!$

- (b) En déduire une manière de simuler la loi $\text{Poi}(\lambda)$ à partir de variables aléatoires uniformes.

2. Méthode du rejet transformée

- (a) Soient P une loi de fonction de répartition F et de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et $\phi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Montrer que $g = (f \circ \phi)|\phi'|$ (prolongée à 0 aux extrémités du segment $[0, 1]$) est une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.
- (b) Soient Q la loi sur $[0, 1]$ de densité g et $Z \sim Q$. Quelle est la loi de $\phi(Z)$?
- (c) On suppose qu'il existe $0 < m < \infty$ tel que $\|g\|_\infty \leq m$. Expliquer comment simuler la loi Q à partir de la loi uniforme.
- (d) En pratique, ϕ a pour objectif d'approcher F^{-1} , de sorte qu'au lieu de simuler P par inversion classique, i.e. via $F^{-1}(U)$, où $U \sim \text{Unif}([0, 1])$, on la simule grâce à $\phi(Z)$, avec $Z \sim Q$ (on comprend que la loi Q est « proche » de la loi $\text{Unif}([0, 1])$).

Dans le but de simuler $\text{Poi}(\lambda)$, on choisit donc

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\lambda^{\lfloor x \rfloor} \mathbf{1}_{x \geq 0}}{\lfloor x \rfloor!} e^{-\lambda} \mathbf{1}_{x \geq 0} \quad \text{et} \quad \phi : u \in]0, 1[\mapsto \frac{2}{1/2 - |u - 1/2|} (u - 1/2).$$

Montrer que f est bien une densité. On admettra que, dans ce cas, $\phi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme et $\|g\|_\infty < \infty$.

- (e) En déduire un algorithme de simulation de la loi $\text{Poi}(\lambda)$.
3. Justifier intuitivement qu'en pratique, la première méthode soit utilisée lorsque $\lambda < 10$ et la seconde lorsque $\lambda \geq 10$.

EXERCICE 9 ((*) Méthode du rejet sur l'hypographe d'une densité)

Soit P une loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. On définit, pour toute fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, son hypographe (au-dessus de l'axe des abscisses) par :

$$\text{hyp}(h) = \{(x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, u \leq h(x)\}.$$

1. Montrer que la surface de $\text{hyp}(f)$ est finie.
2. Soit $(X, U) \sim \text{Unif}(\text{hyp}(f))$. Quelle est la loi marginale de X ?
3. Soit maintenant une loi Q de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue, telle qu'il existe $m > 0$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq mg(x)$.

Montrer que le couple (Y, U) dont la loi est définie par

$$Y \sim Q \quad \text{et} \quad U|Y \sim \text{Unif}([0, mg(Y)])$$

suit la loi uniforme sur $\text{hyp}(mg) : (Y, U) \sim \text{Unif}(\text{hyp}(mg))$.

4. En remarquant que $\text{hyp}(f) \subset \text{hyp}(mg)$, décrire une méthode de simulation de la loi P à partir de la loi Q (que l'on suppose savoir simuler facilement).
5. Si la densité f a pour support un intervalle borné et est telle que $\|f\|_\infty < \infty$, quelle loi Q proposeriez-vous ? Décrire l'algorithme résultant.

EXERCICE 10 ((†) Simulation de la loi Gamma)

Soient $a > 0$ et $\lambda > 0$. On souhaite simuler suivant la loi $\text{Gamma}(a, \lambda)$, dont une densité par rapport à la mesure de Lebesgue est donnée par :

$$f : x \mapsto \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}.$$

On suppose dans la suite que $a > 1$ et on note

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^{a-1} e^{-x} \mathbf{1}_{x>0} \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, x \leq \sqrt{g(y/x)} \right\}.$$

1. Calculer $\sup_{x \in \mathbb{R}} g(x)$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 g(x)$. En déduire que $\mathcal{D} \subset [0, x_a] \times [0, y_a]$, où $x_a = \left(\frac{a-1}{e}\right)^{\frac{a-1}{2}}$ et $y_a = \left(\frac{a+1}{e}\right)^{\frac{a+1}{2}}$.
2. Soit $(X, Y) \sim \text{Unif}(\mathcal{D})$. Quelle est la loi de $W = Y/X$? En déduire que la surface de $\mathcal{D}$ vaut $\Gamma(a)/2$.
3. Conclure que $Z = W/\lambda \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$.
4. Comment simuler suivant les lois $\text{Unif}(\mathcal{D})$ et $\text{Gamma}(a, \lambda)$?
5. On vient de voir que pour simuler suivant la loi $\text{Gamma}(a, 1)$, il est inutile de connaître la constante $\Gamma(a)$ (seule la fonction g suffit). Est-ce que remplacer g par cg , où $c > 0$, dans la méthode ci-dessus change son efficacité ?

