Université de Rennes 2
Licence MASS 3

Année 2006/2007
Premier Semestre

Mesure & Intégration

Arnaud Guyader

Table des matières

Chapitre 1

L'intégrale de Riemann

Introduction

Ce chapitre présente la construction ainsi que les principales propriétés de l'intégrale de Riemann. Pour la plupart, ces résultats ont déjà été vus en première année. Il est néanmoins utile de les maîtriser pour pouvoir aborder par la suite l'intégrale de Lebesgue.

1.1 Sommes de Darboux

Le principe de l'intégrale de Riemann d'une fonction f est de couper l'axe des abscisses en petits intervalles et de considérer les valeurs prises par la fonction sur ceux-ci. Si f est suffisamment régulière, elle pourra être considérée comme quasi-constante sur chacun de ces intervalles. Dans la suite, $[a, b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $-\infty < a \leq b < +\infty$.

Définition 1.1 (Subdivision)
Soit $[a, b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$. $\mathcal{S} = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$ *est une subdivision de* $[a, b]$ *si :*

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b.$$

$\mathcal{T} = (t_0, t_1, \ldots, t_m)$ *est une subdivision plus fine que* $\mathcal{S}$ *si :*

$$\{s_0, s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \{t_0, t_1, \ldots, t_m\},$$

ce qu'on notera simplement $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ *.*

Ces notions sont représentées figure 1.1.

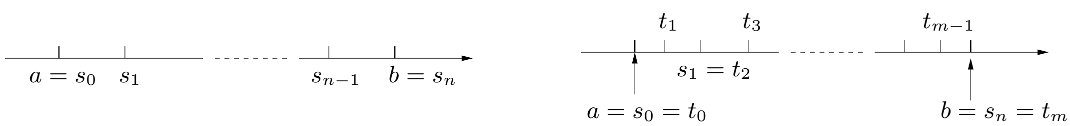

FIGURE 1.1 – Subdivision $\mathcal{S}$ et subdivision plus fine $\mathcal{T}$.

Notation. $\mathcal{S}_{[a,b]}$ désignera l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Exemple. On considérera presque toujours des subdivisions régulières de l'intervalle $[a, b]$. Par exemple, la subdivision régulière de $[0, 1]$ à $(n + 1)$ points est :

$$\mathcal{S} = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Définition 1.2 (Sommes de Darboux)
Soit $[a, b]$ un segment et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction **bornée**. *Pour $\mathcal{S} = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{S}_{[a,b]}$, notons $I_k = [s_{k-1}, s_k[$ si $1 \leq k \leq (n - 1)$, et $I_n = [s_{n-1}, s_n]$. Alors les quantités :*

$$\begin{cases} \sigma(f, \mathcal{S}) & = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \inf_{I_k} f \\ \Sigma(f, \mathcal{S}) & = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \sup_{I_k} f \end{cases}$$

sont appelées sommes de Darboux inférieure et supérieure de f pour la subdivision $\mathcal{S}$:

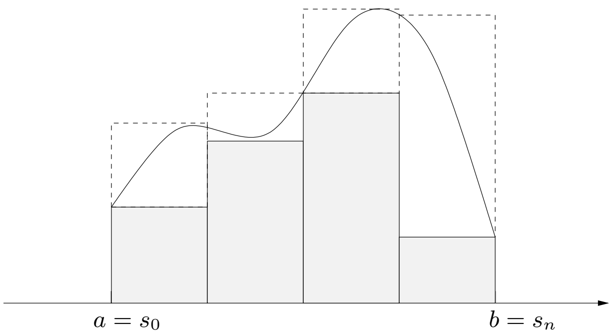

FIGURE 1.2 – Sommes de Darboux inférieure et supérieure.

La représentation de ces sommes de Darboux est donnée figure 1.2. Précisément, $\sigma(f, \mathcal{S})$ (respectivement $\Sigma(f, \mathcal{S})$) correspond à la somme des surfaces des rectangles inférieurs (respectivement supérieurs).

Exemple. Dans le cas d'une subdivision régulière sur $[0, 1]$, ces formules se simplifient un peu :

$$\sigma(f, \mathcal{S}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \inf_{I_k} f \qquad \Sigma(f, \mathcal{S}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k} f$$

L'intérêt d'introduire ces quantités est assez clair : plus on affine la subdivision, plus les deux sommes se rapprochent l'une de l'autre. Ceci est illustré figure 1.3 et rigoureusement énoncé comme suit :

Proposition 1.1 (Une inégalité)
Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont deux subdivisions de $[a, b]$, avec $\mathcal{T}$ plus fine que $\mathcal{S}$, alors :

$$\sigma(f, \mathcal{S}) \leq \sigma(f, \mathcal{T}) \leq \Sigma(f, \mathcal{T}) \leq \Sigma(f, \mathcal{S}).$$

Preuve. Il suffit de le montrer en considérant que $\mathcal{T}$ a seulement un point de plus que $\mathcal{S}$. Prenons donc :

$$\mathcal{T} = (s_0, s'_1, s_1, \ldots, s_n).$$

On écrit la somme de Darboux supérieure :

$$\Sigma(f, \mathcal{T}) = (s'_1 - s_0) \sup_{[s_0, s'_1[} f + (s_1 - s'_1) \sup_{[s'_1, s_1[} f + \sum_{k=2}^{n} (s_k - s_{k-1}) \sup_{I_k} f,$$

que l'on majore tranquillement :

$$\Sigma(f,\mathcal{T}) \leq (s_1' - s_0) \sup_{[s_0,s_1[} f + (s_1 - s_1') \sup_{[s_0,s_1[} f + \sum_{k=2}^{n} (s_k - s_{k-1}) \sup_{I_k} f = \Sigma(f,\mathcal{S}).$$

Le même raisonnement donne l'inégalité sur les sommes de Darboux inférieures. ■

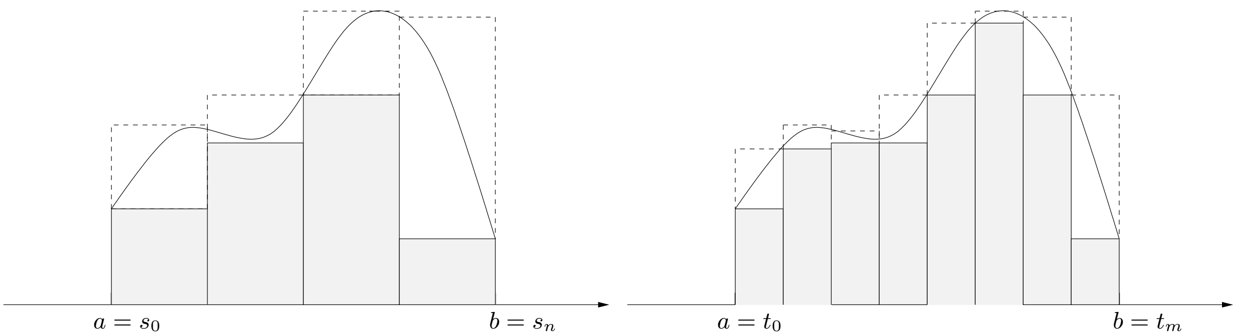

FIGURE 1.3 – Sommes de Darboux et subdivision plus fine.

Corollaire 1.1
L'ensemble des sommes de Darboux inférieures a une borne supérieure, que l'on note $\sup \sigma$*. L'ensemble des sommes de Darboux supérieures a une borne inférieure, que l'on note* $\inf \Sigma$*. De plus, on a l'inégalité :*

$$\sup \sigma \leq \inf \Sigma.$$

Preuve. On commence par noter que :

$$\forall \mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathcal{S}_{[a,b]} \qquad \sigma(f,\mathcal{S}) \leq \Sigma(f,\mathcal{S}').$$

Ceci découle simplement de l'inégalité précédente en considérant la subdivision plus fine $\mathcal{T} = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$. Donc toute somme de Darboux supérieure est un majorant de toute somme de Darboux inférieure. Donc toute somme de Darboux supérieure est un majorant de la borne sup des sommes de Darboux inférieures, notée $\sup \sigma$. Donc la borne inf des sommes de Darboux supérieures, notée $\inf \Sigma$, est un majorant de $\sup \sigma$. ■

Définition 1.3 (Fonction Riemann intégrable)
On dit que f *est Riemann intégrable sur* $[a,b]$ *si* $\sup \sigma = \inf \Sigma$*, auquel cas cette valeur sera notée* $\int_a^b f(x)\,dx$ *et appelée intégrale de* f *sur* $[a,b]$*. On note* $\mathcal{R}_{[a,b]}$ *l'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur* $[a,b]$*.*

Remarque. Une fonction Riemann intégrable est donc **bornée** par hypothèse.

Exemple. La fonction de Peano est un exemple typique de fonction non Riemann intégrable. Elle est définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

En effet, pour toute subdivision $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_{[0,1]}$, la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ assure que $\sigma(f,\mathcal{S}) = 0$ et $\Sigma(f,\mathcal{S}) = 1$. Par conséquent, on a de même $\sup \sigma = 0 \neq \inf \Sigma = 1$, et f n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$.

La définition de l'intégrabilité ci-dessus n'est pas commode à vérifier en pratique. C'est pourquoi il importe de donner des critères plus maniables.

1.2 Critères d'intégrabilité

Proposition 1.2 (Premier critère d'intégrabilité)
f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathcal{S} \in \mathcal{S}_{[a,b]} \qquad \Sigma(f, \mathcal{S}) - \sigma(f, \mathcal{S}) \leq \varepsilon.$$

Preuve. Supposons $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors par définition des bornes sup et inf, il existe deux subdivisions $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ telles que :

$$\sup \sigma - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sigma(f, \mathcal{S}) \leq \Sigma(f, \mathcal{S}') \leq \inf \Sigma + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En prenant la subdivision plus fine $\mathcal{T} = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$, on a donc :

$$\sup \sigma - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sigma(f, \mathcal{T}) \leq \Sigma(f, \mathcal{T}) \leq \inf \Sigma + \frac{\varepsilon}{2},$$

et puisque $\sup \sigma = \inf \Sigma$, on en déduit que : $\Sigma(f, \mathcal{T}) - \sigma(f, \mathcal{T}) \leq \varepsilon$.
Réciproquement, prenons $\mathcal{S}$ comme dans l'énoncé. Puisque pour toute subdivision on a :

$$\sigma(f, \mathcal{S}) \leq \sup \sigma \leq \inf \Sigma \leq \Sigma(f, \mathcal{S}),$$

il s'ensuit que $\inf \Sigma - \sup \sigma \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\inf \Sigma = \sup \sigma$, c'est-à-dire que f est Riemann intégrable sur le segment $[a, b]$.

∎

Définition 1.4 (Pas d'une subdivision)
On appelle pas de la subdivision $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_{[a,b]}$ le nombre $\Delta(\mathcal{S}) = \max_{1 \leq k \leq n}(s_k - s_{k-1})$.

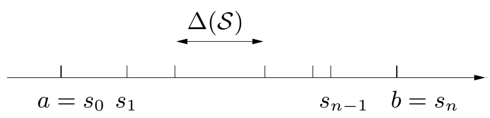

FIGURE 1.4 – Pas de la subdivision $\mathcal{S}$.

Exemple. Le pas de la subdivision régulière $\mathcal{S} = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$ est $\frac{1}{n}$. Le cas général est représenté figure 1.4.

Proposition 1.3 (Second critère d'intégrabilité)
f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si $\Sigma(f, \mathcal{S}) - \sigma(f, \mathcal{S})$ tend vers zéro quand $\Delta(\mathcal{S})$ tend vers zéro.

Preuve. La condition est clairement suffisante d'après la proposition précédente. Prouver qu'elle est nécessaire est plus technique. Puisque f est bornée sur $[a, b]$, on peut définir son oscillation :

$$\omega(f) \stackrel{\Delta}{=} \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$, il faut trouver $\delta > 0$ tel que :

$$\Delta(\mathcal{S}) \leq \delta \Rightarrow \Sigma(f, \mathcal{S}) - \sigma(f, \mathcal{S}) \leq \varepsilon.$$

D'après la proposition 1.2, on sait qu'il existe une subdivision $\mathcal{T}$, disons à n_0 points, telle que :

$$\Sigma(f,\mathcal{T}) - \sigma(f,\mathcal{T}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, pour toute subdivision $\mathcal{S}$, on peut écrire :

$$\Sigma(f,\mathcal{S}) - \sigma(f,\mathcal{S}) = \sum_{k\in I}(s_k - s_{k-1})\left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\right) + \sum_{k\in J}(s_k - s_{k-1})\left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\right).$$

Avec (faire un dessin peut aider) :

$$I \stackrel{\Delta}{=} \{k \ : \ \exists i, \ [s_{k-1}, s_k[\subseteq [t_{i-1}, t_i[\},$$

et :

$$J \stackrel{\Delta}{=} \{k \ : \ \exists i, \ t_i \in [s_{k-1}, s_k[\}.$$

La première somme se majore facilement :

$$\sum_{k\in I}(s_k - s_{k-1})\left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\right) \leq \Sigma(f,\mathcal{T}) - \sigma(f,\mathcal{T}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour la seconde, on peut y aller brutalement, le cardinal de J étant majoré par n_0 :

$$\sum_{k\in J}(s_k - s_{k-1})\left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\right) \leq n_0 \Delta(\mathcal{S})\omega(f).$$

On en déduit que pour toute subdivision $\mathcal{S}$ telle que :

$$\Delta(\mathcal{S}) \leq \frac{\varepsilon}{2n_0\omega(f)},$$

on aura bien :

$$\Sigma(f,\mathcal{S}) - \sigma(f,\mathcal{S}) \leq \varepsilon.$$

■

Ce résultat permet de prouver facilement le lien entre limite des sommes de Riemann et intégrale sur un segment.

Définition 1.5 (Sommes de Riemann)
On appelle somme de Riemann associée à f et à la subdivision $\mathcal{S}$ de $[a,b]$ toute quantité du type :

$$\sum_{k=1}^{n}(s_k - s_{k-1})f(x_k),$$

où x_k est un point quelconque de l'intervalle $[s_{k-1}, s_k]$.

Cette somme de Riemann est représentée figure 1.5. Le résultat suivant découle alors sans problème du second critère d'intégrabilité vu ci-dessus.

Corollaire 1.2 (Convergence des sommes de Riemann)
Si $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, l'intégrale de f sur $[a,b]$ est la limite des sommes de Riemann quand le pas de la subdivision tend vers zéro :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(s_k - s_{k-1})f(x_k).$$

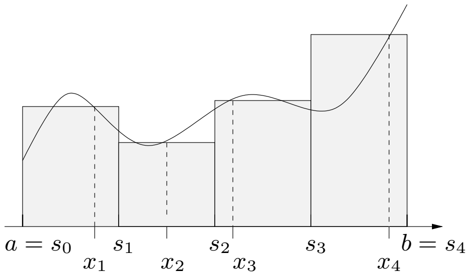

FIGURE 1.5 – Exemple de somme de Riemann.

Exemple. Si $f \in \mathcal{R}_{[0,1]}$, en considérant la subdivision régulière et les points $(\xi_k = \frac{1}{k})_{1 \leq k \leq n}$, on a la formule classique (voir figure 1.6) :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

En prenant un peu d'avance sur le lien primitive/intégrale, on montre ainsi que :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k}{n}+1} = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

D'autres exemples sont donnés en exercices.

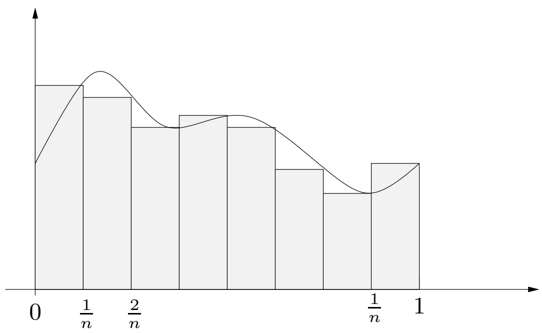

FIGURE 1.6 – Somme de Riemann pour une subdivision régulière.

Corollaire 1.3 (Modification de la fonction)
On ne change ni l'intégrabilité d'une fonction ni la valeur éventuelle de son intégrale si on modifie la fonction en un nombre fini de points.

Preuve. Il suffit de le montrer en modifiant en un point $c \in [a, b]$. Soit donc la fonction $\tilde{f}$ égale à f partout sauf au point c. Soit M un majorant de $|f|$ et $|\tilde{f}|$ sur $[a, b]$. Pour toute subdivision $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_{[a,b]}$, on peut écrire :

$$\left|\Sigma(f, \mathcal{S}) - \Sigma(\tilde{f}, \mathcal{S})\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \left(\sup_{I_k} f - \sup_{I_k} \tilde{f}\right)\right|.$$

Notons k_0 l'indice tel que $c \in I_{k_0}$, alors :

$$\left|\Sigma(f, \mathcal{S}) - \Sigma(\tilde{f}, \mathcal{S})\right| \leq 2M(s_{k_0} - s_{k_0-1}) \leq 2M\Delta(\mathcal{S}) \xrightarrow[\Delta(\mathcal{S}) \to 0]{} 0.$$

On montre de même que :

$$\left|\sigma(f,\mathcal{S})-\sigma(\tilde{f},\mathcal{S})\right| \xrightarrow[\Delta(\mathcal{S})\to 0]{} 0.$$

Puisque $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, on en déduit que :

$$\Sigma(\tilde{f},\mathcal{S})-\sigma(\tilde{f},\mathcal{S}) \xrightarrow[\Delta(\mathcal{S})\to 0]{} 0,$$

ce qui est exactement dire que $\tilde{f}$ est intégrable sur $[a,b]$. L'égalité des intégrales découle aussi de ce raisonnement.

■

La démonstration du résultat suivant est facile et laissée en exercice.

Corollaire 1.4 (Relation de Chasles)
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction et soit $c\in]a,b[$. Alors $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}$ si et seulement si $f\in\mathcal{R}_{[a,c]}$ et $f\in\mathcal{R}_{[c,b]}$, auquel cas on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Convention. Si f est Riemann intégrable sur $[a,b]$, on convient de poser :

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx.$$

Si α, β et γ sont trois points de $[a,b]$, on vérifie alors que la relation de Chasles est toujours vraie :

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_\beta^\gamma f(x)\,dx.$$

1.3 Exemples de fonctions intégrables

Il est difficile de caractériser concrètement l'ensemble des fonctions Riemann intégrables. Néanmoins, on montre que les braves fonctions (monotones ou continues par morceaux) ne posent pas problème.

Proposition 1.4 (Fonctions monotones)
Toute fonction monotone bornée sur $[a,b]$ est Riemann intégrable.

Preuve. On suppose par exemple f croissante sur $[a,b]$. Soit $\mathcal{S}=(s_0,s_1,\ldots,s_n)$ une subdivision de $[a,b]$. On a clairement :

$$\Sigma(f,\mathcal{S})-\sigma(f,\mathcal{S})=\sum_{k=1}^n(s_k-s_{k-1})\left(\sup_{I_k}f-\inf_{I_k}f\right)=\sum_{k=1}^n(s_k-s_{k-1})(f(s_k)-f(s_{k-1})),$$

d'où l'on déduit :

$$\Sigma(f,\mathcal{S})-\sigma(f,\mathcal{S})\leq\Delta(\mathcal{S})(f(b)-f(a)),$$

majorant qui tend vers zéro lorsque le pas $\Delta(\mathcal{S})$ de la subdivision tend vers zéro. D'après la proposition 1.3, f est bien Riemann intégrable sur $[a,b]$.

■

Remarque. Par la relation de Chasles, il est clair qu'une fonction monotone par morceaux sur $[a, b]$ est Riemann intégrable.

On traite maintenant le cas des fonctions continues. On commence par rappeler un résultat très utile concernant les fonctions continues sur un segment (ce résultat est en fait vrai pour toute fonction continue sur un compact, c'est-à-dire, en dimension finie, un ensemble fermé et borné).

Rappel : Théorème de Heine
Si f est continue sur le segment $[a, b]$, elle y est uniformément continue, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x, x') \in [a, b],\ |x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon.$$

La compacité de $[a, b]$ est essentielle. Un exemple typique de fonction continue non uniformément continue est $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ qui à x associe $\frac{1}{x}$.

Proposition 1.5 (Fonctions continues)
Toute fonction continue sur $[a, b]$ est Riemann intégrable.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons $\delta > 0$ comme dans le Théorème de Heine ci-dessus. Soit maintenant une subdivision $\mathcal{S}$ de $[a, b]$ de pas inférieur ou égal à δ, alors :

$$\Sigma(f, \mathcal{S}) - \sigma(f, \mathcal{S}) = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \right) \varepsilon = (b - a)\varepsilon.$$

D'après la Proposition 1.3, f est bien Riemann intégrable sur $[a, b]$.

■

Définition 1.6 (Fonctions continues par morceaux)
Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ si elle continue sur $[a, b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ en lesquels elle admet des limites finies à gauche et à droite.

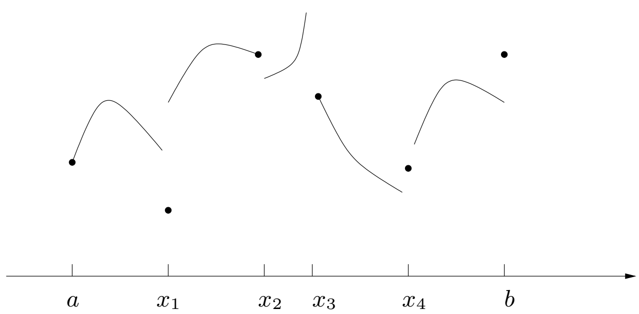

FIGURE 1.7 – Exemple de fonction continue par morceaux.

De tels points de discontinuité sont appelés points de discontinuité simples, ou de première espèce (voir figure 1.7). Tous les autres points de discontinuité sont dits de seconde espèce.

Remarque. Si a (respectivement b) est l'un des points de discontinuité, il est clair que f doit simplement admettre une limite à droite (respectivement à gauche) en ce point.

Par la relation de Chasles et le principe de modification, on a le corollaire : toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est Riemann intégrable. **En pratique**, on calcule presque toujours l'intégrale de Riemann pour des fonctions continues par morceaux. Il existe néanmoins des fonctions non continues par morceaux qui sont intégrables au sens de Riemann. Donnons-en deux exemples.

Exemples.

1. Considérons la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}] & \text{si } x \in]0,1] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

   où $[\alpha]$ désigne la partie entière du réel α. f n'est pas continue par morceaux : d'une car il y une infinité de morceaux, de deux car elle admet en 0 une discontinuité de seconde espèce. On peut néanmoins montrer qu'elle est Riemann intégrable sur $[0, 1]$ (cf. exercices). On peut même calculer son intégrale : elle vaut $1 - \gamma$, où $\gamma \approx 0.577$ est la constante d'Euler.

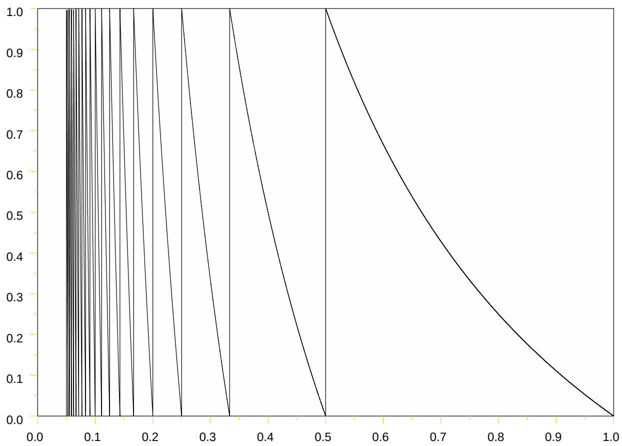

Figure 1.8 – Exemple de fonction non continue par morceaux : $x \mapsto \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$.

2. La fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

   n'est pas continue par morceaux puisqu'elle admet en 0 une discontinuité de seconde espèce. On peut cependant montrer qu'elle est Riemann intégrable sur $[0, 1]$.

Pour montrer que ces fonctions sont Riemann intégrables, on utilise les fonctions en escalier.

Définition 1.7 (Fonctions en escalier)
La fonction f est dite en escalier sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\mathcal{S} = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]s_{k-1}, s_k[$.

En d'autres termes, une fonction en escalier est une fonction continue par morceaux constante sur chaque morceau. Un exemple est donné figure 1.10. Toute fonction en escalier sur $[a, b]$ est

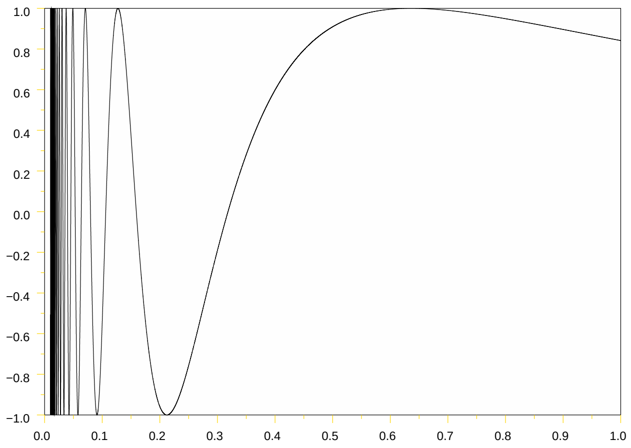

FIGURE 1.9 – Autre exemple de fonction non continue par morceaux : $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$.

Riemann intégrable : plus précisément, si $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$ est une subdivision de $[a, b]$ telle que f est constante égale à α_k sur chacun des intervalles $]s_{k-1}, s_k[$, on a :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1})\alpha_k.$$

Les fonctions en escalier jouent un rôle important, puisqu'on peut réécrire les critères d'intégrabilité par leur intermédiaire.

Proposition 1.6 (Fonctions en escalier et critère d'intégrabilité)
La fonction f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et :

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx \leq \varepsilon.$$

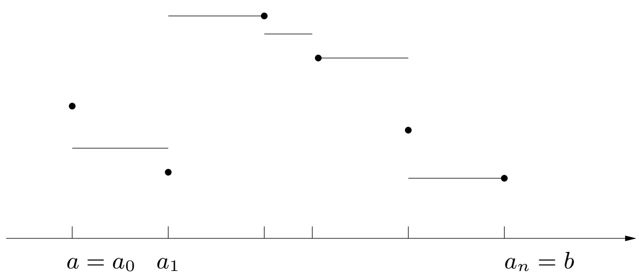

FIGURE 1.10 – Fonction en escalier.

On pourra utiliser ce critère sous la forme équivalente suivante :

Corollaire 1.5 (Approximation par une suite de fonctions en escalier)
La fonction f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si il existe deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ et $(\psi_n)_{n\geq 0}$ sur $[a, b]$ telles que : $\forall n \geq 0,\ \varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx = 0.$$

C'est ainsi qu'on peut montrer que les fonctions $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$ sont Riemann intégrables sur $[0,1]$ bien qu'elles ne soient pas continues par morceaux.

1.4 Structure de l'ensemble des fonctions intégrables

Si on considère l'espace vectoriel des fonctions bornées de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$ en est un sous-espace et l'application qui à une fonction associe son intégrale est une forme linéaire positive.

Propriétés 1.1 (Propriétés opératoires classiques)
Soit f et g Riemann intégrables sur le segment $[a,b]$, α et β des réels, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :
– *Linéarité : la fonction $(\alpha f + \beta g)$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$, avec :*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

– *Espace réticulé : les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont Riemann intégrables.*
– *Positivité : Si f est positive sur $[a,b]$, son intégrale est positive :*

$$f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

– *Positivité (bis) : Si f est inférieure à g sur $[a,b]$, il en va de même pour leurs intégrales :*

$$f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

– *Positivité (ter) : la fonction $|f|$ est Riemann intégrable, avec :*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

– *Inégalité de Cauchy-Schwarz : les fonctions fg, f^2 et g^2 sont Riemann intégrables, avec l'inégalité :*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\, dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\, dx \cdot \int_a^b g^2(x)\, dx.$$

Preuve.
– On suppose f et g intégrables sur $[a,b]$, il est clair que pour tout intervalle $I_k = [s_k, s_{k+1}[$, on a les inégalités :

$$\inf_{I_k} f + \inf_{I_k} g \leq \inf_{I_k}(f+g),$$

et :

$$\sup_{I_k}(f+g) \leq \sup_{I_k} f + \sup_{I_k} g.$$

D'où l'on déduit que pour toute subdivision $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_{[a,b]}$:

$$\sigma(f,\mathcal{S}) + \sigma(g,\mathcal{S}) \leq \sigma(f+g,\mathcal{S}) \leq \Sigma(f+g,\mathcal{S}) \leq \Sigma(f,\mathcal{S}) + \Sigma(g,\mathcal{S}).$$

Et par la proposition 1.3, on en déduit en faisant tendre $\Delta(\mathcal{S})$ vers 0 que $(f+g)$ est intégrable sur $[a,b]$. La double inégalité ci-dessus prouve de plus que l'intégrale de la somme est égale à la somme des intégrales. On prouve de même que si f est intégrable et si α est un réel, alors αf est intégrable, avec :

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

– On utilise cette fois le critère du corollaire 1.5. Il existe des suites de fonctions en escaliers $(f_n^{(1)})$, $(f_n^{(2)})$, $(g_n^{(1)})$ et $(g_n^{(2)})$ telles que pour tout n :

$$\begin{cases} f_n^{(1)} \leq f \leq f_n^{(2)} & \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (f_n^{(2)}(x) - f_n^{(1)}(x))\,dx = 0, \\ g_n^{(1)} \leq g \leq g_n^{(2)} & \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (g_n^{(2)}(x) - g_n^{(1)}(x))\,dx = 0. \end{cases}$$

Notant alors $h_n^{(1)} = \sup(f_n^{(1)}, g_n^{(1)})$ et $h_n^{(2)} = \sup(f_n^{(2)}, g_n^{(2)})$, qui sont des fonctions en escalier, on voit que :

$$h_n^{(1)} \leq \sup(f,g) \leq h_n^{(2)},$$

mais aussi que :

$$h_n^{(2)} - h_n^{(1)} \leq (f_n^{(2)} - f_n^{(1)}) + (g_n^{(2)} - g_n^{(1)}).$$

Ce qui entraîne :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (h_n^{(2)}(x) - h_n^{(1)}(x))\,dx = 0,$$

et l'intégrabilité de la fonction $\sup(f,g)$. Le même raisonnement s'applique à $\inf(f,g)$.

– Si f est positive, il est clair que pour toute subdivision $\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}_{[a,b]}$, ses sommes de Darboux inférieure $\sigma(f,\mathcal{S})$ et supérieure $\Sigma(f,\mathcal{S})$ sont positives. Donc en passant à la limite lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro, il en va de même pour l'intégrale de f.

– Si $f \leq g$ sur $[a,b]$, avec f et g intégrables, alors par linéarité on sait que $(g-f)$ est intégrable et par positivité que :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geq 0.$$

A nouveau par linéarité, ceci implique que l'intégrale de f sur $[a,b]$ est plus petite que l'intégrale de g.

– On commence par noter la décomposition de $|f|$ via les parties positive et négative de f (voir figure 1.11) :

$$|f| = \sup(f,0) + (-\inf(f,0)) = f^+ + f^-.$$

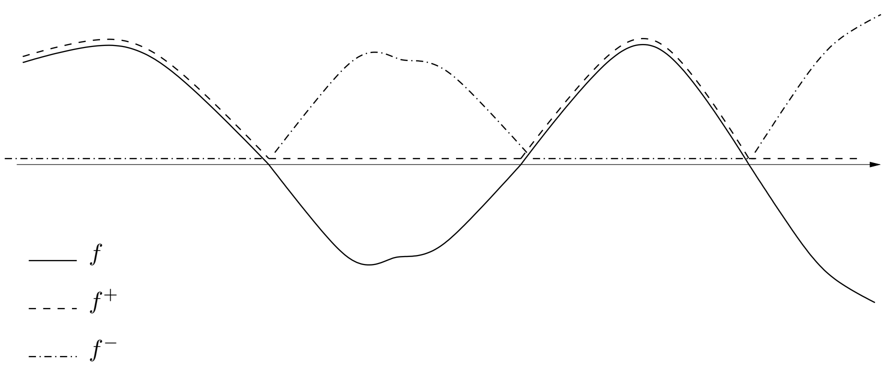

FIGURE 1.11 – Parties positive et négative de la fonction f.

Par la propriété des bornes sup et inf ainsi que par linéarité, on en déduit que $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$. En remarquant par ailleurs que :

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

il suffit alors d'appliquer la positivité de l'intégration.

– Supposons dans un premier temps f et g positives. Puisqu'elles sont Riemann intégrables, elles sont bornées, donc il existe M et M' majorants respectifs de f et g. Il existe des suites de fonctions en escalier $(f_n^{(1)})$, $(f_n^{(2)})$, $(g_n^{(1)})$ et $(g_n^{(2)})$ telles que pour tout n :

$$\begin{cases} 0 \leq f_n^{(1)} \leq f \leq f_n^{(2)} \leq M & \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (f_n^{(2)}(x) - f_n^{(1)}(x))\, dx = 0, \\ 0 \leq g_n^{(1)} \leq g \leq g_n^{(2)} \leq M' & \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (g_n^{(2)}(x) - g_n^{(1)}(x))\, dx = 0. \end{cases}$$

Il est clair que pour tout n :

$$0 \leq f_n^{(1)} g_n^{(1)} \leq fg \leq f_n^{(2)} g_n^{(2)},$$

avec les fonctions $h_n^{(1)} = f_n^{(1)} g_n^{(1)}$ et $h_n^{(2)} = f_n^{(2)} g_n^{(2)}$ en escaliers. On utilise l'astuce classique :

$$h_n^{(2)} - h_n^{(1)} = f_n^{(2)}(g_n^{(2)} - g_n^{(1)}) + g_n^{(1)}(f_n^{(2)} - f_n^{(1)}) \leq M(g_n^{(2)} - g_n^{(1)}) + M'(f_n^{(2)} - f_n^{(1)}),$$

pour en déduire que :

$$\int_a^b (h_n^{(2)} - h_n^{(1)})(x)\, dx \leq M \int_a^b (g_n^{(2)}(x) - g_n^{(1)}(x))\, dx + M' \int_a^b (f_n^{(2)}(x) - f_n^{(1)}(x))\, dx,$$

et par suite :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (h_n^{(2)} - h_n^{(1)})(x)\, dx = 0,$$

ce qui assure l'intégrabilité de fg. Si f et g ne sont pas positives, on s'y ramène en considérant les fonctions $(f-m)$ et $(g-m')$, avec m et m' minorants respectifs de f et g. D'après ce qui précède, la fonction $h = (f-m)(g-m')$ est alors intégrable, donc $fg = h + m'f + mg - mm'$ aussi par linéarité. Ainsi, si f et g sont intégrables, les fonctions fg, f^2 et g^2 le sont aussi.

Pour prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on procède alors comme d'habitude, en considérant la fonction positive $h = (\lambda f + g)^2$, intégrable par ce qui vient d'être dit. On en déduit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)\lambda^2 + 2\left(\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right)\lambda + \left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right) \geq 0,$$

quantité qui peut être vue comme un trinôme en λ. Ceci ne peut être vrai que si le discriminant est négatif, ce qui est exactement l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)\, dx \cdot \int_a^b g^2(x)\, dx \leq 0.$$

■

Remarque. On peut munir l'espace vectoriel réel $\mathcal{R}_{[a,b]}$ d'une forme bilinéaire symétrique comme suit :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$$

Elle est positive, mais pas définie positive, car on peut avoir $\langle f, f\rangle = 0$ sans que f soit la fonction nulle : prendre une fonction nulle sauf en un nombre fini de points pour s'en convaincre (pour ne pas avoir de problème, il faudrait par exemple se placer sur $C_{[a,b]}$, espace des fonctions continues sur $[a, b]$). Ce n'est donc pas un produit scalaire au sens usuel. Néanmoins, tout comme on associe une norme à un produit scalaire, on peut lui associer ce qu'on appelle une semi-norme :

$$||f|| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}.$$

Elle vérifie les axiomes d'homogénéité, de positivité, l'inégalité triangulaire, mais pas l'axiome de séparation, i.e. on peut avoir $||f|| = 0$ sans que f soit la fonction nulle. Néanmoins, comme on vient de le voir, l'inégalité de Cauchy-Schwarz reste valable et dit simplement que le produit scalaire est inférieur au produit des normes :

$$|\langle f, g\rangle| \leq ||f|| \cdot ||g||.$$

Voyons ce qu'il en est pour les suites de fonctions : autant le dire, tout ne se passe pas au mieux. Par exemple, il se peut qu'une suite de fonctions intégrables converge simplement vers une fonction qui ne le soit pas : l'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ étant dénombrable, soit $(q_n)_{n\geq 0}$ l'ensemble des rationnels de l'intervalle $[0, 1]$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{q_0, \ldots, q_n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par la propriété de modification, il est clair que toutes les fonctions (f_n) sont intégrables, d'intégrales nulles. Or cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction de Peano définie au premier paragraphe :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

laquelle n'est pas intégrable !

D'autre part, même si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction f intégrable, on n'a pas nécessairement convergence de la suite des intégrales des f_n vers l'intégrale de f. C'est ce que montre l'exemple suivant (voir figure 1.12) :

$$f_n : \begin{cases} [0, 1] & \to \mathbb{R} \\ \quad x & \mapsto n^2 x^n (1 - x) \end{cases}$$

On vérifie aisément que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$, dont l'intégrale sur ce segment vaut 0. Pourtant on verra grâce au lien intégrale/primitive que :

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \left[n^2 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)\right]_0^1 = \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2}\right) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0.$$

Une condition suffisante pour que tout se passe bien est la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f.

Rappel. On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in [a, b] \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

En pratique, pour établir la convergence uniforme de (f_n), on commence par déterminer la limite simple f. On étudie ensuite la fonction $d_n = |f_n - f|$ sur $[a, b]$ et on montre que $M_n =$

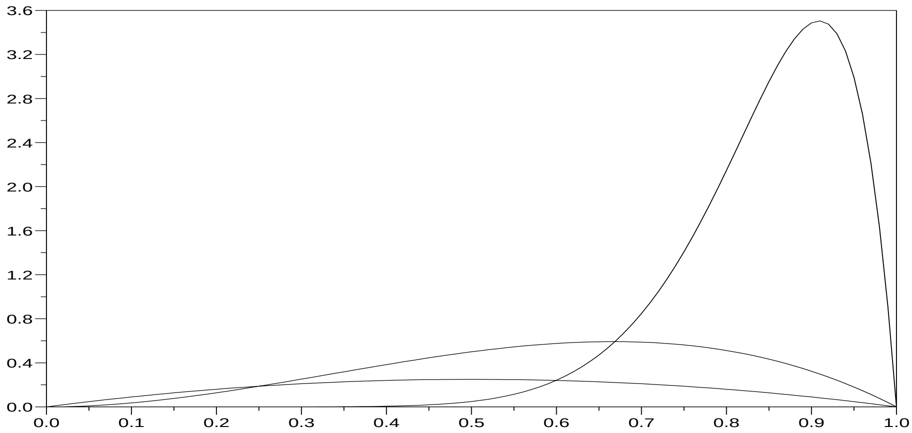

FIGURE 1.12 – Fonctions f_1, f_2, f_{10}, avec $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$.

$\sup_{x\in[a,b]} d_n(x)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Exemple. Reprenons sur $[0,1]$ les fonctions $f_n : x \mapsto n^2x^n(1-x)$. On a vu qu'elles convergent simplement vers la fonction $f = 0$. Puisque les f_n sont positives, on a donc $d_n = |f_n - f| = f_n$. Or pour tout $n \geq 1$, $f_n'(x) = n^2x^{n-1}(n-(n+1)x)$. L'étude des variations montre que le maximum M_n de la fonction d_n est atteint au point $\alpha_n = \frac{n}{n+1}$ et vaut $M_n = d_n(\alpha_n)$. Il reste à voir la limite de (M_n) :

$$M_n = n^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^2}{n+1}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \sim \frac{n}{e} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$

donc (M_n) ne tend pas vers zéro et la convergence n'est pas uniforme.

Proposition 1.7 (Convergence uniforme et intégrabilité)
Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions Riemann intégrables sur le segment $[a,b]$. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, alors f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et on peut passer la limite sous le signe somme :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $n_0 \in \mathbb{N}$ associé comme dans la définition de la convergence uniforme ci-dessus. Alors il est clair que sur tout intervalle I_k de la partition et pour tout $n \geq n_0$:

$$\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \leq \sup_{I_k} f_n - \inf_{I_k} f_n + 2\varepsilon.$$

Ceci donne pour toute subdivision $\mathcal{S}$ de $[a,b]$:

$$\Sigma(f,\mathcal{S}) - \sigma(f,\mathcal{S}) \leq \Sigma(f_n,\mathcal{S}) - \sigma(f_n,\mathcal{S}) + 2\varepsilon(b-a).$$

Une fois fixé $\varepsilon > 0$, il suffit alors de fixer $n \geq n_0$ puis une subdivision $\mathcal{S}$ telle que :

$$\Sigma(f_n,\mathcal{S}) - \sigma(f_n,\mathcal{S}) \leq \varepsilon,$$

ce qui aboutit à :

$$\Sigma(f,\mathcal{S}) - \sigma(f,\mathcal{S}) \leq (1+2(b-a))\varepsilon.$$

Cette quantité pouvant être rendue arbitrairement petite, on en déduit que f est bien Riemann intégrable. De plus, avec les notations précédentes, on peut alors écrire que pour tout $n \geq n_0$:

$$\int_a^b f_n(x)\,dx - \varepsilon(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f_n(x)\,dx + \varepsilon(b-a).$$

Ceci prouve que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

■

Remarque : le point de vue de l'analyse fonctionnelle
Rappelons que par définition, toute fonction Riemann intégrable est bornée. On munit $\mathcal{R}_{[a,b]}$ de la norme du sup $||.||_\infty$, définie par :

$$||f||_\infty \triangleq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

La première partie du résultat précédent assure que, dans l'espace $(\mathcal{B}_{[a,b]}, ||.||_\infty)$ des fonctions bornées de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, le sous-espace des fonctions Riemann intégrables est fermé (on peut en fait montrer qu'il est complet). La seconde partie de la proposition dit que la forme linéaire

$$I : \left\{ \begin{array}{cl} \mathcal{R}_{[a,b]} & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_a^b f(x)\,dx \end{array} \right.$$

est une fonction continue. Elle est en fait $(b-a)$-lipschitzienne puisque par la positivité de l'intégration :

$$\forall f \in \mathcal{R}_{[a,b]} \qquad |I(f)| \leq (b-a)||f||_\infty.$$

1.5 Intégrale et primitive

Le problème des primitives est très délicat en général : une fonction peut être Riemann intégrable sans admettre de primitive et réciproquement. On se contentera ici d'énoncer les théorèmes dans le cas simple où la fonction est continue. Quelques remarques complémentaires permettront de préciser les choses.

Rappel. soit f définie sur le segment $[a,b]$. La fonction Φ est une primitive de f sur $[a,b]$ si $\Phi'(x) = f(x)$ pour tout x de l'ouvert $]a,b[$, $\Phi'_d(a) = f(a)$ et $\Phi'_g(b) = f(b)$. On note $\mathcal{P}_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions admettant une primitive sur $[a,b]$.

Soit f Riemann intégrable sur le segment $[a,b]$. On peut donc définir une nouvelle fonction F sur $[a,b]$ comme suit :

$$F(x) \triangleq \int_a^x f(t)\,dt.$$

Le cas confortable est celui où f est continue.

Théorème 1.1 (Formule fondamentale du calcul intégral)
Si f est continue sur $[a,b]$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$: c'est la primitive de f qui s'annule en a. Pour toute autre primitive Φ de f sur $[a,b]$, on a la relation :

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Preuve. Supposons par exemple que $x_0 \in]a, b[$. On peut alors écrire :

$$F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0) = \int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\, dx,$$

or f est continue en x_0 donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

donc pour $|x - x_0| < \delta$, on a :

$$|F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0|,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Donc F est bien dérivable en x_0, de dérivée $f(x_0)$. Puisque f est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Soit alors Φ une autre primitive de f sur $[a, b]$. Φ est donc elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in [a, b] \qquad (\Phi - F)'(x) = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Par le théorème des accroissements finis, la fonction $(\Phi - F)$ est constante sur $[a, b]$. Puisque $F(a) = 0$, on a bien :

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

■

Exemple. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. La fonction logarithme népérien :

$$\ln : \left\{ \begin{array}{rl}]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \end{array} \right.$$

est la primitive qui s'annule au point 1.

Remarque. Si on suppose seulement que f est Riemann intégrable sur $[a, b]$, alors F est continue sur $[a, b]$ et dérivable en tout point où f est continue, avec $F'(x) = f(x)$.

On vient donc de montrer que toute fonction continue admet une primitive : $\mathcal{C}^0_{[a,b]} \subseteq \mathcal{P}_{[a,b]}$. Il ne faut pas croire que les fonctions admettant une primitive sur $[a, b]$ sont exactement les fonctions intégrables sur $[a, b]$: il n'y a inclusion ni dans un sens ni dans l'autre !

- $\mathcal{R}_{[a,b]} \nsubseteq \mathcal{P}_{[a,b]}$: f peut être Riemann intégrable sans admettre de primitive en tout point. Il suffit pour s'en convaincre de prendre f en escalier (et non constante). On peut en effet montrer (Théorème de Darboux) que toute fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Dès lors, si f est en escalier, elle ne peut être une fonction dérivée, donc ne peut admettre de primitive, alors qu'elle est clairement intégrable.