EXERCICE 11 ((†) Algorithme Ziggourat)

Le but est de simuler selon une densité f de façon très efficace. Les deux idées-forces de la méthode Ziggourat sont élémentaires et ont déjà été croisées :

- Si le point (X, Y) est uniformément distribué dans l'hypographe de f , c'est-à-dire dans le domaine $\mathcal{H}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$, alors X a pour densité f ;
- Si $f \leq g$ et si l'on sait simuler uniformément dans l'hypographe de g , alors on sait simuler uniformément dans $\mathcal{H}(f)$, donc selon f : il suffit d'effectuer des tirages uniformes dans $\mathcal{H}(g)$ jusqu'à tomber dans $\mathcal{H}(f)$, c'est la méthode de rejet basique.

Noter que g n'est pas une densité puisque $f \leq g$, mais peu importe. Le principe est ainsi de trouver une fonction g telle que :

- g majore f de façon très fine, afin de rejeter le moins possible ;
- il soit possible d'effectuer des tirages uniformes dans l'hypographe de g de façon très rapide.

Le cadre est le suivant : on considère une densité de probabilité $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.

1. Première partie : Construction de g

On fixe un entier n , par exemple $n = 256$. Pour $x_1 > 0$, on note $y_1 = f(x_1)$ et

$$A = x_1 y_1 + \int_{x_1}^{\infty} f(y) dy,$$

puis par récurrence $y_{k+1} = y_k + A/x_k$ et $x_{k+1} = f^{-1}(y_{k+1})$. Le réel x_1 est choisi de telle sorte que $(x_n, y_n) = (0, f(0))$. Notons $\mathcal{T}_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y \leq y_1 \mathbf{1}_{x < x_1} + f(x) \mathbf{1}_{x \geq x_1}\}$ la tranche inférieure et, pour $k = 2, \dots, n$, $\mathcal{T}_k := [0; x_{k-1}] \times [y_{k-1}; y_k]$ les tranches supérieures.

- (a) Faire un dessin pour comprendre comment est construite la séquence $((x_k, y_k))_{1 \leq k \leq n}$.
- (b) Expliquer pourquoi une méthode de dichotomie permet de déterminer la séquence $((x_k, y_k))_{1 \leq k \leq n}$ avec une précision arbitraire.
- (c) Cette étape préliminaire est bien sûr coûteuse mais elle est effectuée **une seule fois** et permet d'aboutir à la fonction majorante g en escalier (hormis pour la rampe d'accès à droite de x_1) :

$$g(x) := f(x) \mathbf{1}_{x \geq x_1} + \sum_{k=2}^n y_k \mathbf{1}_{x_k \leq x < x_{k-1}}.$$

Si l'on suppose savoir tirer uniformément dans $\mathcal{T}_1$ (nous reviendrons sur ce point ultérieurement), expliquer comment simuler uniformément dans l'hypographe de g .

2. Deuxième partie : Méthode de rejet

Nous savons maintenant simuler (X, Y) uniformément dans l'hypographe de g à partir du tirage uniforme dans l'une des tranches. Comme nous allons le voir, une astuce permet très souvent de se dispenser du tirage de Y . Pour l'instant, on suppose donc uniquement $K \sim \text{Unif}(\{1, \dots, n\})$.

- (a) Vérifier que si $2 \leq K = k \leq n$ et $X \sim \text{Unif}([0; x_{k-1}])$, alors si $X \leq x_k$ on accepte X .
- (b) On suppose toujours $2 \leq K \leq n$ et $X \sim \text{Unif}([0; x_{k-1}])$, mais cette fois $x_k < X \leq x_{k-1}$. Comment appliquer l'idée du rejet ?
- (c) On suppose désormais $K = 1$ et on note $x_0 := A/y_1$. Montrer que si $X \sim \text{Unif}([0; x_0])$, alors si $X < x_1$, on accepte X .
- (d) Si le tirage précédent a donné $X \geq x_1$, montrer qu'il "suffit" de générer un nouveau X selon la densité $cf(x) \mathbf{1}_{x \geq x_1}$.

- (e) Il reste maintenant à expliquer comment générer X selon la densité $cf(x)\mathbf{1}_{x \geq x_1}$. Ceci dépend bien sûr de f . Si f est la loi exponentielle de paramètre 1, montrer que c'est élémentaire. Si f est la densité de la variable absolue de la gaussienne standard, montrer qu'on peut se servir de la loi $x_1 + \text{Exp}(x_1)$ comme loi de proposition et appliquer une méthode de rejet.

3. Troisième partie : Synthèse

On se focalise sur la loi normale standard en supposant que la séquence $0 = x_n < \dots < x_0$ est donnée une fois pour toutes.

- (a) Pourquoi n'est-il pas restrictif d'avoir supposé $f = 0$ sur $\mathbb{R}_-$?
- (b) Donner le pseudo-code de l'algorithme Ziggourat.
- (c) Discuter de l'efficacité de cet algorithme.
- (d) Pourquoi l'algorithme Ziggourat porte-t-il ce nom ?