- $\mathcal{P}_{[a,b]} \nsubseteq \mathcal{R}_{[a,b]}$: f peut admettre une primitive sur $[a, b]$ sans être Riemann intégrable. Prenons le contre-exemple de Volterra (voir figure 1.13 à gauche) :

$$F : \left\{ \begin{array}{rl} [0, 1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]0, 1] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

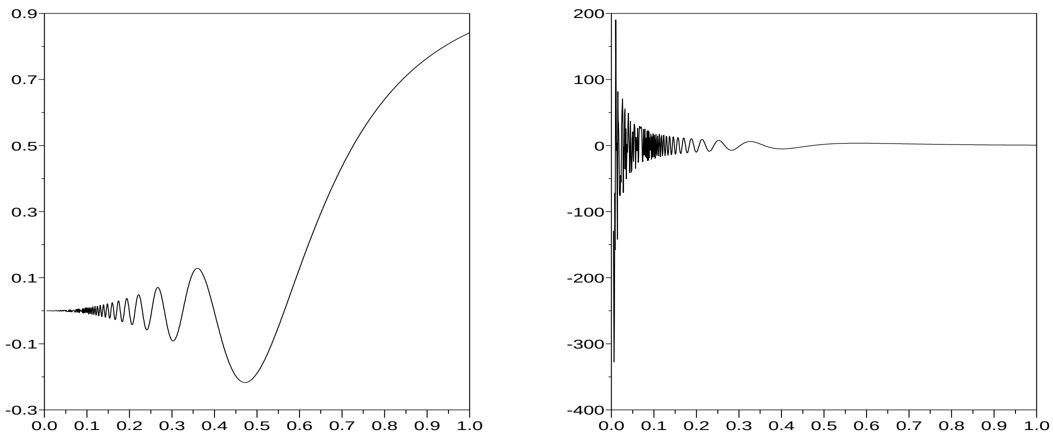

Figure 1.13 – Fonction de Volterra (à gauche) et sa dérivée (à droite).

Par les propriétés opératoires classiques, F est clairement dérivable sur $]0,1]$. Voyons ce qu'il en est à l'origine :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x^2}=0,$$

puisque $\left|\sin\frac{1}{x^2}\right|\leq 1$. Donc F est dérivable en 0, avec $F'(0)=0$. Sa dérivée sur $]0,1]$ est :

$$F'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2},$$

et on remarque que

$$\lim_{n\to\infty}F'\left(\frac{1}{2\pi n}\right)=\lim_{n\to\infty}-4\pi n=-\infty,$$

i.e. F' n'est pas bornée sur]0,1] (voir figure 1.13 à droite) : elle ne peut donc être Riemann intégrable, alors qu'elle admet F comme primitive.

1.6 Calculs d'intégrales

De la formule fondamentale ci-dessus, on déduit deux outils pratiques pour le calcul d'intégrales : intégration par parties et changement de variable. On donne les énoncés avec des hypothèses simples et souvent suffisantes en pratique.

Théorème 1.2 (Intégration par parties)
Soit f et g continues sur $[a,b]$, F et G deux primitives respectives, alors :

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx=F(b)G(b)-F(a)G(a)-\int_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que, sur le segment $[a,b]$, la fonction FG est une primitive de $fG+Fg$ et d'appliquer la formule fondamentale :

$$F(b)G(b)-F(a)G(a)=\int_a^b(f(x)G(x)+F(x)g(x))\,dx=\int_a^b f(x)G(x)\,dx+\int_a^b F(x)g(x)\,dx.$$

■

Exemple. Primitive de la fonction arctangente.

$$\int_0^x \arctan u\, du = [u \arctan u]_0^x - \int_0^x \frac{u}{1+u^2}\, du = x \arctan x - \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_0^x,$$

ce qui donne :

$$\int_0^x \arctan u\, du = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Ce qu'on écrit encore en terme de primitive :

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Théorème 1.3 (Changement de variable)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\varphi([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$, alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Preuve. La fonction f étant continue sur $[a,b]$, elle admet une primitive F sur ce segment. mais alors la fonction $Fo\varphi$ est dérivable sur $[\alpha,\beta]$, de dérivée $(fo\varphi)\varphi'$. Il suffit alors d'appliquer la formule fondamentale :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

■

Exemple : Calcul de $\int_0^1 (1-\sin x)^{-1}\, dx$
Pour toute fraction rationnelle en cosinus et sinus, c'est-à-dire pour toute intégrale du type :

$$\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}\, dx,$$

où P et Q sont des polynômes de deux variables, on peut se ramener à une fraction rationnelle usuelle via le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$. Dans ce cas, on a formellement $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, et par les formules trigonométriques classiques :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Après simplifications, ceci donne sur notre exemple :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-\sin x} = \int_0^{\tan\frac{1}{2}} \frac{2\,dt}{(1-t)^2} = \left[\frac{2}{1-t}\right]_0^{\tan\frac{1}{2}} = \frac{2\tan\frac{1}{2}}{1-\tan\frac{1}{2}}.$$

1.7 Fonctions à valeurs complexes

On considère maintenant une fonction :

$$f : \begin{cases} [a,b] & \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto f(x) = f_R(x) + i f_I(x) \end{cases}$$

La fonction f est bornée s'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b] \qquad |f(x)| = \sqrt{f_R^2(x) + f_I^2(x)} \le M,$$

ce qui revient exactement à dire que les fonctions f_R et f_I sont bornées sur $[a,b]$.

Définition 1.8 (Fonctions à valeurs complexes intégrables)
La fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est dite Riemann intégrable si les deux fonctions f_R et f_I le sont. Dans ce cas, on définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_R(x)\,dx + i\int_a^b f_I(x)\,dx.$$

On note $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$ l'ensemble de ces fonctions.

Exemple. La fonction

$$f : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto e^{ix} \end{cases}$$

est Riemann intégrable sur $[0, 1]$ puisque les fonctions cosinus et sinus le sont. On a de plus :

$$\int_0^1 e^{ix}\,dx = \int_0^1 \cos x\,dx + i\int_0^1 \sin x\,dx = \sin 1 + i(1 - \cos 1).$$

On retrouve alors les propriétés vues pour les fonctions à valeurs réelles :

– $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et l'application

$$I : \begin{cases} \mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]} & \to \mathbb{C} \\ f & \mapsto \int_a^b f(x)\,dx \end{cases}$$

  est une forme linéaire sur $\mathbb{C}$.
– Si $f \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$, alors $|f| \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$ et

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

– Une fonction $f = f_R + if_I$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ admet une primitive si f_R et f_I admettent chacune une primitive F_R et F_I. Dans ce cas, la fonction $F = F_R + iF_I$ est une primitive de f et on retrouve : la formule fondamentale du calcul intégral, la formule d'intégration par parties, la formule de changement de variable (avec φ à valeurs réelles !).

Exemple. Une primitive de la fonction

$$f : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto e^{ix} = \cos x + i \sin x \end{cases}$$

est la fonction

$$F : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto \sin x - i \cos x \end{cases}$$

Par ailleurs, on généralise sans problème le résultat connu pour les exponentielles réelles : si $\alpha \in \mathbb{C}^*$, la primitive de $x \mapsto e^{\alpha x}$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$.

Noter que, contrairement au lien primitive/intégrale dans le cas réel, la primitive F obtenue ci-dessus ne s'annule pas au point 0. En rapport avec ceci, voyons un exemple de résultat qui ne se généralise pas aux fonctions à valeurs complexes.

Théorème 1.4 (Formule de la moyenne)
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et de signe constant, alors il existe un point $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Preuve. f est continue sur le segment $[a,b]$ donc est bornée et atteint ses bornes. On note

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Pour tout $x \in [a,b]$, supposons par exemple g positive, on a donc :

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x).$$

Par intégrabilité de fg et positivité de l'intégration, on peut intégrer membre à membre de a à b :

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx,$$

d'où deux situations possibles :
- ou bien $\int_a^b g(x)\,dx = 0$: la double inégalité ci-dessus montre que $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ et tout $c \in [a,b]$ convient dans l'énoncé du théorème.
- ou bien $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, auquel cas on peut encore écrire :

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M.$$

Or le théorème des valeurs intermédiaires assure que f prend toute valeur entre m et M. En particulier il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$(b-a)f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

■

Considérons le cas particulier où $g = 1$: la formule de la moyenne assure qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ce résultat est faux dans le cas d'une fonction à valeurs complexes. Ainsi considérons :

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} [0,2\pi] & \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto e^{ix} = \cos x + i\sin x \end{array} \right.$$

On a $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$, alors qu'il n'existe aucun $c \in [0,2\pi]$ tel que $2\pi f(c) = 0$.

1.8 Intégrales généralisées

1.8.1 Définitions et premiers résultats

On considère dans toute cette section $I = [a,b[$ avec b réel ou égal à $+\infty$, et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout segment $[a,X] \subset [a,b[$, on ait $f \in \mathcal{R}_{[a,X]}$. On dit que f est localement intégrable sur I (typiquement : f est continue sur I). Les résultats s'adaptent sans problème au cas d'un intervalle semi-ouvert de type $I =]a,b]$ avec a réel ou égal à $-\infty$.

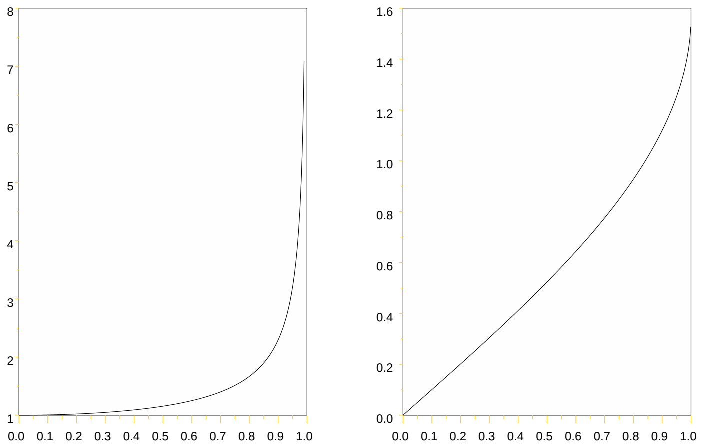

FIGURE 1.14 – Fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et primitive $x \mapsto \arcsin x$.

Définition 1.9 (Intégrale de Riemann généralisée)
On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente et vaut L si :

$$\lim_{X \to b} \int_a^X f(x)\,dx = L \in \mathbb{R}.$$

On note alors comme précédemment :

$$\int_a^b f(x)\,dx = L.$$

Sinon on dit qu'elle est divergente. On note $\mathcal{R}_I$ l'ensemble des fonctions f dont l'intégrale est convergente sur I.

Exemples.
– L'intégrale de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est convergente sur $[0,1[$ et vaut $\frac{\pi}{2}$ (voir figure 1.14) puisque :

$$\int_0^X \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\arcsin x]_0^X = \arcsin X \xrightarrow[X \to 1]{} \frac{\pi}{2}.$$

– L'intégrale de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est convergente sur $[0,+\infty[$ et vaut $\frac{\pi}{2}$ (voir figure 1.15) puisque :

$$\int_0^X \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_0^X = \arctan X \xrightarrow[X \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

– L'intégrale de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est divergente sur $[1,+\infty[$ (voir figure 1.16) puisque :

$$\int_1^X \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^X = \ln X \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty.$$

Remarque. Contrairement à ce qui se passe sur un segment, une fonction intégrable sur un intervalle semi-ouvert n'est pas nécessairement bornée. Sur le premier exemple ci-dessus, on a $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$.

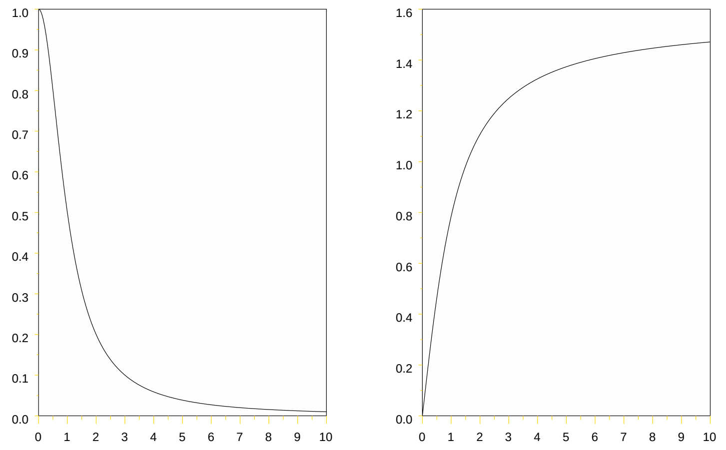

FIGURE 1.15 – Fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et primitive $x \mapsto \arctan x$.

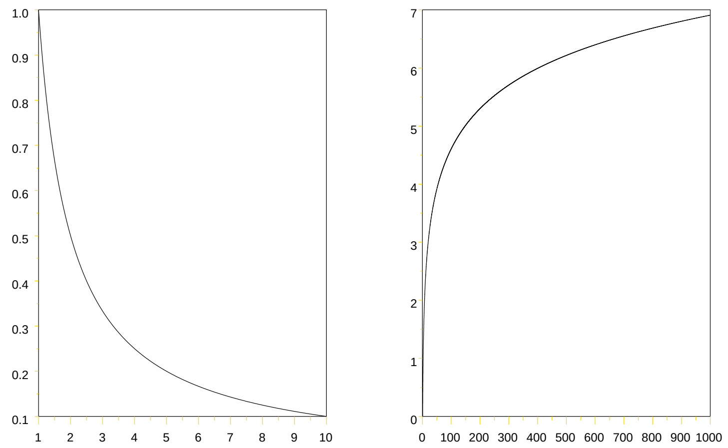

FIGURE 1.16 – Fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et primitive $x \mapsto \ln x$.

Propriétés 1.2 (Propriétés opératoires classiques)
$\mathcal{R}_I$ est un espace vectoriel réel et l'application

$$I : \begin{cases} \mathcal{R}_I & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_I f(x)\,dx \end{cases}$$

est une forme linéaire positive. C'est-à-dire :
- *$\forall f, g \in \mathcal{R}_I$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}_I$ et*

$$\int_I (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_I f(x)\,dx + \beta \int_I g(x)\,dx.$$

- *Si $f \in \mathcal{R}_I$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout x de I, alors :*

$$\int_I f(x)\,dx \geq 0.$$

Preuve. Puisque les fonctions considérées sont localement intégrables, ces résultats découlent des propriétés vues pour l'intégrale sur un segment $[a, X]$ en faisant tendre X vers b.

■

On n'a plus de stabilité par passage à la valeur absolue : $f \in \mathcal{R}_I$ n'implique pas $|f| \in \mathcal{R}_I$. Nous allons approfondir ce point.

Définition 1.10 (Intégrale généralisée absolument convergente)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_I f(x)\,dx$ est absolument convergente si l'intégrale généralisée $\int_I |f(x)|\,dx$ est convergente. Si $f \in \mathcal{R}_I$, mais $|f| \notin \mathcal{R}_I$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_I f(x)\,dx$ est semi-convergente.

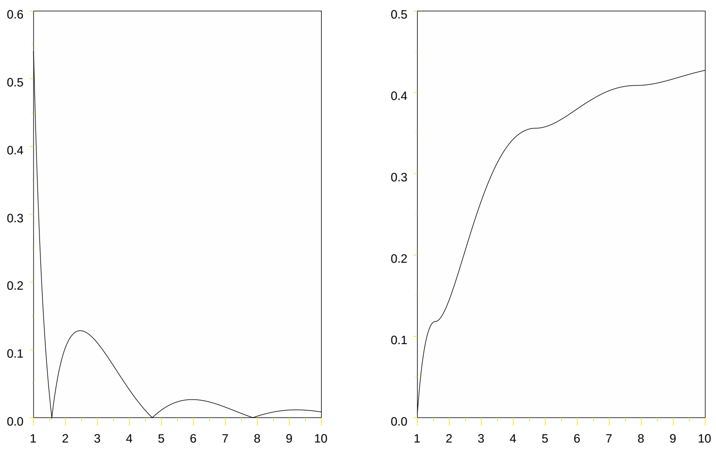

FIGURE 1.17 – Fonction $x \mapsto \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|$ et intégrale $\int_1^X \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\,dx$.

Exemple. L'intégrale de $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$ est absolument convergente sur $[1, +\infty[$. En effet, la fonction

$$F : \begin{cases} [1, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ X & \mapsto \int_1^X \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\,dx \end{cases}$$

est croissante, via la relation de Chasles, et majorée par 1 :

$$\int_1^X \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \leq \int_1^X \frac{1}{x^2}\, dx = 1 - \frac{1}{X} \leq 1.$$

On en déduit qu'elle admet une limite lorsque X tend vers l'infini : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ est absolument convergente (voir figure 1.17).

On retrouve ainsi la même terminologie que pour les séries : on dit que la série numérique $\sum u_n$ est absolument convergente si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente. De même on retrouve le résultat **fondamental** suivant.

Théorème 1.5 (Absolue convergence $\Rightarrow$ Convergence)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si l'intégrale $\int_I |f(x)|\, dx$ est convergente, alors $\int_I f(x)\, dx$ est convergente. De plus, on a l'inégalité :

$$\left|\int_I f(x)\, dx\right| \leq \int_I |f(x)|\, dx.$$

Preuve. On décompose f en parties positive et négative comme précédemment : soit donc $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = -\inf(f, 0)$. Les fonctions f^+ et f^- sont positives localement intégrables et on a :

$$f = f^+ - f^- \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

En particulier, on en déduit que $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$. La fonction

$$P : \begin{cases} I = [a, b[& \to \mathbb{R} \\ X & \mapsto \int_a^X f^+(x)\, dx \end{cases}$$

est croissante, via la relation de Chasles, et majorée :

$$\int_a^X f^+(x)\, dx \leq \int_a^X |f(x)|\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

On en déduit qu'elle admet une limite lorsque X tend vers b : c'est l'intégrale généralisée de f^+ sur $I = [a, b[$. On peut faire le même raisonnement pour la fonction

$$M : \begin{cases} I = [a, b[& \to \mathbb{R} \\ X & \mapsto \int_a^X f^-(x)\, dx \end{cases}$$

Ainsi $\int_a^b f^+(x)\, dx$ et $\int_a^b f^-(x)\, dx$ sont convergentes. Par linéarité de l'intégration, on en déduit que $\int_a^b f(x)\, dx$ converge, avec :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f^+(x)\, dx - \int_a^b f^-(x)\, dx.$$

Enfin, pour tout $X \in [a, b[$, on a par positivité (ter) de l'intégrale sur un segment :

$$\left|\int_a^X f(x)\, dx\right| \leq \int_a^X |f(x)|\, dx.$$

Il suffit alors de faire tendre X vers b pour obtenir l'inégalité de l'énoncé.

■

Supposons qu'on veuille connaître la nature d'une intégrale généralisée $\int_I f(x)\,dx$, avec f de signe variable : on peut commencer par étudier la nature de $\int_I |f(x)|\,dx$. L'intérêt de se ramener à des intégrales généralisées de fonctions positives est qu'on dispose pour celles-ci de critères simples de convergence/divergence. Avant de les exposer, on donne un exemple typique d'intégrale semi-convergente.

Exemple : semi-convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

– Convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Fixons $X > 1$. On intègre par parties pour obtenir :
$$\int_1^X \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$
Or $\lim_{X\to\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$ et on a vu ci-dessus que l'intégrale généralisée $\int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ est absolument convergente : elle est donc convergente, c'est-à-dire que $\lim_{X\to\infty} \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,dx = L \in \mathbb{R}$. Ce qui donne :
$$\int_1^X \frac{\sin x}{x}\,dx \xrightarrow[X\to\infty]{} 1 - L.$$
L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est convergente (voir figure 1.18, graphes du haut).

– Divergence de $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|\,dx$. On commence par noter la ruse suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin x| \geq \sin^2 x.$$
On prend à nouveau $X > 1$ et on minore :
$$\int_1^X \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx \geq \int_1^X \frac{\sin^2 x}{x}\,dx.$$
Linéarisation et changement de variable donnent alors :
$$\int_1^X \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_1^X \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^{2X} \frac{1-\cos u}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln X - \frac{1}{2}\int_2^{2X} \frac{\cos u}{u}\,du.$$
Or le second terme converge lorsque X tend vers l'infini par le même raisonnement que pour $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Mais $\lim_{X\to\infty} \ln X = +\infty$, donc :
$$\int_1^X \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx \xrightarrow[X\to\infty]{} +\infty.$$
L'intégrale $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|\,dx$ est divergente (voir figure 1.18, graphes du bas).

Remarque. Pour les intégrales généralisées, on n'a plus de stabilité par produit : $f, g \in \mathcal{R}_I$ n'implique pas $fg \in \mathcal{R}_I$. Il suffit pour s'en convaincre de reprendre la fonction
$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right.$$
f est intégrable sur $[0,1[$. On n'en dira pas autant de f^2 puisque :
$$\int_0^X \frac{1}{1-x^2}\,dx = \arg\tanh X \xrightarrow[X\to 1]{} +\infty.$$
Il faut donc prendre quelques précautions pour Cauchy-Schwarz.

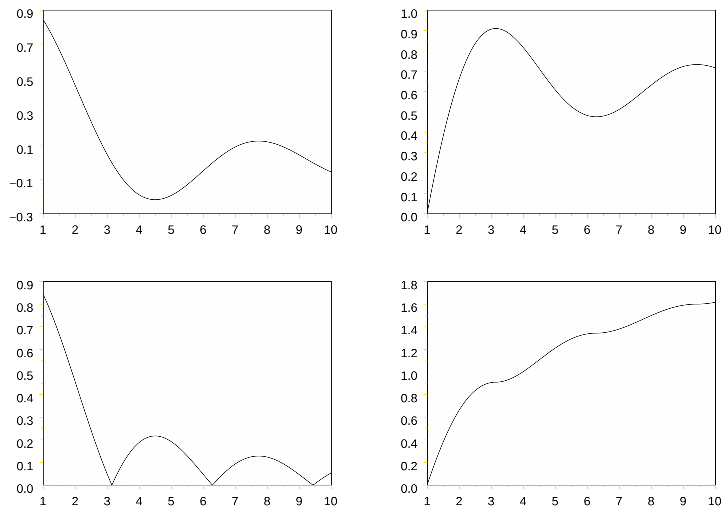

FIGURE 1.18 – Semi-convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Proposition 1.8 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soit f et g telles que f^2 et $g^2 \in \mathcal{R}_I$, alors $fg \in \mathcal{R}_I$ et :

$$\left(\int_I f(x)g(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_I f^2(x)\, dx\right) \cdot \left(\int_I g^2(x)\, dx\right).$$

Preuve. C'est la même que dans le cas de l'intégrale sur un segment, i.e. basée sur le discriminant d'un trinôme toujours positif.

■

1.8.2 Intégrales généralisées des fonctions positives

Comme pour les séries numériques à termes positifs, tout part d'un constat très simple : si la fonction $F : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ est croissante et majorée, alors elle admet une limite finie en b. Puisque f est localement intégrable, la fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{ll} [a, b[& \to \mathbb{R} \\ X & \mapsto \int_a^X f(x)\, dx \end{array} \right.$$

est d'une part bien définie et d'autre part croissante par la relation de Chasles. Le résultat suivant est alors clair.

Théorème 1.6 (Critère fondamental de convergence)
Soit $f : I = [a, b[\to \mathbb{R}^+$ localement intégrable, alors l'intégrale généralisée $\int_I f(x)\, dx$ est convergente si et seulement si il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall X \in [a, b[\qquad \int_a^X f(x)\, dx \leq M.$$

Tous les critères classiques de convergence en découlent. Rappelons les relations de comparaison vues en première année.

Définition 1.11 (Relations de comparaison)
Soit f et g deux fonctions définies sur $[a, b[$, avec $g(x) \neq 0$ pour x au voisinage de b. On dit que :
- f est un petit o de g, ou est négligeable devant g, au voisinage de b, et on note $f =_b o(g)$, si :

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- f est équivalente à g au voisinage de b, et on note $f \sim_b g$, si :

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

L'intérêt de ces notions est de trouver la nature d'une intégrale compliquée en se ramenant à une intégrale plus simple. Ceci grâce aux propriétés suivantes.

Propriétés 1.3 (Critères de comparaison)
Si f et g sont positives sur I, alors :
– *Si $f \leq g$ et si $g \in \mathcal{R}_I$, alors $f \in \mathcal{R}_I$.*
– *Si $f \leq g$ et si $f \notin \mathcal{R}_I$, alors $g \notin \mathcal{R}_I$.*
– *Si $f =_b o(g)$ et si $g \in \mathcal{R}_I$, alors $f \in \mathcal{R}_I$.*
– *Si $f =_b o(g)$ et si $f \notin \mathcal{R}_I$, alors $g \notin \mathcal{R}_I$.*
– *Si $f \sim_b g$ alors $f \in \mathcal{R}_I$ si et seulement si $g \in \mathcal{R}_I$.*

Exemples.
– L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ est convergente puisque :

$$\forall x \geq 1 \qquad 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x},$$

et le majorant s'intègre sans problème :

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{e}.$$

– La fonction $f : x \mapsto \frac{3x^2+2x+1}{(1-x)(2x+3)}$ n'est pas intégrable sur $[0, 1[$, car :

$$0 \leq f(x) \sim_1 \frac{6}{5(1-x)},$$

or :

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\, dx = [-\ln(1-x)]_0^1 = +\infty.$$

Remarque. Bien sûr, les critères ci-dessus sont aussi des critères d'absolue convergence. Par exemple $x \mapsto \frac{\sin x}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ puisque pour tout $x \geq 1$, $|\frac{\sin x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (primitive évidente). Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ est absolument convergente, et par conséquent elle est convergente.

Propriétés 1.4 (Intégrales de Riemann)
– *L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*
– *L'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.*

Preuve. Si $\alpha = 1$, on a d'une part :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty,$$

et d'autre part :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = [\ln x]_0^1 = +\infty.$$

Si $\alpha \neq 1$, une primitive de $x \mapsto x^{-\alpha}$ est $x \mapsto \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha},$$

quantité convergente si seulement si $1 - \alpha < 0$, c'est-à-dire $\alpha > 1$. De même :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{x\to 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

quantité convergente si seulement si $1 - \alpha > 0$, c'est-à-dire $\alpha < 1$.

■

Remarque. Ainsi, si on veut montrer que $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente, une condition suffisante est que f soit négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de l'infini, c'est-à-dire que $\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0$. C'est ainsi qu'on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$ est convergente. On peut même montrer facilement que I_n vaut $n!$

Exemple. Ce critère peut aussi servir à prouver l'absolue convergence, donc la convergence, d'une intégrale généralisée. Par exemple, l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x \cos x}{x^2}\, dx$$

est absolument convergente puisque :

$$x^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x \cos x}{x^2} = \frac{\ln x \cos x}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\ln x \cos x}{x^2} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}\, dx$ est convergente, donc l'intégrale de départ aussi.

Rappel : lien série/intégrale
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ positive décroissante, alors on peut faire la relation entre la série numérique $\sum_{n\geq 0} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.

Théorème 1.7
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante, alors la série $\sum f(n)$ a même nature que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.

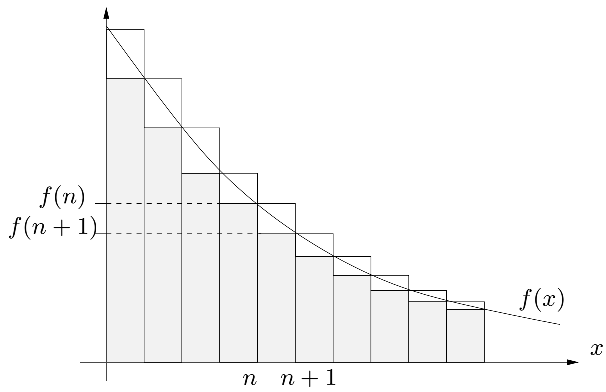

FIGURE 1.19 – Illustration de l'inégalité : $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$.

Preuve. Par décroissance de f, on a :

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in [n, n+1] \qquad f(n+1) \leq f(x) \leq f(n),$$

d'où l'on déduit en intégrant entre n et $(n+1)$ (voir figure 1.19) :

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in [n, n+1] \qquad f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n),$$

et par suite pour tout $n \geq 1$:

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx.$$

Ceci donne un encadrement de la somme partielle $s_N = \sum_{n=0}^{N} f(n)$:

$$\int_0^{N+1} f(x)\,dx \leq s_N \leq f(0) + \int_0^{N} f(x)\,dx,$$

donc deux situations possibles :
- ou bien $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$, auquel cas $s_N \leq f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$: les sommes partielles sont majorées, donc la série est convergente.
- ou bien $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, auquel cas $\lim_{N\to\infty} \int_0^{N+1} f(x)\,dx = +\infty$ et l'inégalité de gauche assure qu'il en est de même pour (s_N) : la série est divergente.

■

Remarque. Si la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ne commence pas à l'indice 0, on considère bien entendu l'intégrale généralisée de n_0 à l'infini.

Exemple. On retrouve ainsi très simplement le résultat sur les séries de Riemann pour $\alpha > 0$: la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ a même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$.

Proposition 1.9 (Estimation du reste ou de la somme partielle)
Sous les mêmes hypothèses que précédemment, la suite $(s_N - \int_0^N f(x)\,dx)_{N\in\mathbb{N}}$ *est convergente. Et :*
- Si l'intégrale converge, alors $\int_{N+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq r_N \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx$.
- Si l'intégrale diverge, on a l'équivalence $s_N \sim \int_0^N f(x)\,dx$.

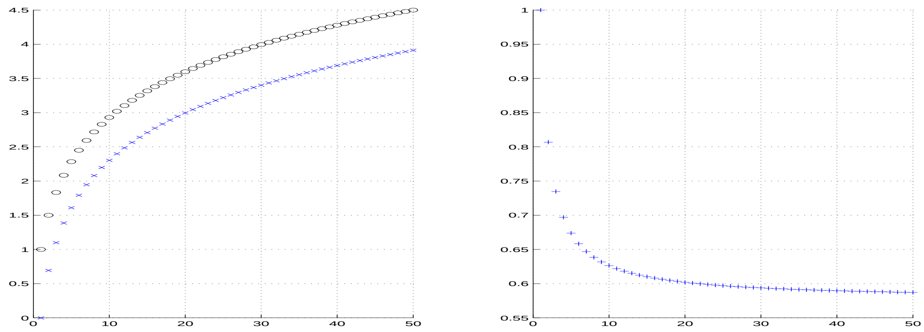

FIGURE 1.20 – A gauche : sommes partielles de la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ (o) et suite $(\ln n)_{n\geq 1}$ (x). A droite : suite $(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\ln N)_{N\geq 1}$, convergence vers la constante d'Euler $\gamma\approx 0.577$.

Preuve. Soit $w_N = s_N - \int_0^N f(x)\,dx$. La suite (w_N) est décroissante puisque :

$$w_N - w_{N-1} = f(N) - \int_{N-1}^N f(x)\,dx \leq 0,$$

d'après la majoration de $f(N)$ déjà vue. Par ailleurs, on a vu également que :

$$s_N \geq \int_0^{N+1} f(x)\,dx,$$

d'où il vient :

$$w_N = s_N - \int_0^N f(x)\,dx \geq \int_N^{N+1} f(x)\,dx \geq 0,$$

par positivité de f. Ainsi (w_N) est décroissante minorée : elle converge.
- Si l'intégrale converge : soit $r_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n)$, on a vu que pour tout $n\geq 1$:

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)\,dx,$$

ce qui donne en sommant membre à membre de $(N+1)$ à $(N+p)$ et en faisant tendre p vers l'infini :

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq r_N \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx.$$

- Si l'intégrale diverge, alors en notant L la limite de (w_N), on a le développement asymptotique : $s_N - \int_0^N f(x)\,dx = L + o(1)$, avec $\lim_{N\to\infty} L + o(1) = L$, donc :

$$\frac{s_N}{\int_0^N f(x)\,dx} = 1 + \frac{L+o(1)}{\int_0^N f(x)\,dx} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1.$$

■

Exemples.
– L'erreur faite en remplaçant $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ par la somme des 100 premiers termes est de l'ordre de 10^{-2}. De façon générale, la suite (r_N) des restes de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est équivalente à la suite $(\frac{1}{N})$.

– La série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente, de somme partielle (s_N) équivalente à $(\ln N)$. Plus précisément, la suite $(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\ln N)$ admet une limite γ, appelée constante d'Euler :
$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\ln N \xrightarrow[N\to\infty]{} \gamma = 0.577\ldots$$
autrement dit on a le développement asymptotique : $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\ln N+\gamma+o(1)$, cf. figure 1.20.

On a vu auparavant que les relations de comparaison (négligeabilité, équivalence) permettent souvent de déterminer la nature d'une fonction grâce à celle d'une fonction plus simple. Mieux, on peut avoir une idée de la vitesse à laquelle l'intégrale converge ou diverge.

Proposition 1.10 (Intégration des relations de comparaison)
Soit f et g deux fonctions de $I=[a,b[$ dans $\mathbb{R}^+$.
Supposons $f\sim_b g$, alors $\int_I f(x)\,dx$ et $\int_I g(x)\,dx$ ont même nature et
– *en cas de convergence :*
$$\int_X^b f(x)\,dx \sim_b \int_X^b g(x)\,dx.$$
– *en cas de divergence :*
$$\int_a^X f(x)\,dx \sim_b \int_a^X g(x)\,dx.$$
Supposons $f=_b o(g)$, alors
– *Si $\int_I g(x)\,dx$ est convergente, $\int_I f(x)\,dx$ aussi et :*
$$\int_X^b f(x)\,dx =_b o\left(\int_X^b g(x)\,dx\right).$$
– *Si $\int_I f(x)\,dx$ est divergente, $\int_I g(x)\,dx$ aussi et :*
$$\int_a^X f(x)\,dx =_b o\left(\int_a^X g(x)\,dx\right).$$

Exemples.
– L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty}\frac{x^2+x}{x^3+1}\,dx$ est divergente puisque $\frac{x^2+x}{x^3+1}\sim_{+\infty}\frac{1}{x}$. De plus, sans calculs lourdingues, on a une idée de la vitesse à laquelle l'intégrale diverge :
$$\int_1^X \frac{x^2+x}{x^3+1}\,dx \sim_{+\infty} \int_1^X \frac{dx}{x} = \ln X.$$
– L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty}\frac{x^2+x}{x^4+x+1}\,dx$ est convergente puisque $\frac{x^2+x}{x^4+x+1}\sim_{+\infty}\frac{1}{x^2}$. On a donc convergence du reste de l'intégrale vers zéro, et ce à vitesse :
$$\int_X^{+\infty} \frac{x^2+x}{x^4+x+1}\,dx \sim_{+\infty} \int_X^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{X}.$$

1.8.3 Les grands théorèmes

On sait que pour le calcul effectif des intégrales sur $[a,b]$, on utilise trois outils principaux : le lien intégrale/primitive (encore appelé "formule fondamentale du calcul intégral"), l'intégration par parties et la formule de changement de variable. Peut-on encore s'en servir pour le calcul d'intégrales généralisées sur $[a,b[$? La réponse est oui. En particulier, si on s'intéresse seulement à la nature d'une intégrale généralisée, on ne la change pas en effectuant une intégration par parties ou un changement de variable, ce qui permet parfois de simplifier l'étude.

Exemple. Supposons qu'on veuille déterminer la nature de l'intégrale :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}\right) dx.$$

Elle est généralisée en $+\infty$. On peut commencer par effectuer le changement de variable :

$$\begin{cases} u = & \frac{1}{x} \\ du = & -\frac{1}{x^2}\,dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = & \frac{1}{u} \\ dx = & -\frac{1}{u^2}\,du \end{cases}$$

Et on a donc :

$$I = \int_1^0 u\,(e^u - \cos u) \times -\frac{1}{u^2}\,du = \int_0^1 \frac{e^u - \cos u}{u}\,du.$$

Cette nouvelle intégrale est généralisée en 0. On commence par remarquer que $u > 0$ implique $e^u \geq 1 \geq \cos u$, donc l'intégrand est positif et on pourra déterminer sa nature grâce à celle d'un équivalent plus simple. Or on a les développements limités suivants en 0 :

$$\begin{cases} e^u = & 1 + u + o(u) \\ \cos u = & 1 + o(u) \end{cases}$$

D'où il vient :

$$\frac{e^u - \cos u}{u} = \frac{u + o(u)}{u} = 1 + o(1),$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{e^u - \cos u}{u} = 1,$$

donc la fonction à intégrer est prolongeable par continuité en 0 et l'intégrale I est convergente.

1.8.4 Intégrales doublement généralisées

On se place maintenant sur l'intervalle $I =]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Définition 1.12 (Convergence d'une intégrale doublement généralisée)
Soit $f : I =]a, b[\to \mathbb{R}$. On dit que l'intégrale $\int_I f(x)\,dx$ est convergente si pour $c \in]a, b[$, les deux intégrales généralisées $\int_a^c f(x)\,dx$ et $\int_c^b f(x)\,dx$ convergent. On pose alors :

$$\int_I f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Remarquons que ceci ne dépend nullement du point c choisi entre a et b.

Exemples.
– Soit α un réel. L'intégrale doublement généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ est divergente. En effet, si $\alpha \geq 1$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ est divergente. A contrario, si $\alpha \leq 1$, c'est l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ qui diverge.
– Nature de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}\,dx.$$

En 0, l'intégrale est absolument convergente puisque :

$$\left|\frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}\right| \leq \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sim_{0^+} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

et par le critère de Riemann, on sait que l'intégrale généralisée :

$$\int_0 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

est convergente. En l'infini, on a $\sin\frac{1}{x^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$ et $\ln(1+x) \sim_{+\infty} \ln x$, donc :

$$0 \leq \frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}\ln(1+x)} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

ce qui prouve la convergence.

Les intégrales généralisées de fonctions à valeurs complexes se traitent de façon naturelle. Soit $f : I =]a,b[\to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes que l'on écrit $f = f_R + if_I$. On dit que l'intégrale $\int_I f(x)\,dx$ est convergente si les deux intégrales $\int_I f_R(x)\,dx$ et $\int_I f_I(x)\,dx$ convergent, auquel cas :

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f_R(x)\,dx + i\int_I f_I(x)\,dx.$$

1.9 Intégration numérique

Supposons qu'on veuille calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

On a vu jusqu'à présent qu'il suffit de connaître une primitive F de f. Mais, dans la plupart des cas, même si f s'exprime à l'aide de fonctions usuelles (polynômes, fractions rationnelles, fonctions trigonométriques, etc.), il n'en va pas de même pour F. On n'a donc pas de formule exacte pour I. Par contre, on peut obtenir une valeur approchée de I grâce à des techniques d'intégration numérique. C'est ce qui est fait par les calculatrices et les logiciels mathématiques. On donne ici quelques idées sur ces méthodes.

1.9.1 Méthode des rectangles

La première idée est naturelle et a déjà été entrevue : elle consiste à approcher I par une somme de Riemann. On commence par subdiviser $[0,1]$ en n intervalles de même longueur et à remplacer f sur chacun de ces intervalles par une constante, par exemple sa valeur à l'extrémité gauche de l'intervalle (voir figure 1.21). En notant $x_k = k/n$, $k = \{0,\dots,n\}$, on obtient donc pour valeur approchée de l'intégrale I la valeur :

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

On veut alors estimer l'erreur faite en remplaçant I par R_n.

Proposition 1.11 (Erreur d'approximation)
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a :

$$|R_n - I| \leq \frac{M_1}{2n},$$

où M_1 est la borne supérieure de $|f'|$ sur $[0,1]$.

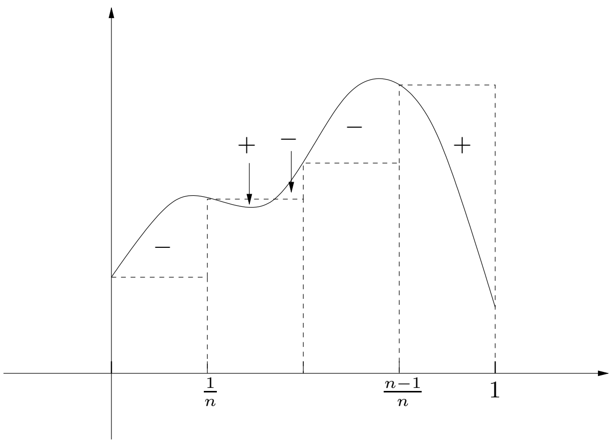

FIGURE 1.21 – Approximation de l'intégrale par la méthode des rectangles

Preuve. Soit $k \in \{0, \dots, (n-1)\}$. Par la formule des accroissements finis, on a pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$:

$$|f(x_k) - f(x)| \leq \sup_{t \in [x_k, x_{k+1}]} |f'(t)|(x - x_k) \leq M_1(x - x_k).$$

Sur cet intervalle, l'erreur est donc :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(x))\, dx \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x_k) - f(x)|\, dx,$$

et on peut majorer par ce qui a été vu ci-dessus :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(x))\, dx \right| \leq M_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)\, dx = \left[\frac{(x - x_k)^2}{2} \right]_{x_k}^{x_{k+1}},$$

et puisque $x_{k+1} - x_k = 1/n$, on en déduit que :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(x))\, dx \right| \leq \frac{M_1}{2n^2}.$$

Il reste à remarquer que l'erreur d'approximation sur l'intervalle $[0, 1]$ est inférieure à la somme des erreurs faites sur chacun des petits intervalles :

$$|R_n - I| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(x))\, dx \right| \leq n \cdot \frac{M_1}{2n^2} = \frac{M_1}{2n}.$$

■

Remarques.

1. Puisqu'on a pris la valeur de f à gauche de chaque petit intervalle, la méthode présentée ci-dessus est aussi appelée la méthode des rectangles à gauche. Si on prend la valeur de f à droite de chaque intervalle, on parle de méthode des rectangles à droite. Si on prend la valeur de f au milieu de chaque intervalle, on parle de méthode du point milieu.
2. Supposons qu'on considère l'intégrale de f sur un segment quelconque $[a, b]$ au lieu de $[0, 1]$. En subdivisant de même en n intervalles de longueur $(b-a)/n$ et en notant M_1 le maximum de $|f'|$ sur $[a, b]$, on obtient la formule générale :

$$|R_n - I| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}.$$

Ainsi, plus n est grand, plus l'erreur d'approximation est petite, ce qui est logique. Plus précisément, on voit que l'erreur est de l'ordre de $1/n$. Cependant, plus n est grand, plus le calcul de R_n est long : n appels à la fonction f, une somme de n termes et une division par n. Dans la suite, on va voir des méthodes plus efficaces.

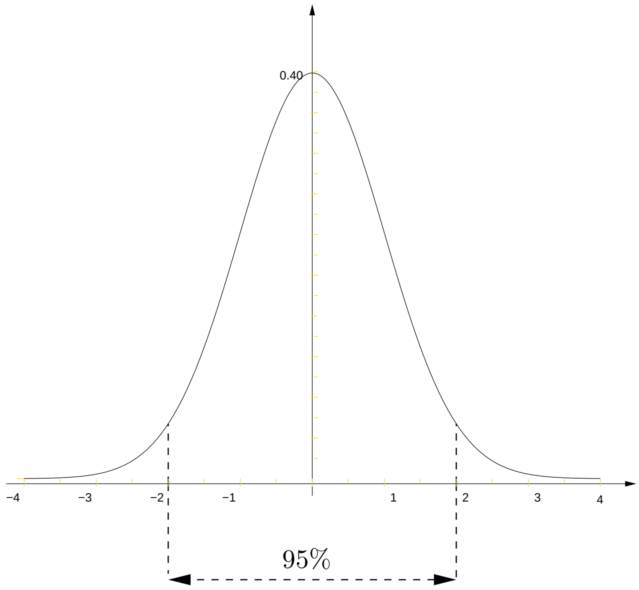

FIGURE 1.22 – Probabilité pour une variable gaussienne centrée réduite de tomber entre -2 et $+2$.

Exemple. On considère l'intégrale :

$$I = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

On sait qu'elle correspond à la probabilité qu'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite tombe dans l'intervalle $[-2, +2]$ (voir figure 1.22), c'est-à-dire $I \approx 0.95$. On veut retrouver ce résultat avec la méthode des rectangles : quel nombre n de points faut-il prendre dans la subdivision ?

Si on note $f : [-2, +2] \to \mathbb{R}$ la fonction qui à x associe $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, on a f de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc en particulier $\mathcal{C}^1$, avec :

$$f'(x) = -\frac{x e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \;\Rightarrow\; |f'(x)| = \frac{|x| e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

laquelle est maximale au point d'inflexion de f, lorsque $f''(x) = 0$, c'est-à-dire pour $x = \pm 1$. On a donc :

$$M_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Puisqu'on veut que $|R_n - I|$ soit inférieur à 10^{-2}, il suffit donc de choisir n tel que :

$$\frac{M_1(b-a)^2}{2n} \leq 10^{-2} \;\Leftrightarrow\; n \geq 800 M_1 = 193.57\ldots,$$

c'est-à-dire prendre $n \geq 194$.

Remarque. On voit qu'en exploitant la parité de f, on est ramené à chercher une valeur approchée de

$$\frac{I}{2} = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

à 0.005 près. En reprenant les formules précédentes, on gagne alors un facteur 2 sur le nombre de points à prendre en compte : $n = 97$ points suffisent. Dans la suite, on cherchera donc plutôt une valeur approchée de l'intégrale sur $[0, 2]$ à 0.005 près que de l'intégrale sur $[-2, +2]$ au centième près.

1.9.2 Méthode des trapèzes

Avec les mêmes notations, l'idée est cette fois de remplacer f sur chacun des n intervalles par le segment joignant les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, c'est-à-dire par une fonction f_n affine par morceaux (voir figure 1.23) :

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}] \qquad f_n(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k),$$

en notant toujours $x_0 = 0/n = 0$, $x_1 = 1/n, \ldots, x_{n-1} = (n-1)/n$ et $x_n = n/n = 1$.

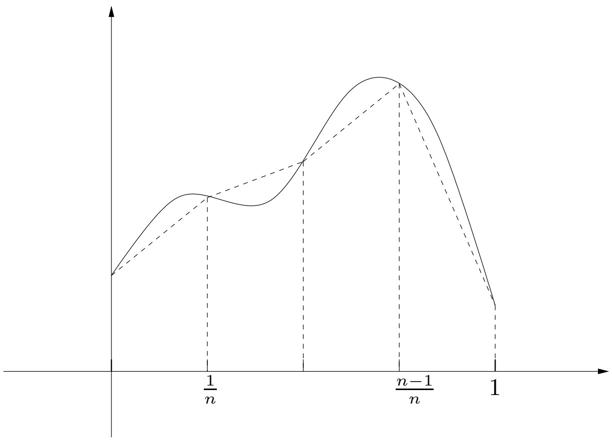

Figure 1.23 – Approximation de l'intégrale par la méthode des trapèzes

Pour tout $k \in \{0, \ldots, (n-1)\}$, on a donc :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_n(x)\, dx = (f(x_{k+1}) + f(x_k))\frac{x_{k+1} - x_k}{2} = \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2n},$$

qui n'est rien d'autre que la formule de l'aire d'un trapèze : (petite base + grande base) fois la hauteur et divisé par deux. La valeur approchée de l'intégrale I est donc :

$$T_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{n}\left(\frac{f(0) + f(1)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right).$$

Ici encore, on peut majorer l'erreur faite en remplaçant I par T_n.

Proposition 1.12 (Erreur d'approximation)
Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, on a :

$$|T_n - I| \leq \frac{M_2}{12n^2},$$

où M_2 est la borne supérieure de $|f''|$ sur $[0,1]$.

Preuve. On commence par scinder l'erreur en n morceaux :

$$|T_n - I| = \left|\int_0^1 (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f_n(x) - f(x))\,dx\right|.$$

Ceci fait, on se focalise sur un intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_k, x_{k+1}]$, la restriction de la fonction $d_n = (f_n - f)$ à $[x_k, x_{k+1}]$ est aussi $\mathcal{C}^2$. Puisque $f_n'' = 0$, on a $d_n'' = f_n'' - f'' = -f''$ et :

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}] \qquad |d_n''(x)| \leq M_2.$$

En remarquant de plus que d_n s'annule en tous les points x_k de la subdivision, on obtient en intégrant par parties :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} d_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[(2x - x_k - x_{k+1})d_n(x)\right]_{x_k}^{x_{k+1}} - \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (2x - x_k - x_{k+1})d_n'(x)\,dx.$$

Le premier terme est nul et on peut effectuer une seconde intégration par parties :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} d_n(x)\,dx = -\frac{1}{2}\left[(x - x_k)(x - x_{k+1})d_n'(x)\right]_{x_k}^{x_{k+1}} + \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x - x_{k+1})d_n''(x)\,dx.$$

A nouveau le premier terme est nul et on en déduit :

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} d_n(x)\,dx\right| \leq \frac{M_2}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x)\,dx.$$

Cette dernière intégrale se calcule sans problème :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x)\,dx = \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{6} = \frac{1}{6n^3},$$

d'où finalement :

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} d_n(x)\,dx\right| \leq \frac{M_2}{12n^3}.$$

En revenant à l'erreur sur tout le segment $[0,1]$, on a donc :

$$|T_n - I| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_2}{12n^3} = \frac{M_2}{12n^2}.$$

■

Remarque. Si on considère l'intégrale de f sur un segment quelconque $[a,b]$ au lieu de $[0,1]$, on obtient :

$$|T_n - I| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}.$$

Cette fois, l'erreur est de l'ordre de $1/n^2$, pour un algorithme qui n'est guère plus coûteux en temps de calcul : $(n+1)$ appels à la fonction f, une somme de $(n+1)$ termes et une division par n. La seule contrainte supplémentaire par rapport à la méthode des rectangles est de supposer la fonction de classe $\mathcal{C}^2$, ce qui est généralement le cas.

Exemple. On considère à nouveau l'intégrale :

$$\frac{I}{2} = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

On veut toujours une valeur approchée à 0.005 près de $I/2$ par la méthode des trapèzes : quel nombre n de points faut-il prendre dans la subdivision ?

On note encore $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ la fonction qui à x associe $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, on a donc :

$$f''(x) = \frac{(x^2-1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow f^{(3)}(x) = \frac{x(3-x^2)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On trouve que $M_2 = |f''(0)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Puisqu'on veut que :

$$|T_n - I/2| \leq \frac{M_2(2-0)^3}{12n^2} \leq 5.10^{-3},$$

il suffit alors de prendre $n \geq 8$.

1.9.3 Méthode de Simpson

Revenons sur ce qui vient d'être vu : pour la méthode des rectangles, sur chaque petit intervalle, on a remplacé f par une constante, c'est-à-dire un polynôme de degré 0 ; pour la méthode des trapèzes, sur chaque petit intervalle, on a remplacé f par une fonction affine, c'est-à-dire un polynôme de degré 1. Il est donc naturel de regarder ce que donne l'approximation de f sur chaque petit intervalle par un polynôme de degré 2, c'est-à-dire un arc de parabole. C'est ce qu'on appelle la méthode de Simpson (voir figure 1.24).

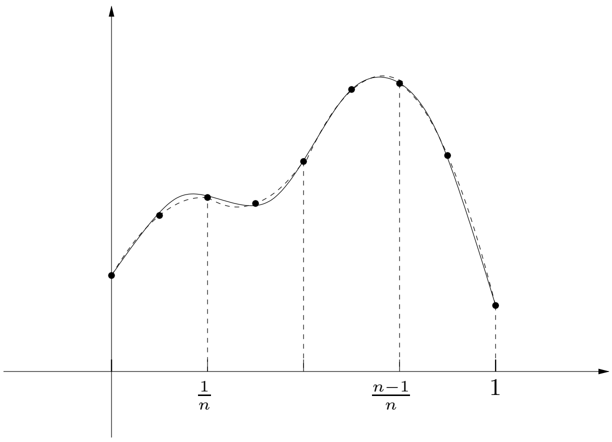

FIGURE 1.24 – Approximation de l'intégrale par la méthode de Simpson

Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on note m_k le milieu du segment $[x_k, x_{k+1}]$, soit : $m_k = (x_k + x_{k+1})/2$. Le polynôme qui coïncide avec f aux points x_k, m_k et x_{k+1} est le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_k(x)$ défini comme suit :

$$f(x_k)\frac{(x-m_k)(x-x_{k+1})}{(x_k-m_k)(x_k-x_{k+1})} + f(m_k)\frac{(x-x_{k+1})(x-x_k)}{(m_k-x_{k+1})(m_k-x_k)} + f(x_{k+1})\frac{(x-x_k)(x-m_k)}{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-m_k)},$$

ce qui s'écrit plus simplement :

$$P_k(x) = 2n^2(f(x_k)(x-m_k)(x-x_{k+1}) - 2f(m_k)(x-x_{k+1})(x-x_k) + f(x_{k+1})(x-x_k)(x-m_k)).$$

La fonction g_n définie comme suit :

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}] \qquad g_n(x) = P_k(x)$$

est donc exactement celle qu'on cherche. Pour le calcul de son intégrale, on a ainsi :

$$S_n = \int_0^1 g_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_k(x)\,dx.$$

En effectuant le changement de variable $x = m_k + \frac{1}{2n}u$, on obtient :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} P_k(x)\,dx = \frac{1}{6n}(f(x_k) + 4f(m_k) + f(x_{k+1})),$$

donc au total :

$$S_n = \frac{1}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_k) + 4f(m_k) + f(x_{k+1})).$$

On peut à nouveau majorer l'erreur d'approximation.

Proposition 1.13 (Erreur d'approximation)
Si f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$, on a :

$$|S_n - I| \leq \frac{M_4}{2880n^4},$$

où M_4 est la borne supérieure de $|f^{(4)}|$ sur $[0,1]$.

Preuve. On fixe l'indice $k \in \{0, \dots, (n-1)\}$ et on définit la fonction π sur $\left[-\frac{1}{2n}, +\frac{1}{2n}\right]$ par :

$$\pi(x) = \int_{m_k-x}^{m_k+x} f(u)\,du - \frac{x}{3}(f(m_k - x) + 4f(m_k) + f(m_k + x)) - cx^5,$$

où c est la constante telle que $\pi(\frac{1}{2n}) = 0$. Ainsi définie, c permet d'exprimer l'erreur d'approximation faite sur $[x_k, x_{k+1}]$, puisque :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - P_k(x))\,dx = \frac{c}{(2n)^5}.$$

On va donc chercher une estimation de cette constante c.

la fonction π a la même régularité que f et on écrit sans difficulté ses dérivées successives. Pour la dérivée première :

$$\pi'(x) = \frac{2}{3}(f(m_k - x) - 2f(m_k) + f(m_k + x)) - \frac{x}{3}(f'(m_k + x) - f'(m_k - x)) - 5cx^4.$$

Pour la dérivée d'ordre 2 :

$$\pi''(x) = \frac{1}{3}(f'(m_k + x) - f'(m_k - x)) - \frac{x}{3}(f''(m_k + x) + f''(m_k - x)) - 20cx^3.$$

Et pour la dérivée d'ordre 3 :

$$\pi^{(3)}(x) = -\frac{x}{3}(f^{(3)}(m_k + x) - f^{(3)}(m_k - x)) - 60cx^2.$$

Ces formules montrent que la fonction π ainsi que ses dérivées d'ordre 1, 2 et 3 s'annulent en $x = 0$. Puisque c a été choisie pour que π s'annule aussi en $x = \frac{1}{2n}$, le théorème de Rolle assure qu'il existe $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2n}\right[$ tel que $\pi'(\alpha) = 0$. Mais puisque $\pi'(0) = 0$, il existe $\beta \in]0, \alpha[\subset \left]0, \frac{1}{2n}\right[$ tel que $\pi''(\beta) = 0$. Et puisque $\pi''(0) = 0$, il existe $\gamma \in]0, \beta[\subset]0, \alpha[\subset]0, \frac{1}{2n}[$ tel que $\pi^{(3)}(\gamma) = 0$. En reprenant la formule de $\pi^{(3)}$ ci-dessus, on en déduit que :

$$c = -\frac{f^{(3)}(m_k + \gamma) - f^{(3)}(m_k - \gamma)}{180\gamma}.$$

Or, d'après la formule des accroissements finis appliquée à $f^{(3)}$ entre $(m_k - \gamma)$ et $(m_k + \gamma)$, il existe $\delta \in]m_k - \gamma, m_k + \gamma[\subset]m_k - \frac{1}{2n}, m_k + \frac{1}{2n}] =]x_k, x_{k+1}[$ tel que :

$$f^{(3)}(m_k + \gamma) - f^{(3)}(m_k - \gamma) = 2\gamma f^{(4)}(\delta).$$

Ceci donne, en revenant à l'équation précédente :

$$c = -\frac{f^{(4)}(\delta)}{90}.$$

En revenant à ce qui a été dit en début de preuve, on a donc obtenu :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - P_k(x))\, dx \right| = \left| -\frac{f^{(4)}(\delta)}{90(2n)^5} \right| \leq \frac{M_4}{2880n^5}.$$

D'où au total :

$$|S_n - I| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - P_k(x))\, dx \right| \leq \frac{M_4}{2880n^4}.$$

■

Remarque. Pour l'intégrale de f sur un segment quelconque $[a, b]$, l'erreur faite est :

$$|S_n - I| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}.$$

Exemple. On considère à nouveau l'intégrale :

$$\frac{I}{2} = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Quel nombre n de points faut-il prendre dans la subdivision pour obtenir une valeur approchée à 5.10^{-3} près de $I/2$ par la méthode de Simpson ?

On a cette fois :

$$f^{(4)}(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \;\Rightarrow\; f^{(5)}(x) = \frac{-x^5 + 10x^3 - 15x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Après factorisation, cette dérivée d'ordre 5 admet une seule racine strictement comprise entre 0 et 2 : $\alpha = \sqrt{5 - \sqrt{10}}$. Il reste donc à comparer la valeur de $|f^{(4)}(x)|$ aux points 0, α et 2. On obtient alors :

$$M_4 = |f^{(4)}(\alpha)| = 0.73998 \cdots \approx 0.7400.$$

Puisqu'on veut que :

$$|S_n - I/2| \leq \frac{M_4(2-0)^5}{2880n^4} \leq 5.10^{-3} \;\Leftrightarrow\; n \geq 1.13\ldots,$$

il suffit de prendre $n = 2$, c'est-à-dire approcher f par deux arcs de parabole. Le premier passe par les points $(0, 1)$, $(1/2, f(1/2))$ et $(1, f(1))$, le second par les points $(1, f(1))$, $(3/2, f(3/2))$ et $(2, f(2))$. On obtient alors :

$$S_2 = \frac{1}{6}(f(0) + 4f(1/2) + 2f(1) + 4f(3/2) + f(2)) = 0.477\ldots,$$

c'est-à-dire $I \approx 2S_2 \approx 0.95$. Ouf !

En pratique, pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

avec f de classe $\mathcal{C}^\infty$ (pour simplifier), on ne cherche pas à calculer la borne supérieure de la dérivée quatrième de f comme on vient de le faire : d'une parce que ça coûte cher, de deux parce que ce n'est pas le but de l'histoire. La méthode souvent implémentée dans les logiciels est la suivante : on calcule les valeurs approchées S_n et S_{2n} obtenues par la méthode de Simpson avec n points et $2n$ points. Si la quantité :

$$\left|\frac{S_{2n} - S_n}{S_n}\right|$$

est inférieure à l'erreur relative tolérée, alors on accepte S_{2n} comme valeur approchée de l'intégrale. Sinon, on coupe l'intervalle $[a, b]$ en deux. En notant $m = (a + b)/2$ le milieu, on recommence le test précédent sur les deux intervalles $[a, m]$ et $[m, b]$ jusqu'à ce que le critère de l'erreur relative soit vérifié sur tous les sous-intervalles considérés.

1.10 Exercices

Exercice 1.1 (Calculs d'intégrales grâce aux sommes de Riemann)

1. Que vaut la quantité : $1 + 2 + \cdots + n$?
2. En développant successivement $(1+1)^3, (2+1)^3, \ldots, (n+1)^3$, en déduire la somme des carrés :
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$
3. En utilisant des sommes de Riemann, calculer alors $\int_0^1 x^2\,dx$.
4. Calculer par la même technique $\int_0^1 e^x\,dx$.

Exercice 1.2 (Intégrale de Poisson)
Pour tout $t > 1$, on veut calculer l'intégrale :

$$I(t) = \int_0^\pi \ln(1 - 2t\cos x + t^2)\,dx.$$

Soit donc $t > 1$ fixé.

1. Commencer par vérifier que :
$$\forall x \in [0, \pi] \qquad 1 - 2t\cos x + t^2 > 0.$$
En déduire que la fonction $x \mapsto \ln(1 - 2t\cos x + t^2)$ est continue sur $[0, \pi]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$u_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2t\cos\frac{k\pi}{n} + t^2\right).$$
Quel est le lien entre u_n et $I(t)$?
3. En passant par les nombres complexes, montrer que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2t\cos\frac{k\pi}{n} + t^2\right) = \frac{t-1}{t+1}(t^{2n}-1).$$
4. Montrer que :
$$u_n = \frac{\pi}{n}\left(2n\ln t + \ln\left(\frac{t-1}{t+1}(1-\frac{1}{t^{2n}})\right)\right).$$
5. En déduire que, pour tout $t > 1$, on a $I(t) = 2\pi \ln t$.

Exercice 1.3 (Calculs de limites)
Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n+p}$	$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}$	$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2-4n^2}$
$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{\sqrt{p}}{n\sqrt{n}}$	$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=n+1}^{2n} k^{1/k}$
$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$	$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k})$	$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(n(n+1)\dots(2n-1)\right)^{1/n}$

Exercice 1.4 (Série harmonique alternée)
On s'intéresse à la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, appelée série harmonique alternée.

1. Notons $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ses sommes partielles et $\sigma_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ celles de la série harmonique. Montrer que :
$$S_{2N} = \sigma_{2N} - \sigma_N.$$
2. Déterminer $\lim_{N\to\infty}(\sigma_{2N} - \sigma_N)$ en faisant intervenir des sommes de Riemann.
3. En déduire la nature de la série harmonique alternée ainsi que sa somme.

Exercice 1.5 (Loi de succession de Laplace)
On dispose de $(N+1)$ urnes, numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules rouges et $(N-k)$ boules blanches. On choisit une urne au hasard. Sans connaître son numéro, on en tire n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule rouge sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules rouges ont été tirées ? Indication : on pourra noter E_n (respectivement E_{n+1}) le fait de tirer n (respectivement $(n+1)$) boules rouges à la suite et décomposer ces deux événements sur la partition $(U_0, \dots, U_N)$ formée par les urnes.

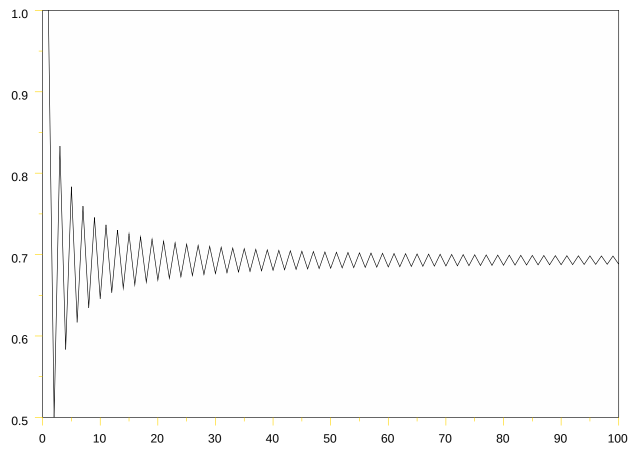

FIGURE 1.25 – Convergence de la série harmonique alternée.

2. Calculer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.

Corrigé

1. La probabilité cherchée s'écrit, en suivant l'indication de l'énoncé :
$$p_N = \mathbb{P}(E_{n+1}|E_n) = \frac{\mathbb{P}(E_{n+1} \cap E_n)}{\mathbb{P}(E_n)} = \frac{\mathbb{P}(E_{n+1})}{\mathbb{P}(E_n)},$$
la dernière égalité venant de ce que $E_{n+1} \subseteq E_n$. Les deux termes se traitent alors de la même façon, en décomposant sur la partition $\{U_0, \dots, U_N\}$:
$$\mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(E_n|U_k)\mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(E_n|U_k),$$
le terme $\frac{1}{N+1}$ venant de l'équiprobabilité pour le choix de l'urne dans laquelle on pioche. Il reste à voir que si on pioche dans l'urne U_k, la probabilité de tirer 1 boule rouge est k/N donc la probabilité de tirer n boules rouges à la suite est $(k/N)^n$. On a donc :
$$p_N = \frac{\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}(k/N)^{n+1}}{\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}(k/N)^{n}}.$$

2. Pour trouver la limite de (p_N) lorsque le nombre N d'urnes tend vers l'infini, il suffit d'appliquer le résultat sur les sommes de Riemann :
$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}(k/N)^n = \frac{N}{N+1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(k/N)^n\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$
On en déduit :
$$\lim_{N\to\infty} p_N = \frac{n+1}{n+2}.$$

Exercice 1.6 (My Taylor is rich)

1. Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Rappeler la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour f entre les points 0 et x.

2. En déduire que, pour tout x, on peut trouver un nombre $\theta_x \in]0,x[$ tel que :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\sin\theta_x.$$

3. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(n+p)\sqrt{n+p}} = 0.$$

4. En déduire que :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{p=1}^{n}\cos\frac{1}{\sqrt{n+p}}\right) - n\right) = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

Exercice 1.7 (Recherche d'équivalent)
On veut montrer l'équivalent suivant :

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}.$$

1. Le prouver en utilisant des sommes de Riemann.
2. Retrouver ce résultat en commençant par montrer que pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}},$$

   et en encadrant la somme par des intégrales.

Exercice 1.8 (Fonction non continue par morceaux mais intégrable)
On considère la fonction définie par :

$$f : \left\{\begin{array}{lll} [0,1] & \to \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0,1] \end{array}\right. \end{array}\right.$$

où $E(\alpha)$ désigne la partie entière du réel α (voir figure 1.26)..

1. Pourquoi ne peut-on dire que cette fonction est continue par morceaux ?
2. En considérant les intervalles $[0, \frac{1}{n}]$ et $[\frac{1}{n}, 1]$, montrer qu'on peut approcher f par deux suites de fonctions en escalier.
3. En déduire que f est intégrable sur $[0,1]$, avec :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx.$$

4. Montrer que $\int_0^1 f(x)\,dx = 1-\gamma$, où γ est la constante d'Euler :

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \approx 0.577.$$

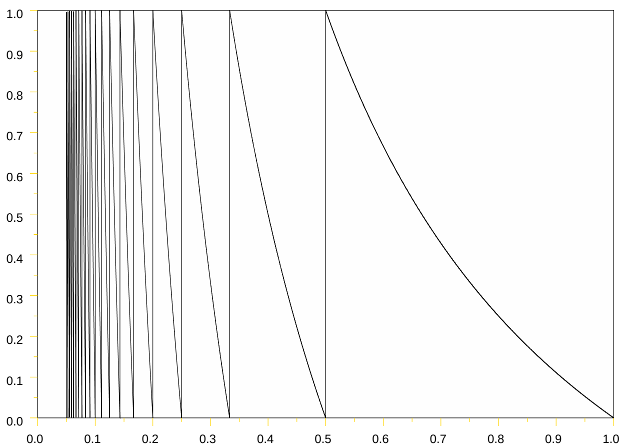

FIGURE 1.26 – Exemple de fonction intégrable non continue par morceaux : $x \mapsto \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$.

5. Par le même raisonnement que ci-dessus, montrer que la fonction f, définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ et en 0 par $f(0) = 0$, est intégrable sur $[0, 1]$.

Corrigé

1. La fonction f est représentée figure 1.26.
2. La fonction f n'est pas continue par morceaux pour deux raisons : d'une, parce qu'il y a manifestement une infinité de morceaux ; de deux, parce qu'elle n'a pas de limite à droite en 0 (c'est une discontinuité de seconde espèce).
3. Soit n un entier naturel non nul fixé. Sur l'intervalle $[\frac{1}{n}, 1]$, f est continue par morceaux, donc on sait qu'il existe deux fonctions en escalier φ_n et ψ_n qui encadrent f et telles que :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx \leq \frac{1}{n}.$$

Par ailleurs, sur l'intervalle $[0, \frac{1}{n}[$, on peut minorer f par la fonction constante égale à 0 et la majorer par la fonction constante égale à 1. Notons alors $\widetilde{\varphi_n}$ la fonction égale à 0 sur $[0, \frac{1}{n}[$ et égale à φ_n sur $[\frac{1}{n}, 1]$. C'est une fonction en escalier qui minore f sur $[0, 1]$. Notons de même $\widetilde{\psi_n}$ la fonction égale à 1 sur $[0, \frac{1}{n}[$ et égale à ψ_n sur $[\frac{1}{n}, 1]$. C'est une fonction en escalier qui majore f sur $[0, 1]$. On a de plus par la relation de Chasles :

$$\int_0^1 (\widetilde{\psi_n}(x) - \widetilde{\varphi_n}(x))\, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - 0)\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx \leq \frac{2}{n}.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a exhibé deux suites de fonctions en escalier $(\widetilde{\varphi_n})$ et $(\widetilde{\psi_n})$ qui encadrent f sur $[0, 1]$ et telles que :

$$\int_0^1 (\widetilde{\psi_n}(x) - \widetilde{\varphi_n}(x))\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

c'est-à-dire que f est intégrable sur $[0, 1]$.

On a de plus, toujours par la relation de Chasles :

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx.$$

Or, puisque $0 \leq f \leq 1$, on a par positivité de l'intégration :

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} 1\,dx = \frac{1}{n},$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx\right) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx.$$

4. L'idée est donc de calculer l'intégrale I_n de f de $\frac{1}{n}$ à 1, puis de passer à la limite en n. Or, vu la façon dont f est définie, il est naturel de casser l'intégrale I_n en $(n-1)$ morceaux :

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-1}} f(x)\,dx + \cdots + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x)\,dx.$$

Puisque $f(x) = \frac{1}{x} - k$ pour tout x entre $\frac{1}{k+1}$ et $\frac{1}{k}$, on a alors :

$$I_n = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{x} - k\right)\,dx,$$

ce qui s'écrit encore :

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x}\,dx - \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} k\,dx.$$

Or on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} k\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k},$$

d'où finalement :

$$I_n = \ln n - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = -\gamma.$$

On a donc bien :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} I_n = 1 - \gamma.$$

Exercice 1.9 (Calculs d'intégrales)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{e^{3t}}{1+e^{2t}}\,dt$$

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx \qquad \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n \sin(nx)\,dx \qquad \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\,dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin x+4\cos x}\,dx \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\,dx$$

Corrigé

1. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$.
2. $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = [\operatorname{arg\,cosh} x]_2^3 = \operatorname{arg\,cosh} 3 - \operatorname{arg\,cosh} 2$.
3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln \frac{1+x}{1-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 3}{2}$. Rq : s'exprime aussi avec $\operatorname{arg\,tanh}$.
4. $\int_0^1 \frac{e^{3t}}{1+e^{2t}}\,dx = \int_1^e \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = e-1-\arctan e+\frac{\pi}{4}$.
5. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.
6. $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -I$ après changement de variable $u = \frac{1}{x}$. Donc $I = 0$.
7. $\left|\int_0^1 x^n \sin(nx)\,dx\right| \le \int_0^1 |x^n \sin(nx)|\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
8. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^{\operatorname{arg\,sinh} 1} \cosh^2 u\,du = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arg\,sinh} 1} (1+\cosh 2u)\,du = \frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sinh 2u\right]_0^{\operatorname{arg\,sinh} 1} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arg\,sinh} 1 + \frac{1}{2}\sinh(2\operatorname{arg\,sinh} 1)\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arg\,sinh} 1+\sqrt{2}\right)$.
9. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\,dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\,dx$. $I+J=1$ et $I=J$ par le changement de variable $u = \frac{\pi}{2}-x$. Donc $I = J = \frac{1}{2}$.
10. Cf. 9.
11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin x+4\cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{du}{2+3u-2u^2} = -\int_0^1 \frac{du}{(2u+1)(2-u)} = \frac{1}{5}\left[\ln\frac{2u+1}{2-u}\right]_0^1 = \frac{\ln 6}{5}$.
12. $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, par convergence uniforme vers la fonction x.

Exercice 1.10 (Ruses de sioux)
On veut calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

1. Donner une autre expression de I grâce au changement de variable $x = \tan u$.
2. Justifier la relation : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\cos u + \sin u = \sqrt{2}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)$.
3. Justifier l'égalité : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\,du = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\,du$.

4. En déduire que :
$$I = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de décembre 2005.

Exercice 1.11 (Fonction définie par une intégrale)
Soit la fonction F définie sur $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$ par :
$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt.$$

1. Montrer que pour tout $x \in D$, on a : $F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.
2. On se place sur $]1,+\infty[$.
   (a) Grâce à la positivité de l'intégration, montrer la double inégalité :
   $$\forall x > 1 \qquad \frac{x^2-x}{2\ln x} \leq F(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln x}.$$
   (b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
   (c) Donner une primitive de $\frac{1}{t\ln t}$. En écrivant $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{t}{t\ln t}\,dt$, encadrer F et en déduire $\lim_{x\to 1^+} F(x)$.
3. Reprendre les questions précédentes sur l'intervalle $]0,1[$.
4. Représenter la fonction F.
5. Application : montrer que $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx = \ln 2$.

Exercice 1.12 (Somme de la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$)
1. Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Grâce à une intégration par parties, montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = 0.$$
   On admet que le résultat est encore vrai pour toute fonction $f \in \mathcal{R}_{[0,\pi]}^{\mathbb{C}}$.
2. Par des intégrations par parties, déterminer deux réels α et β tels que :
$$\forall n \geq 1 \qquad \int_0^{\pi} (\alpha x^2 + \beta x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n^2}.$$
3. Montrer que la fonction $f :]0,\pi] \to \mathbb{C}$, définie par
$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\frac{e^{ix}}{1-e^{ix}},$$
   est prolongeable par continuité en 0.
4. Soit $N \geq 1$. Exprimer $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ en fonction de $\int_0^{\pi} f(x)e^{iNx}\,dx$.
5. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (voir figure 1.27).

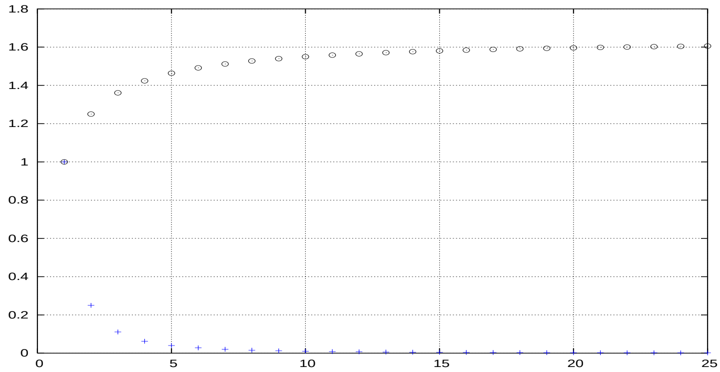

FIGURE 1.27 – Suite $(\frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$ et série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

Exercice 1.13 (Calculs d'intégrales (bis))
Calculer les intégrales et primitives suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 3x \sin 5x \, dx \qquad \int_0^1 \frac{x}{2x+1}\, dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^3+4x+3}{x+2}\, dx \qquad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\, dx \qquad \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)^{1/3}}\, dx$$

$$\int_0^{\pi} x\sin x\, dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$\int \arcsin x\, dx \qquad \int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\, dx$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\, dx \qquad \int \frac{1}{\cosh x}\, dx$$

$$\int \ln(x^{1/3}-1)\, dx \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\, dx$$

$$\int (\arcsin x)^2\, dx \qquad \int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx$$

$$\int \frac{1}{4x^2-4x-3}\, dx \qquad \int \frac{x}{x^2+2x+10}\, dx$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^3(x+1)}\, dx \qquad \int \frac{1}{\cosh x \sinh x}\, dx$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos 3x}\, dx \qquad \int \frac{1}{\cos x \sin^2 x}\, dx$$

Corrigé

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos 3x \sin 5x\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 9x + \sin 7x + \sin 3x + \sin x)\, dx = \frac{25}{63}$.

2. $\int_0^1 \frac{x}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right)\,dx = \frac{1}{2}(1 - \frac{\ln 3}{2})$.
3. $\int_0^1 \frac{x^3+4x+3}{x+2}\,dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 8 - \frac{13}{x+2})\,dx = \frac{22}{3} - 13\ln\frac{3}{2}$.
4. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$.
5. $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)\,dx = \frac{1}{3}(\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{x^2-x+1}\right)\,dx = \frac{1}{3}(\ln 2 + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}) = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
6. $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)^{1/3}}\,dx = [x^2\frac{3}{2}(1+x)^{2/3}]_0^1 - 3\int_0^1 x(1+x)^{2/3}\,dx = \frac{3}{2}2^{2/3} - 3([\frac{3}{5}x(1+x)^{5/3}]_0^1 - \frac{3}{5}[\frac{3}{8}(1+x)^{8/3}]_0^1) = \frac{3}{2}2^{2/3} - \frac{9}{5}2^{5/3} + \frac{27}{40}2^{8/3} - \frac{27}{40} = \frac{3}{5}2^{2/3} - \frac{27}{40}$.
7. $\int_0^\pi x\sin x\,dx = \pi$.
8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = [x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \frac{\pi}{4} + [\ln\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.
9. $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.
10. $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(1+x)}{x} + \int \frac{1}{x(1+x)}\,dx = -\frac{\ln(1+x)}{x} + \ln x - \ln(1+x) + C$.
11. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx =^{u=\sqrt{1+x}} \int \frac{2}{u^2-1}\,du = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right| + C$.
12. $\int \frac{1}{\cosh x}\,dx = 2\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx =^{(u=e^x)} 2\arctan u + C = 2\arctan(e^x) + C$.
13. $\int \ln(x^{1/3}-1)\,dx =^{(u=x^{1/3}-1)} \int 3(u+1)^2\ln u\,du = (u+1)^3\ln u - \int \frac{(u+1)^3}{u}\,du = (u+1)^3\ln u - \frac{u^3}{3} - \frac{3}{2}u^2 - 3u - \ln u + C = x\ln(x^{1/3}-1) - \frac{(x^{1/3}-1)^3}{3} - \frac{3}{2}(x^{1/3}-1)^2 - 3(x^{1/3}-1) - \ln(x^{1/3}-1) + C$.
14. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx =^{u=\sqrt{x^4-1}} \int \frac{1}{2\sqrt{u^2+1}}\,du = \frac{1}{2}\operatorname{arg\,sinh} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{arg\,sinh}(\sqrt{x^4-1}) + C$.
15. $\int(\arcsin x)^2\,dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$.
16. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2-2x}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = -\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1) + C$.
17. $\int \frac{1}{4x^2-4x-3}\,dx = \ldots$ (réduction en éléments simples) $\cdots = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right| + C$.
18. $\int \frac{x}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+3^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+10| - \frac{1}{3}\arctan\frac{x+1}{3} + C$.
19. $\int \frac{1}{(x-1)^3(x+1)}\,dx = \frac{1}{8}\int(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3} - \frac{1}{x+1})\,dx = \frac{1}{8}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}\right) + C$.
20. $\int \frac{1}{\cosh x\sinh x}\,dx = 4\int \frac{1}{e^{2x}-e^{-2x}}\,dx =^{u=e^{2x}} -2\int \frac{du}{1-u^2} = \ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + C = \ln\left|\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right| + C$.
21. $\int \frac{\sin 2x}{\cos 3x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{4\cos^3 x - 3\cos x}\,dx = \int \frac{2\sin x}{4\cos^2 x - 3}\,dx =^{(u=\cos x)} -2\int \frac{2}{4u^2-3}\,du = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\frac{\sqrt{3}}{2}}{u+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| + C$.
22. $\int \frac{1}{\cos x\sin^2 x}\,dx =^{u=\sin x} \int \frac{1}{u^2(1-u^2)}\,du = \int(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{1-u^2})\,du = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$.

Exercice 1.14 (Irrationalité de π)

1. Prouver que le polynôme $P_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ et ses dérivées successives prennent des valeurs entières en $x = 0$ et $x = 1$.
2. En déduire : $\int_0^1 P_n(x)\sin(\pi x)\,dx = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{\pi^k}$, où $a_k \in \mathbb{Z}$ pour tout k.
3. Démontrer que si π était rationnel, $\pi = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, le nombre $p^{2n+1}\int_0^1 P_n(x)\,dx$ serait un entier non nul.

4. Prouver que pour tout réel $M > 0$
$$M^n \int_0^1 P_n(x)\sin(\pi x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
En déduire que π est irrationnel.

Exercice 1.15 (Décrassage intégral)
Préciser la nature de chacune des intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}\,dx & \int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\,dx & \int_0^{+\infty} \cos(e^x)\,dx \\
\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}\,dx & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} & \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x+(x^4+1)^{1/3}} \\
\int_0^{+\infty} (\frac{\sin x}{x})^2\,dx & \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x\ln x}\,dx & \int_0^1 (\ln x)^2\,dx \\
\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx & \int_{-\infty}^0 e^x\cos(x^2)\,dx & \int_0^{+\infty} (x+1-\sqrt{x^2+2x+2})\,dx \\
\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx & \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{x}\,dx & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sinh x} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,dx & \int_0^{+\infty} \sin x \sin\frac{1}{x^2}\,dx & \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}(e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x})\,dx
\end{array}$$

Exercice 1.16 (Un contre-exemple)
On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ comme suit :
$$f(x) = \begin{cases} n^2 & \text{si } x \in [n, n+\frac{1}{n^4}[,\ n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner l'allure de f.
2. Montrer que f est Riemann intégrable sur $[1, +\infty[$.
3. Soit $f \in \mathcal{R}_{[1,+\infty[}$. A-t-on nécessairement : f bornée ? f décroissante ? f de limite 0 en $+\infty$?
4. Pourquoi est-on néanmoins assuré qu'une fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue, décroissante et Riemann intégrable sur $[1, +\infty[$ est de limite nulle en $+\infty$?

Exercice 1.17 (Achtung à la convergence uniforme)
Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[1, +\infty[$ par :
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [n, 2n[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
2. En déduire que la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) vers une fonction f sur $[1, +\infty[$ n'assure pas :
$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Exercice 1.18 (Calculs d'intégrales)
Après avoir justifié la convergence, déterminer la valeur de chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx$$

Exercice 1.19 (Equivalents de signes variables)

1. Montrer qu'au voisinage de l'infini, on a :
$$\ln\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) \sim \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$
2. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.
3. Montrer que $\int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}})\,dx$ diverge.
4. Morale de l'histoire ?

Exercice 1.20 (Intégrale semi-convergente)
Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n\ n & \text{si } x \in [1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}[,\ n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(\int_0^{1-\frac{1}{N}} f(x)\,dx)_{N\geq 1}$ converge. En déduire la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(x)\,dx$.
2. Montrer par contre que $\int_0^1 |f(x|\,dx$ diverge.

Exercice 1.21 (Suite d'intégrales)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

1. Justifier la convergence de l'intégrale I_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$.
3. Que vaut I_1 ? En déduire l'expression générale de I_n.
4. Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{(x^2-1)^2-x}{(1+x^2)^3}\,dx$ est convergente.
5. Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout $x \neq 0$:
$$\frac{(x^2-1)^2-x}{(1+x^2)^3} = \frac{ax}{(1+x^2)^3} + \frac{b}{(1+x^2)^3} + \frac{c}{(1+x^2)^2} + \frac{d}{1+x^2}.$$
6. En déduire que $I = \frac{\pi-1}{4}$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de décembre 2005.

Exercice 1.22 (Calculs en vrac)

1. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n} pe^{-\frac{p}{n}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $I_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx)\,dx$ et $J_n = \int_0^\pi e^x \sin(nx)\,dx$.
3. Donner la nature de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{2x-2}{x(x-1)^2}\,dx$.
4. Donner la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale suivante : $\int_0^{+\infty} x^2 \sin\frac{1}{x^3}\,dx$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire I_n.
6. Justifier la convergence et calculer $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sinh x}$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujets de décembre 2004 et décembre 2005.

Exercice 1.23 (Calcul d'intégrale par deux méthodes)
Soit $0 < a < b$. On veut la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx.$$

1. Justifier la convergence de cette intégrale.
2. Montrer que pour tout x strictement positif :
$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xu}\,du.$$
3. Grâce au Théorème de Fubini, en déduire l'égalité :
$$\int_0^n \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_a^b \frac{1 - e^{-nu}}{u}\,du.$$
4. La suite de fonctions (f_n) est définie comme suit :
$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll} [a,b] & \to \mathbb{R} \\ u & \mapsto \frac{1-e^{-nu}}{u} \end{array} \right.$$
Cette suite de fonctions converge-t-elle simplement sur $[a,b]$? uniformément ?
5. En déduire que
$$I = \ln\frac{b}{a}.$$
6. Soit $\varepsilon > 0$. Etablir la relation :
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$
7. Grâce au théorème de la moyenne, montrer que :
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du = \ln\frac{b}{a},$$
et retrouver ainsi la valeur de I.

8. Généralisation : soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ telle que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale généralisée
$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$$
soit convergente. Montrer qu'alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx$ est aussi convergente, avec :
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

Exercice 1.24 (Queue de la gaussienne)
On appelle fonction de Marcum, ou queue de la gaussienne, la fonction notée Q définie pour tout réel x par :
$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Représenter la densité de X, puis $Q(x)$ sur ce même dessin. Soit F la fonction de répartition de X : donner la relation entre $F(x)$ et $Q(x)$.
2. Soit $x > 0$ fixé. Dans l'intégrale définissant $Q(x)$, effectuer le changement de variable $t = x+u$ et, tenant compte de $e^{-ux} \leq 1$, montrer qu'on a :
$$Q(x) \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
3. Pour $t \geq x > 0$, montrer que :
$$\frac{1+\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \leq 1 \leq \frac{t}{x}.$$
4. En déduire que :
$$\frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \left(1+\frac{1}{t^2}\right) e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \leq Q(x) \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$
5. Calculer la dérivée de $\frac{1}{t} e^{-\frac{t^2}{2}}$. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :
$$\frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq Q(x) \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
6. En déduire un équivalent de $Q(x)$ en $+\infty$.
7. Application : en communications numériques, pour une modulation binaire, les symboles transmis valent $\pm\sqrt{E_b}$, où E_b est appelée énergie moyenne par bit. Quand il transite par un canal à bruit gaussien, le signal reçu en sortie Y est égal à la somme du symbole d'entrée et d'une variable aléatoire indépendante $B \sim \mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$, où N_0 est appelé puissance moyenne du bruit.
   (a) Supposons que le symbole d'entrée soit $+E_b$. Donner la loi de Y en fonction de E_b et N_0.
   (b) On reçoit $y \in \mathbb{R}$ en sortie de canal, mais on ignore ce qu'était le symbole d'entrée : quelle règle simple proposez-vous pour décider si en entrée le symbole émis était $+E_b$ ou $-E_b$?

(c) Montrer que la probabilité d'erreur P_e faite avec cette règle de décision est :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right).$$

La quantité $\frac{E_b}{N_0}$ est appelée rapport signal à bruit et intervient très souvent en communications numériques (on l'exprime usuellement en décibels).

Exercice 1.25 (Moments d'une loi normale)
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite, c'est-à-dire admettant pour densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On appelle moment d'ordre n de X le nombre :

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, dx.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée définissant $\mathbb{E}[X^n]$ est convergente.
2. Montrer que tout moment d'ordre impair est nul : $\mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0$.
3. Pour les moments d'ordres pairs, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n\ n!}.$$

Exercice 1.26 (Entropie d'une variable aléatoire)
Si X est une variable aléatoire réelle admettant une densité f, on appelle entropie de X la quantité (si elle est définie) :

$$h(X) = \mathbb{E}[-\log f(X)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log f(x)\, dx.$$

Grosso modo, l'entropie d'une variable aléatoire mesure le degré d'incertitude qu'on a sur l'issue d'un tirage de cette variable aléatoire.

1. Supposons que $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, loi normale centrée réduite. Montrer qu'elle a pour entropie : $h(X) = \frac{1}{2}(1 + \log(2\pi))$.
2. Supposons que $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, loi normale de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. Montrer qu'elle a pour entropie : $h(X) = \frac{1}{2}(1 + \log(2\pi\sigma^2))$. Ainsi, au moins pour les lois normales, l'entropie est d'autant plus grande que la variance est grande. On va montrer dans la suite que, parmi les variables aléatoires de variance donnée, celles qui ont la plus grande entropie sont celles qui suivent une loi normale.
3. Soit donc $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, dont la densité est notée φ, et X_2 une variable aléatoire centrée de densité f et de variance σ^2, c'est-à-dire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \sigma^2.$$

   On suppose pour simplifier que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

(a) Vérifier que (sous réserve d'existence des intégrales) :

$$h(X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log \frac{\varphi(x)}{f(x)}\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log \varphi(x)\, dx.$$

(b) Montrer que pour tout $x > 0$, $\log x \leq x - 1$. En déduire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log \frac{\varphi(x)}{f(x)}\, dx \leq 0.$$

(c) Montrer que :

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log \varphi(x)\, dx = \frac{1}{2}(1 + \log(2\pi\sigma^2)).$$

(d) En déduire que $h(X_2) \leq h(X_1)$.

Exercice 1.27 (Moments d'une loi normale (bis))
On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})\, dx = \sqrt{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

1. Soit $n \geq 0$ fixé. Justifier la convergence de l'intégrale I_n.
2. Déterminer I_0 et I_1.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+2} = (n+1)I_n$.
4. Donner alors I_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pouvait-on prévoir ce résultat sans calculs ?
5. Déterminer I_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit X une variable aléatoire gaussienne de moyenne 1 et de variance unité, ce qu'on note $X \sim \mathcal{N}(1, 1)$. Déterminer $\mathbb{E}[X^4]$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de novembre 2006.

Exercice 1.28 (Calculs d'hiver)

1. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{1^2 + n^2} + \frac{n}{2^2 + n^2} + \cdots + \frac{n}{(n-1)^2 + n^2} + \frac{n}{n^2 + n^2} \right).$$

2. Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2}{1 - x^2}\, dx.$$

3. On considère l'intégrale généralisée :

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{2x \ln x}{(1 + x^2)^2}\, dx.$$

   (a) Justifier sa convergence.
   (b) Calculer sa valeur.
4. Donner la nature de l'intégrale généralisée :

$$K = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \left(e^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x} \right) dx.$$

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de novembre 2006.

Chapitre 2

Mesures

Introduction

Très utile en pratique, l'intégration de Riemann vue au chapitre précédent n'est pas complètement satisfaisante d'un point de vue théorique. Citons quelques points où celle-ci achoppe : intégrabilité de certaines fonctions (e.g. la fonction de Peano), passage à la limite sous le signe somme (nécessité de la convergence uniforme sur un intervalle borné), régularité des fonctions définies par une intégrale, théorème de Fubini pour les intégrales multiples, etc. Au début du XX^e siècle, Lebesgue propose une nouvelle façon d'intégrer les fonctions. L'idée de départ est simple, mais nécessite de savoir mesurer des ensembles : c'est la théorie de la mesure, que l'on expose dans ce chapitre.

2.1 L'idée de Lebesgue

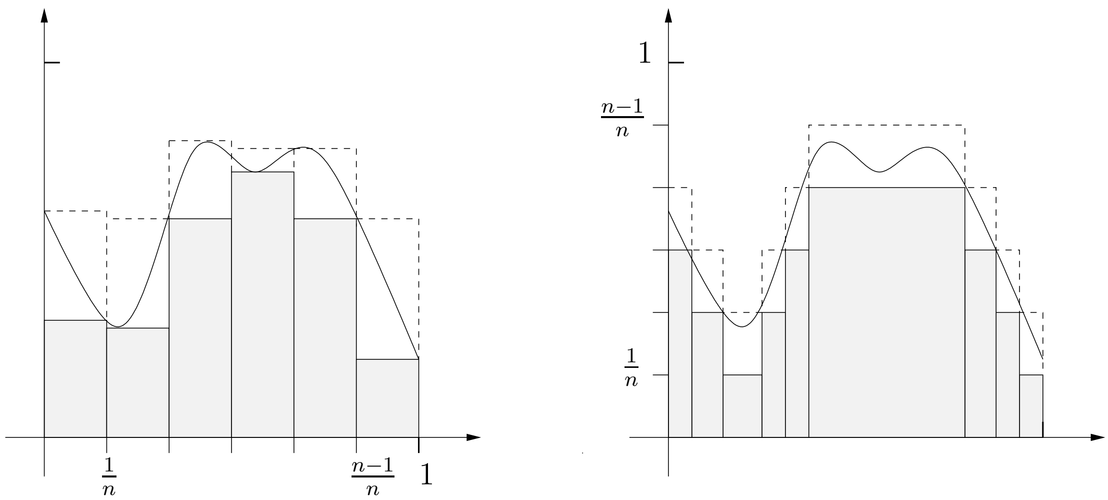

FIGURE 2.1 – Intégration selon Riemann versus intégration selon Lebesgue.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ et $\mathcal{S}_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ subdivision régulière de $[0,1]$. Rappelons le principe de l'intégrale de Riemann : on commence par noter

$$\left\{ \begin{array}{ll} I_k &= [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}[\qquad 1 \leq k \leq n-1 \\ I_n &= [\frac{n-1}{n}, 1] \end{array} \right.$$

et on considère les sommes de Darboux inférieure et supérieure (voir figure 2.1 à gauche) :

$$\left\{\begin{array}{ll}\sigma_n(f) & = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \inf_{I_k} f\\ \Sigma_n(f) & = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sup_{I_k} f\end{array}\right.$$

On a pour tout n l'inégalité : $\sigma_n(f) \leq \Sigma_n(f)$, et si f est Riemann intégrable, alors :

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_n(f) - \sigma_n(f) = 0.$$

Notons maintenant :

$$\left\{\begin{array}{ll}E_k & = \{x \in [0,1] : \frac{k-1}{n} \leq f(x) < \frac{k}{n}\} \qquad 1 \leq k \leq n-1\\ E_n & = \{x \in [0,1] : \frac{n-1}{n} \leq f(x) \leq 1\}\end{array}\right.$$

Les $(E_k)_{1\leq k\leq n}$ forment clairement une partition de $[0,1]$. Cette subdivision permet d'approcher uniformément la fonction f par les fonctions :

$$\left\{\begin{array}{ll}\phi & = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} \cdot \mathbb{1}_{E_k}\\ \psi & = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \mathbb{1}_{E_k}\end{array}\right.$$

où $\mathbb{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A, i.e. $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Les fonctions ϕ et ψ sont simples, ou étagées, c'est-à-dire qu'elle ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, et on a (voir figure 2.1 à droite) :

$$\left\{\begin{array}{ll}\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) & \forall x \in [0,1]\\ \psi(x) - \phi(x) = \frac{1}{n} & \forall x \in [0,1]\end{array}\right.$$

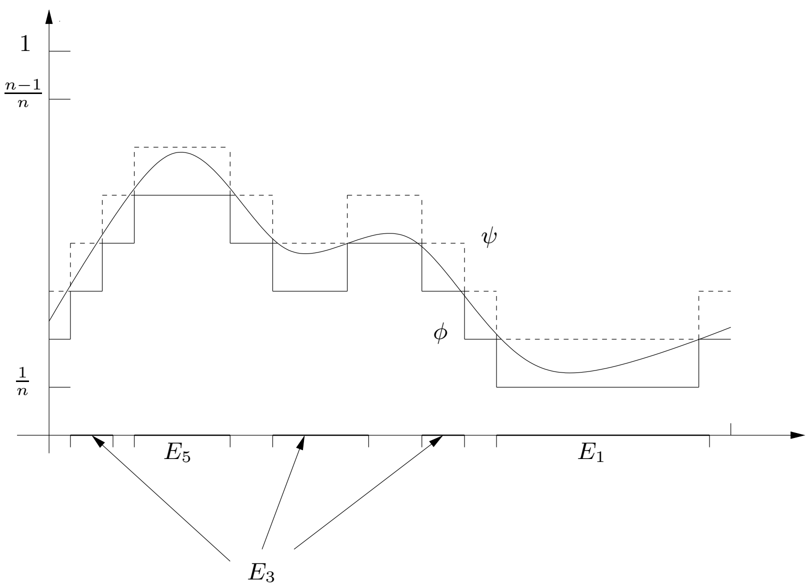

FIGURE 2.2 – Ensembles E_k dans l'intégration selon Lebesgue.

On voudrait donc approcher l'intégrale de f sur $[0,1]$ par celles de ϕ et ψ. Ceci donne, en supposant nos fonctions Riemann intégrables :

$$\int_0^1 \phi(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 \psi(x)\,dx,$$

avec de façon naturelle :

$$\int_0^1 \phi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \int_0^1 I_{E_k}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \cdot \lambda(E_k),$$

où $\lambda(E_k)$ serait la mesure de E_k, i.e. sa longueur si c'est un intervalle, la somme des longueurs de ses composantes connexes si c'est une union d'intervalles disjoints, etc. (voir figure 2.2).

Mais si f est très chahutée, on sent que les ensembles E_k ne seront plus aussi simples et les intégrales $\int_0^1 \mathbb{1}_{E_k}(x)\,dx$ ne seront plus nécessairement des intégrales de Riemann (penser à la fameuse fonction de Peano $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\,\cap\,[0,1]}$). Il convient donc de définir proprement ce qu'on entend par "la mesure d'un ensemble", puis de l'appliquer à la construction d'une nouvelle intégrale.

2.2 La longueur comme une mesure

Notations

- Si $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, on note (a,b) l'intervalle dont on ne spécifie rien sur les bornes, c'est-à-dire $[a,b]$ ou $]a,b]$, ou $[a,b[$, ou $]a,b[$.
- Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints, on notera souvent leur union par le le symbole $\sum$ au lieu de $\bigcup$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \triangleq \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$. La mesure **longueur** d'un intervalle correspond à une application

$$\lambda : \left\{ \begin{array}{rl} \mathcal{I} & \to [0,+\infty] \\ (a,b) & \mapsto b-a \end{array} \right.$$

Par exemple, la mesure d'un point est nulle et celle d'un intervalle non borné est égale à l'infini. Cette application vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$;
(ii) Sigma-additivité : soit $E \subset \mathbb{R}$. Si E peut s'écrire de deux façons comme union dénombrable d'intervalles deux à deux disjoints, c'est-à-dire :

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \sum_{n=0}^{+\infty} J_n,$$

alors on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda\left(I_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(J_n),$$

valeur commune (éventuellement infinie) que l'on appellera mesure longueur de E et que l'on notera encore $\lambda(E)$.
(iii) Invariance par translation : pour tout intervalle I et tout réel a, en notant $a + I = \{x \in \mathbb{R} : x - a \in I\}$ le translaté de I (voir figure 2.3), on a :

$$\lambda(a+I) = \lambda(I).$$

Remarques.

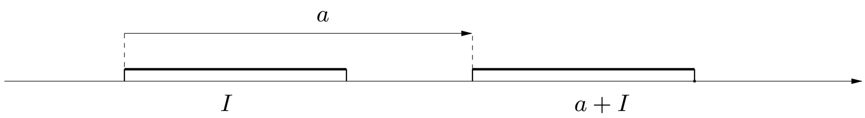

FIGURE 2.3 – Invariance de la longueur par translation.

- La sigma-additivité est aussi appelée additivité dénombrable et sera notée dans la suite σ-additivité.
- Seul le point (ii) n'est pas évident. Il se montre en utilisant la caractérisation suivante d'un compact (théorème de Borel-Lebesgue) : de tout recouvrement d'un ensemble par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- Rappelons qu'une série à termes positifs est commutative : on ne change pas sa valeur (éventuellement $+\infty$) si on change l'ordre des termes. Ceci est bien cohérent avec la propriété de $\sigma-$additivité, où l'ordre des I_n dans l'union n'a pas d'importance non plus.

Il convient de noter que la propriété de $\sigma-$additivité concerne des unions au plus **dénombrables** d'ensembles. Ainsi, l'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ des rationnels du segment $[0,1]$ étant dénombrable, on peut écrire ses éléments sous la forme d'une suite :

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots\},$$

et la $\sigma-$additivité donne alors :

$$\lambda\left(\mathbb{Q} \cap [0,1]\right) = \lambda\left(\sum_{q_n \in \mathbb{Q}\ \cap[0,1]} \{q_n\}\right) = \sum_{q_n \in \mathbb{Q}\ \cap[0,1]} \lambda\left(\{q_n\}\right) = \sum_{q_n \in \mathbb{Q}\ \cap[0,1]} 0 = 0.$$

Par contre, on peut montrer que le segment $[0,1]$ lui-même n'est pas dénombrable, et si la $\sigma-$additivité était vraie pour des unions quelconques, on aurait :

$$\lambda\left([0,1]\right) = \lambda\left(\sum_{x \in [0,1]} \{x\}\right) = \sum_{x \in [0,1]} \lambda\left(\{x\}\right) = \sum_{x \in [0,1]} 0 = 0,$$

ce qui est absurde puisque $\lambda([0,1]) = 1$.

Bien sûr, on veut étendre cette mesure à des ensembles plus généraux que les simples intervalles ou leurs unions, d'où la question : existe-t-il un prolongement de λ à une classe d'ensembles contenant $\mathcal{I}$ et tel que ce prolongement conserve les propriétés de σ-additivité et d'invariance par translation ? La réponse est non si on cherche à mesurer toutes les parties de $\mathbb{R}$, mais oui si on se contente d'une classe largement suffisante en pratique : la tribu borélienne. Ce prolongement s'appelle la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$ (1902).

La suite de ce chapitre décrit la construction de la mesure de Lebesgue. Le procédé est général et la notion de mesure s'applique à d'autres sujets : séries numériques, calcul des probabilités, etc. C'est pourquoi la présentation est faite dans un cadre abstrait, les exemples servant à guider l'intuition.

2.3 Définition axiomatique d'une mesure

Soit Ω un ensemble, on note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. On retrouve ici une notion déjà rencontrée dans le cours de probabilités de deuxième année.

Définition 2.1 (Tribu)
Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ un ensemble de parties de Ω, i.e. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{F}$ est une tribu, ou une σ-algèbre, si
(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
(ii) si A appartient à $\mathcal{F}$, alors son complémentaire A^c appartient aussi à $\mathcal{F}$;
(iii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{F}$.

On vérifie sans problème à partir des trois axiomes que toute algèbre $\mathcal{A}$ contient Ω, est stable par union finie, intersection finie ou dénombrable. On retiendra qu'une tribu est stable par combinaisons au plus dénombrables d'opérations usuelles sur les ensembles.

Exemples. On vérifie sans problème les trois axiomes sur les exemples suivants :
– La tribu triviale : $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.
– La tribu pleine : $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
– La tribu engendrée par une partie A de Ω : $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

En pratique, lorsque Ω est au plus dénombrable, on considère en général la tribu pleine $\mathcal{P}(\Omega)$. Par exemple si $\Omega = \{0,1\}^n$ ensemble des suites obtenues par n jets successifs à pile ou face. Ou encore si $\Omega = \mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels. Si Ω n'est pas dénombrable, la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ est souvent "trop grosse", par exemple si $\Omega = \mathbb{R}$ la droite réelle, ou si $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ensemble des suites obtenues par une infinité de jets successifs à pile ou face.

Le dernier exemple (tribu engendrée par A) se généralise : cette technique est d'ailleurs classique en mathématiques et a été rencontrée en premier cycle : sous-groupe engendré, sous-espace vectoriel engendré, etc.

Proposition 2.1 (Tribu engendrée)
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de parties de Ω. Il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{E}$, appelée tribu engendrée par $\mathcal{E}$ et notée $\sigma(\mathcal{E})$.

Preuve. Considérons l'ensemble de tribus :

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ tribu de } \Omega \text{ telle que } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}\}.$$

$\mathcal{M}$ n'est pas vide puisque la tribu pleine $\mathcal{P}(\Omega)$ en fait partie. Soit alors :

$$\mathcal{H} = \bigcap_{\mathcal{G}\in\mathcal{M}} \mathcal{G}.$$

On vérifie sans problème que $\mathcal{H}$ est une tribu (i.e. elle vérifie les trois axiomes de définition d'une tribu). C'est bien la plus petite contenant $\mathcal{E}$, car toute tribu contenant $\mathcal{E}$ contient aussi $\mathcal{H}$. Ainsi $\mathcal{H}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{E}$.

■

Exemples.
– Si $\mathcal{E} = \{\emptyset\}$, $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, \Omega\}$.
– Si $\mathcal{E} = \{A\}$, $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.
– Si $\Omega = \{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est au plus dénombrable et $\mathcal{E} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{\omega_n\}$, alors $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$. La tribu engendrée par les singletons est la tribu pleine. En calcul des probabilités, pour un espace d'états au plus dénombrable, ceci signifie que si on connaît la probabilité de chaque événement élémentaire, on peut en déduire la probabilité de tout événement.

La tribu la plus utile, que ce soit en intégration ou en probabilités, est sans conteste la tribu borélienne.

Définition 2.2 (Tribu borélienne)
On appelle tribu de Borel de $\mathbb{R}$, ou tribu borélienne, la tribu engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On la note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ou plus simplement $\mathcal{B}$.

Rappel. Tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints (il n'est pas certain que ceci soit un rappel...).

Propriétés 2.1
La tribu borélienne $\mathcal{B}$ est aussi engendrée par :
- *les ouverts de $\mathbb{R}$;*
- *les fermés de $\mathbb{R}$;*
- *les intervalles de type $\{]-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}\}$;*
- *les intervalles de type $\{]-\infty, q],\ q \in \mathbb{Q}\}$.*

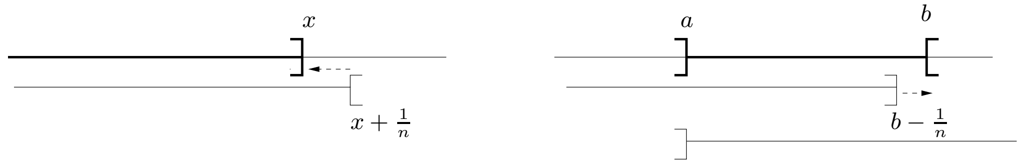

FIGURE 2.4 – Illustration de l'égalité $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}$.

Preuve. On montre pour chaque cas la double inclusion entre $\mathcal{B}$ et la tribu engendrée considérée.
- Notons $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. Puisque les intervalles ouverts sont des cas particuliers d'ouverts, on a clairement $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{O})$. Réciproquement, puisque tout ouvert O de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme union dénombrable d'intervalles ouverts, O est dans $\mathcal{B}$ et puisque $\mathcal{B}$ est une tribu, on a $\sigma(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{B}$.
- Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}$. Un fermé est le complémentaire d'un ouvert, or une tribu est stable par passage au complémentaire. Donc :
$$\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}.$$
- Notons $\mathcal{G}$ l'ensemble des intervalles de la forme $]-\infty, x]$. On a (voir figure 2.4 à gauche) :
$$]-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right[\quad \Rightarrow \quad]-\infty, x] \in \mathcal{B},$$
et par suite $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{B}$. Réciproquement, montrons que tout intervalle ouvert $]a, b[$ appartient à la tribu engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, x]$. Or, si $-\infty < a \leq b < +\infty$, on peut écrire (voir figure 2.4 à droite) :
$$]a, b[=]-\infty, b[\cap]-\infty, a]^c = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]-\infty, b - \frac{1}{n}\right]\right) \cap]-\infty, a]^c,$$
donc $]a, b[\in \mathcal{B}$. Si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, le raisonnement est le même. Ainsi on a $B \subseteq \sigma(\mathcal{G})$.

– Vu le point précédent, il suffit maintenant de montrer que tout intervalle de type $]-\infty,x]$, avec $x\in\mathbb{R}$, appartient à la tribu $\sigma(\mathcal{Q})$ engendrée par les intervalles de type $]-\infty,q]$, avec $q\in\mathbb{Q}$. Soit donc x un réel : par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite décroissante (q_n) de rationnels de limite x. On a donc :

$$]-\infty,x]=\bigcap_{n=1}^{+\infty}]-\infty,q_n] \quad\Rightarrow\quad]-\infty,x]\in\sigma(\mathcal{Q}).$$

■

La tribu borélienne est l'exemple fondamental de tribu engendrée. Dans le cas général, c'est en fait la première caractérisation que l'on prend comme définition : si (X,d) est un espace métrique, on appelle tribu borélienne $\mathcal{B}_X$ de X la tribu engendrée par les ouverts pour la distance d.

Définition 2.3 (Mesure sur une tribu)
On appelle mesure sur la tribu $\mathcal{F}$ de Ω toute application $m:\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ telle que
(i) $m(\emptyset)=0$;
(ii) σ-additivité : si (A_n) est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{F}$, alors :

$$m\left(\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}m(A_n).$$

On dit alors que $(\Omega,\mathcal{F},m)$ est un espace mesuré et les éléments de la tribu $\mathcal{F}$ sont dits mesurables.

Remarque. La condition (i) permet juste de s'assurer qu'on ne considère par la mesure triviale valant $+\infty$ pour tout $A\in\mathcal{F}$. On pourrait la remplacer par $m(\emptyset)<+\infty$, car alors la σ-additivité assure que $m(\emptyset)=0$.

Exemples.
– Pour la théorie des séries numériques, l'espace mesuré utilisé est $(\Omega,\mathcal{F},m)=(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ où μ est la mesure de comptage, i.e. pour tout ensemble A d'entiers naturels, $\mu(A)$ est le cardinal de A (éventuellement infini).
– Mesure de Dirac : cette mesure très simple est utilisée notamment en physique et en probabilités. Ω étant un ensemble quelconque et ω un élément de Ω, on définit la mesure de Dirac au point ω par : $\delta_\omega(A)=1$ si $\omega\in A$, $\delta_\omega(A)=0$ sinon (voir figure 2.5). Ceci fait de $(\Omega,\mathcal{F},m)=(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\delta_\omega)$ un espace mesuré.

Définition 2.4 (Mesures finies, $\boldsymbol{\sigma}$-finies)
Soit $(\Omega,\mathcal{F},m)$ un espace mesuré.
– m est une mesure finie si $m(\Omega)<+\infty$. m est une mesure de probabilité si $m(\Omega)=1$.
– m est une mesure σ-finie s'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables tels que :

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n=\Omega,$$

et $m(A_n)<+\infty$ pour tout n.

Exemples.
– La mesure de comptage μ sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ n'est pas une mesure finie puisque $\mu(\mathbb{N})=+\infty$. C'est néanmoins une mesure σ-finie puisque la définition s'applique avec $A_n=\{0,1,\dots,n\}$.

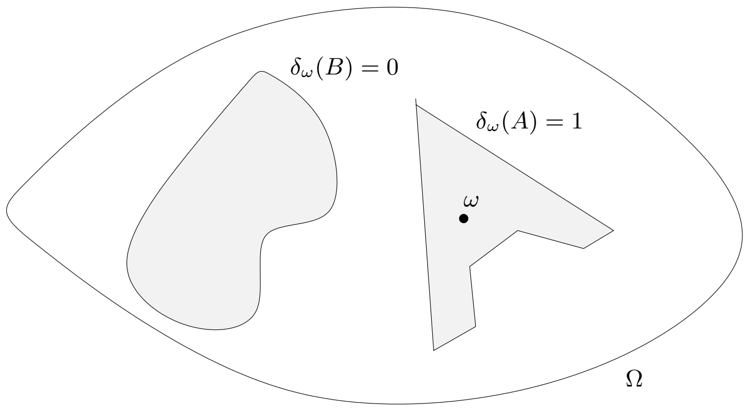

FIGURE 2.5 – Mesure de Dirac au point ω.

- La mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ sera un exemple typique de mesure σ-finie, en considérant $A_n = [-n, n]$.
- Pour tout ensemble Ω et tout élément ω de Ω, la mesure de Dirac est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, puisque $\delta_\omega(\Omega) = 1$.
- Le jeu de pile ou face : soit $\Omega = \{0,1\}^n$ l'ensemble des séquences de longueur n de 0 et 1. C'est un espace fini, donc on considère naturellement $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Soit $p \in [0,1]$ (p correspond à la probabilité d'apparition du chiffre 1). Pour chaque séquence $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de Ω, on définit :

$$\mathbb{P}(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \omega_i},$$

  et pour tout ensemble A de $\mathcal{P}(\Omega)$: $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$. Ceci fait de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Notation. Si A et B sont deux ensembles, on note $B \setminus A \triangleq B \cap A^c$ l'ensemble des éléments de B n'appartenant pas à A.

Remarque : opérations avec l'infini.
Que ce soit en théorie de la mesure ou plus loin en intégration, on rencontrera souvent des quantités infinies. Il convient donc d'étendre les règles de calcul usuelles à ce cadre. Tout se fait de façon intuitive. Par exemple si a est un réel, on peut écrire : $a + (+\infty) = +\infty$, $a - (+\infty) = -\infty$, $a \times (+\infty) = \pm\infty$ selon le signe de a. De même, $+\infty + (+\infty) = +\infty$ et $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$. Les seules situations à éviter sont les formes indéterminées telles qu'on les rencontre en calculs de limites : $+\infty - (+\infty)$, ou $\frac{\pm\infty}{+\infty}$.

Propriétés 2.2 (Propriétés d'une mesure)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré. Tous les ensembles considérés sont mesurables.
- *Monotonie : si $A \subseteq B$, alors $m(A) \leq m(B)$. Si on a de plus $m(A) < +\infty$, alors :*

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A).$$

- *Additivité forte :*

$$m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B).$$

- *Sous–σ–additivité :*

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n).$$

– *Continuité monotone croissante : si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'ensembles croissante pour l'inclusion (figure* 2.6*), alors :*

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

– *Continuité monotone décroissante : si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'ensembles décroissante pour l'inclusion (figure* 2.6*), avec* $m(A_0) < +\infty$*, alors :*

$$m\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

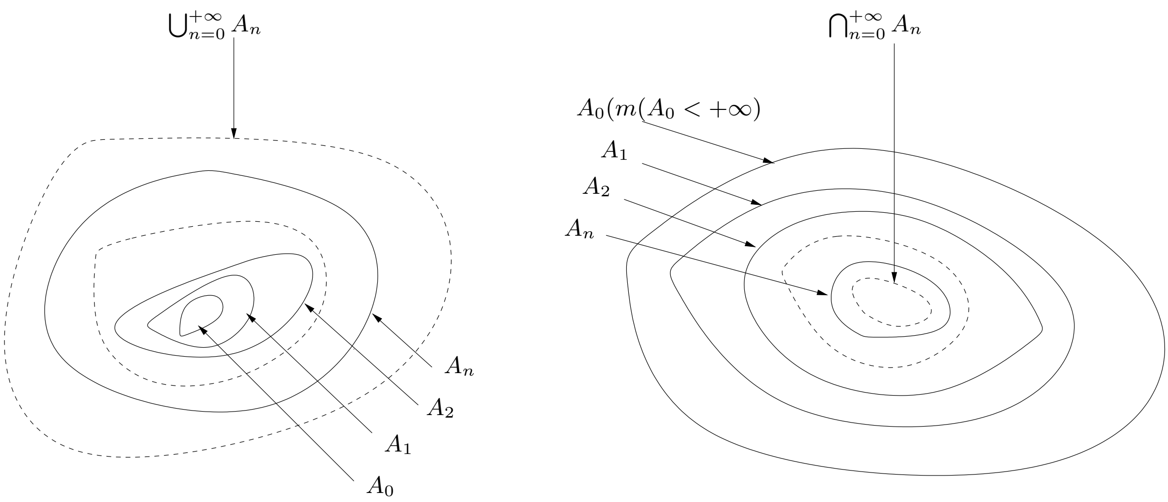

Figure 2.6 – Suite d'ensembles croissante (à gauche) et décroissante (à droite) pour l'inclusion.

Preuve.

– Monotonie : il suffit d'appliquer la $\sigma-$additivité avec $A_0 = A$, $A_1 = B \setminus A$ et $A_n = \Omega$ pour tout $n \geq 2$. Ceci donne :

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A),$$

et puisque $m(B \setminus A) \geq 0$, on a bien $m(A) \leq m(B)$ (ces deux quantités étant éventuellement infinies). Si de plus $m(A) < +\infty$, alors on peut soustraire $m(A)$ des deux côtés.

– Additivité forte : ou bien $m(A \cap B) = +\infty$, auquel cas par la monotonie on a aussi $m(A) = m(B) = +\infty$ et l'égalité est vérifiée. Ou bien $m(A \cap B) < +\infty$, et on décompose alors de façon disjointe :

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B)),$$

d'où il vient par $\sigma-$additivité :

$$m(A \cup B) = m(A \setminus (A \cap B)) + m(A \cap B) + m(B \setminus (A \cap B)),$$

et on peut utiliser la propriété précédente :

$$m(A \cup B) = m(A) - m(A \cap B) + m(A \cap B) + m(B) - m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B),$$

qui aboutit bien à :

$$m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B).$$

– Sous-additivité dénombrable : on construit la suite d'ensembles (B_n) comme suit : $B_0 = A_0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \right).$$

Il est clair que les B_n sont deux à deux disjoints, que $B_n \subseteq A_n$ pour tout n, et que :

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n.$$

On peut alors appliquer la $\sigma-$additivité :

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(B_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n),$$

la dernière inégalité provenant de la propriété de monotonie vue ci-dessus.

– Continuité monotone croissante : on reprend la suite d'ensembles (B_n) comme ci-dessus en remarquant que pour tout n :

$$A_n = B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n.$$

Il s'ensuit que :

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(B_n) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} m(B_n) = \lim_{N \to +\infty} m(A_N).$$

– Continuité monotone décroissante : on considère cette fois la suite d'ensembles $(C_n)_{n \geq 0}$ définie par : $C_n = A_0 \setminus A_n$. Par la propriété de monotonie et puisque $m(A_0) < +\infty$, on a donc :

$$\forall n \geq 0 \qquad m(C_n) = m(A_0) - m(A_n).$$

La suite $(C_n)_{n \geq 0}$ est croissante et :

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n = A_0 \setminus \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right).$$

Puisque l'intersection des A_n est contenue dans A_0, qui est de mesure finie, la monotonie ci-dessus assure que :

$$m\left(A_0 \setminus \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) \right) = m(A_0) - m\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right).$$

On peut alors appliquer la continuité monotone croissante :

$$m(A_0) - m\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{n \to +\infty} m(C_n) = m(A_0) - \lim_{n \to +\infty} m(A_n),$$

ce qui donne le résultat voulu.

■

Remarques.

– Pour la continuité monotone décroissante, l'hypothèse $m(A_0) < +\infty$ est essentielle, comme le montre le contre-exemple suivant : dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, prendre
$$A_n = \{n, n+1, \ldots\},$$
auquel cas $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout n, donc a fortiori $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = +\infty$, mais $\cap_{n=0}^{+\infty} A_n = \emptyset$, donc :
$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$
– La propriété d'additivité forte se généralise à un nombre quelconque n d'ensembles et a déjà été rencontrée dans des problèmes de dénombrement : c'est la formule de Poincaré (ou d'inclusion-exclusion). Rappelons-la pour $n = 3$:
$$m(A\cup B\cup C) = m(A)+m(B)+m(C)-(m(A\cap B)+m(A\cap C)+m(B\cap C))+m(A\cap B\cap C),$$
et de façon générale :
$$m(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} m(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right).$$
Une application à un problème de dénombrement est donnée dans l'exercice intitulé "Formule de Poincaré".

2.4 Prolongement d'une mesure

En général, une tribu est un objet trop compliqué pour qu'on puisse y définir explicitement une mesure. Par exemple, on ne sait pas décrire simplement les boréliens, il paraît donc délicat de leur associer une mesure. On s'en sort en associant une mesure à des ensembles plus simples, qui engendrent eux-mêmes la tribu qui nous intéresse. On commence par rappeler la notion d'algèbre, plus générale que celle de tribu.

Définition 2.5 (Algèbre)
Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre si
(i) $\emptyset$ appartient à $\mathcal{A}$;
(ii) Si A appartient à $\mathcal{A}$, alors A^c appartient aussi à $\mathcal{A}$;
(iii) Si A et B appartiennent à $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$ aussi.

On vérifie sans problème à partir des trois axiomes que toute algèbre $\mathcal{A}$ contient Ω, est stable par union finie et intersection finie. La différence entre une algèbre et une tribu réside dans le dernier axiome : une tribu est stable par union dénombrable, tandis qu'une algèbre est stable par union finie seulement. En particulier, toute tribu est une algèbre.

Exemple : l'algèbre préborélienne de $\mathbb{R}$.
On définit :
$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n}]a_i, b_i],\ -\infty \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_n \leq +\infty,\ n \geq 1 \right\},$$
avec la convention $]a, +\infty] =]a, +\infty[$. On vérifie que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ est bien une algèbre, dite algèbre préborélienne de $\mathbb{R}$. Par ailleurs, $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ contient tout intervalle de type $]-\infty, x]$ (prendre $n = 1$, $a_1 = -\infty$, $b_1 = x$). On en déduit le résultat suivant.

Lemme 2.1
La tribu engendrée par l'algèbre préborélienne est la tribu borélienne, autrement dit :

$$\sigma(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

On voit sur $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ qu'une algèbre n'est pas nécessairement stable par union dénombrable : si $A_n =]1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}]$, alors $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n =]0,1[$, qui n'appartient pas à l'algèbre préborélienne. En ce sens, la définition qui suit n'est pas complètement immédiate.

Définition 2.6 (Mesure sur une algèbre)
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. On dit que $m : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ est une mesure sur l'algèbre $\mathcal{A}$ si
(i) $m(\emptyset) = 0$;
(ii) σ-additivité : si (A_n) est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$ **telle que** $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$ **appartienne à** *$\mathcal{A}$, alors :*

$$m\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n).$$

Pour ce qui nous intéresse, l'exemple fondamental de mesure sur une algèbre est celui de la longueur λ sur l'algèbre préborélienne

$$\lambda : \begin{cases} \mathcal{A}_{\mathbb{R}} & \to [0,+\infty] \\ A = \sum_{i=1}^{n}]a_i, b_i] & \mapsto \lambda(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \end{cases}$$

Lemme 2.2
L'application λ est une mesure sur l'algèbre préborélienne.

Remarque. Comme annoncé en section 2.2, la vérification de la σ-additivité n'est pas triviale et repose sur le Théorème de Borel-Lebesgue. Ce résultat est admis.

On a donc défini explicitement la mesure σ-finie λ sur l'algèbre préborélienne : on voudrait l'étendre à la tribu qu'elle engendre, i.e. la tribu borélienne. Ceci est possible de façon générale, comme l'a montré Carathéodory.

Théorème 2.1 (Prolongement de Carathéodory)
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Ω. Toute mesure m sur $\mathcal{A}$, σ-finie, se prolonge de façon unique en une mesure $\bar{m}$, σ-finie, sur la tribu $\sigma(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$.

Preuve (Esquisse). A tout sous-ensemble A de Ω est associée une mesure extérieure $m^*(A)$ comme suit : notons pour commencer

$$\mathcal{H}(A) = \left\{ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ A \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right\}.$$

$\mathcal{H}(A)$ est non vide puisque Ω en fait partie. Soit alors :

$$m^*(A) = \inf_{(A_n)\in\mathcal{H}(A)} \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n).$$

On vérifie que m^* a les propriétés suivantes :
– $m^*(A) \geq 0$ et $m^*(\emptyset) = 0$;
– Monotonie : $A \subseteq B$ implique $m^*(A) \leq m^*(B)$;

– Sous-σ-additivité : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de Ω

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} m^*(A_n).$$

– Si A appartient à l'algèbre $\mathcal{A}$, alors mesure et mesure extérieure coïncident : $m^*(A) = m(A)$.
On dit alors qu'un ensemble A de $\mathcal{P}(\Omega)$ est m^*-mesurable si :

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega) \qquad m^*(B) = m^*(A \cap B) + m^*(A^c \cap B).$$

Si on note $\mathcal{A}^*$ la classe des ensembles m^*-mesurables, on vérifie que :
– $\mathcal{A}^*$ est une tribu de Ω et la restriction m' de m^* à $\mathcal{A}^*$ est une mesure ;
– $\mathcal{A}^*$ contient $\mathcal{A}$, donc $\sigma(\mathcal{A})$.
Des deux derniers points on déduit que la restriction $\bar{m}$ de m^* à $\sigma(\mathcal{A})$ satisfait les conditions du théorème de Prolongement. On peut aussi démontrer l'unicité.

■

Avant de passer à la mesure de Lebesgue proprement dite, il convient de dire un mot des ensembles négligeables, importants aussi bien pour l'intégration de Lebesgue (propriétés vraies presque partout) qu'en probabilités (propriétés presque sûres).

Définition 2.7 (Ensembles négligeables, tribu et mesure complétées)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ *un espace mesuré.*
– *Un ensemble* N *de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est dit négligeable s'il est contenu dans un ensemble de mesure nulle. On note* $\mathcal{N}$ *l'ensemble des négligeables.*
– $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \mathcal{N}$ *est encore une tribu, appelée tribu complétée de* $\mathcal{F}$ *pour la mesure* m*.*
– *L'application* $\tilde{m} : \tilde{\mathcal{F}} \to [0, +\infty]$*, définie pour tout élément* $A \cup N$ *de la tribu* $\tilde{\mathcal{F}}$ *par* $\tilde{m}(A \cup N) = m(A)$*, est une mesure sur la tribu complétée* $\tilde{\mathcal{F}}$ *: on l'appelle la mesure complétée.*

Remarques.
– Dans la preuve ci-dessus, on peut vérifier que $\widetilde{\sigma(\mathcal{A})} \subseteq \mathcal{A}^*$. Ceci assure que le théorème de prolongement fournit nécessairement une tribu complète.
– La propriété de sous$-\sigma-$additivité montre qu'une union au plus dénombrable d'ensembles négligeables est encore négligeable.

Exemple : l'ensemble de Cantor.
On sait qu'un point est négligeable pour la mesure de Lebesgue. Par σ-additivité, on en déduit que tout ensemble au plus dénombrable est de mesure de Lebesgue nulle : ainsi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont négligeables . Néanmoins, tout ensemble de mesure nulle de Lebesgue n'est pas nécessairement dénombrable : c'est ce que montre l'ensemble triadique de Cantor : négligeable, mais ayant la puissance du continu, c'est-à-dire en bijection avec $\mathbb{R}$ (voir exercice).

2.5 Mesure de Lebesgue

Récapitulons les étapes précédentes : on dispose d'une algèbre (l'algèbre préborélienne) sur laquelle est explicitement définie une mesure (la longueur). L'algèbre en question engendre la tribu qui nous intéresse (la tribu borélienne). Tout est donc prêt pour appliquer le principe de prolongement.

Théorème 2.2 (Mesure de Lebesgue)
Le prolongement de la mesure de longueur λ *définie sur l'algèbre préborélienne* $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ *à la tribu borélienne* $\mathcal{B}$ *existe et est unique : on l'appelle la mesure de Lebesgue de* $\mathbb{R}$ *et on la note encore* λ*.*

La mesure de Lebesgue n'est pas une mesure finie puisque $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$. C'est par contre une mesure σ-finie : $\lambda(]-n,n[) = 2n < +\infty$ et $\cup_{n=0}^{+\infty}]-n,n[= \mathbb{R}$.

Par ailleurs, si on applique le principe de complétion à la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne, on obtient la tribu de Lebesgue.

Définition 2.8 (Tribu de Lebesgue)
On appelle tribu de Lebesgue sur la droite réelle, notée $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ ou plus simplement $\mathcal{L}$, la tribu complétée de la tribu borélienne pour la mesure de Lebesgue. Les éléments de $\mathcal{L}$ sont dits Lebesgue mesurables. On note encore λ la mesure de Lebesgue complétée.

Remarque. Ainsi tout élément A de la tribu de Lebesgue s'écrit $A = B \cup N$ avec B borélien et N négligeable ; en particulier $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Cette tribu a été mentionnée car on la rencontre dans certains ouvrages. Pour ce qui nous concerne, on se contentera néanmoins de la tribu borélienne. Ainsi, en théorie de l'intégration, l'ensemble des réels muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, succinctement $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, sera notre **espace mesuré de référence**. On retrouve bien sûr tous les axiomes et propriétés d'une mesure sur une tribu : σ-additivité, monotonie, additivité forte, sous-σ-additivité, continuité monotone croissante, continuité monotone décroissante.

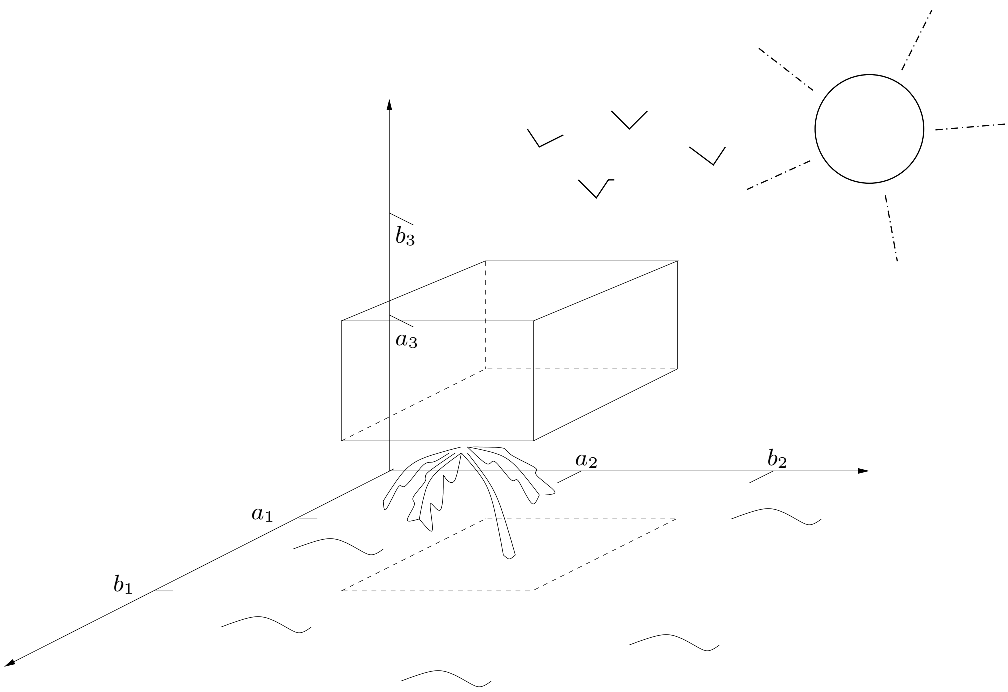

FIGURE 2.7 – Sous le pavé, la plage...

Généralisation : Mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$
Ce qui a été fait dans $\mathbb{R}$ se généralise mutatis mutandis à $\mathbb{R}^d$. On définit comme avant les notions d'algèbre préborélienne et de tribu borélienne en dimension d. Soit alors I un pavé borné (voir figure 2.7) :

$$I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d) = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \ : \ x_i \in (a_i, b_i) \ \forall i\},$$

on lui associe sa mesure de Lebesgue comme suit :

$$\lambda(I) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_d - a_d).$$

Par la méthode de prolongement, on définit ainsi la mesure de Lebesgue λ sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_d$. En dimension 2 (respectivement 3), la mesure de Lebesgue d'un borélien correspond à son aire (respectivement à son volume). De façon générale, ce qu'on appelle le volume d'un ensemble de $\mathbb{R}^d$ est sa mesure de Lebesgue.

2.6 Mesures de probabilité sur la droite réelle

On s'intéresse aux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne, notée $\mathcal{B}$, c'est-à-dire aux applications

$$\mathbb{P} : \mathcal{B} \to [0, 1],$$

vérifiant

(i) $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$;
(ii) Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite de boréliens deux à deux disjoints :

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

On va montrer que ces mesures sont complètement caractérisées par leur fonction de répartition, c'est-à-dire par la seule connaissance des probabilités des intervalles $]-\infty, x]$.

Définition 2.9 (Fonction de répartition $F_{\mathbb{P}}$)
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. On appelle fonction de répartition de $\mathbb{P}$ la fonction

$$F_{\mathbb{P}} \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to [0,1] \\ x & \mapsto F_{\mathbb{P}}(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]) \end{array} \right.$$

Les fonctions de répartition ont déjà été rencontrées en cours de probabilité : la fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Le lien entre ces définitions est très simple : il consiste à associer à la variable aléatoire réelle X l'application

$$\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{B} & \to [0,1] \\ B & \mapsto \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \end{array} \right.$$

On vérifie que c'est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, appelée mesure image de X, ou loi de X. La fonction de répartition de $\mathbb{P}_X$ coïncide alors avec la fonction de répartition de X, et la boucle est bouclée.

De la définition ci-dessus découlent les propriétés bien connues des fonctions de répartition pour une variable aléatoire (voir figure 2.8).

Propriétés 2.3 (Propriétés d'une fonction de répartition)
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ et $F_{\mathbb{P}}$ sa fonction de répartition.

1. *$F_{\mathbb{P}}$ est croissante ;*

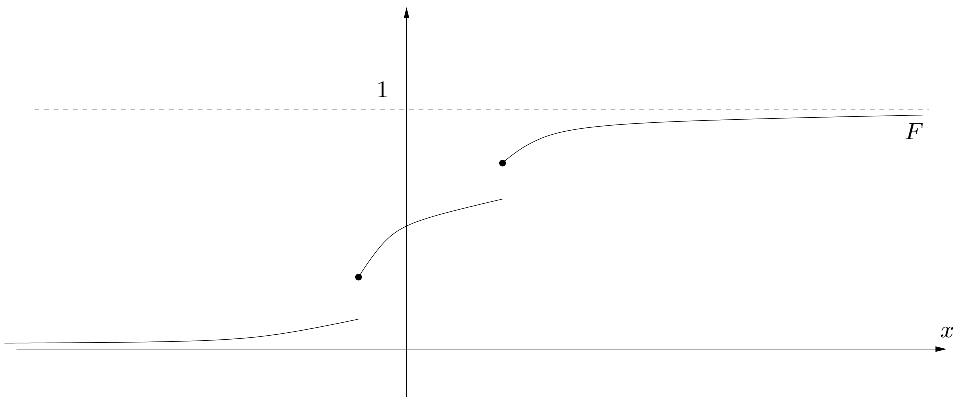

Figure 2.8 – Exemple de fonction de répartition.

2. $\lim_{x\to-\infty} F_{\mathbb{P}}(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F_{\mathbb{P}}(x) = 1$ *;*

3. $F_{\mathbb{P}}$ *est continue à droite.*

Preuve.

1. La croissance de $F_{\mathbb{P}}$ découle de la monotonie de la mesure $\mathbb{P}$. Si $x \leq x'$, alors $]-\infty, x] \subseteq]-\infty, x']$, donc :
$$F_{\mathbb{P}}(x) = \mathbb{P}\left(]-\infty, x]\right) \leq \mathbb{P}\left(]-\infty, x']\right) = F_{\mathbb{P}}(x').$$
2. Puisque $F_{\mathbb{P}}$ est croissante, elle admet une limite en $-\infty$, avec :
$$\lim_{x\to-\infty} F_{\mathbb{P}}(x) = \lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{P}}(-n).$$
Il suffit alors d'appliquer la continuité monotone décroissante. On a $P(]-\infty, 0]) \leq 1 < +\infty$ et :
$$\lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{P}}(-n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(]-\infty, -n]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}]-\infty, -n]\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$
La limite en $+\infty$ provient, elle, de la continuité monotone croissante :
$$\lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{P}}(n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(]-\infty, n]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}]-\infty, n]\right) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1.$$
3. La fonction $F_{\mathbb{P}}$ est continue à droite ssi pour toute suite décroissante $(x_n)_{n\geq 0}$ de limite x, on a $\lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{P}}(x_n) = F_{\mathbb{P}}(x)$. Ici encore, il suffit d'appliquer la continuité monotone décroissante. On a $P(]-\infty, x_0]) \leq 1 < +\infty$ et :
$$\lim_{n\to+\infty} F_{\mathbb{P}}(x_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}]-\infty, x_n]\right) = \mathbb{P}(]-\infty, x]) = F_{\mathbb{P}}(x).$$

■

Remarque. Pour toute mesure finie m, la condition $m(A_0) < +\infty$ est automatiquement vérifiée dans la continuité monotone décroissante.

Réciproquement, à partir de ces propriétés, on peut définir de façon générale la notion de fonction de répartition sur $\mathbb{R}$, sans lien a priori avec les probabilités.

Définition 2.10 (Fonction de répartition F)
Soit $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction vérifiant les trois propriétés ci-dessus (croissance, limites 0 et 1, continuité à droite), alors on dit que F est une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$.

La question naturelle est donc la suivante : étant donnée une fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$, peut-on lui associer une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$? La réponse est oui et fait bien sûr intervenir le prolongement de Carathéodory. Il suffit de suivre pas à pas la construction de la mesure de Lebesgue. Il faut commencer par définir la mesure des ensembles préboréliens. Soit donc

$$\mu_F : \left\{ \begin{array}{rl} \mathcal{A}_{\mathbb{R}} & \to [0,1] \\ A = \sum_{i=1}^n]a_i, b_i] & \mapsto \mu_F(A) = \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i)) \end{array} \right.$$

On vérifie que $\mu_F(\mathbb{R}) = 1$ et que μ_F est σ-additive sur l'algèbre préborélienne (non trivial). On peut donc prolonger μ_F.

Théorème 2.3 (Prolongement de F)
Soit F une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ dont F soit la fonction de répartition.

Ceci montre qu'une mesure de probabilité sur l'ensemble des réels muni de la tribu borélienne est complètement caractérisée par un objet bien plus simple et maniable : sa fonction de répartition.

Exemples.

– Loi uniforme sur $[0,1]$: on définit la fonction de répartition F d'une telle loi par

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{array} \right.$$

– Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$: si $\lambda > 0$, on définit la fonction de répartition F d'une telle loi par

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{array} \right.$$

– Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$: si $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, on définit pour tout réel x

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \, dt.$$

– Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: c'est la fonction de répartition associée à la mesure de probabilité

$$\mathbb{P} = (1-p)\delta_0 + p\delta_1.$$

– Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: soit $\lambda > 0$, c'est la fonction de répartition associée à la mesure de probabilité

$$\mathbb{P}_\lambda = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n.$$

Remarque. La mesure de comptage μ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ correspond à la mesure mettant le poids 1 en chaque entier naturel :

$$\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n.$$

C'est une mesure σ-finie, mais pas une mesure de probabilité.

On remarque sur les exemples ci-dessus deux types de fonctions de répartition : celles qui sont continues et celles qui présentent des sauts. Précisons cette notion. Dire que F est discontinue en un point x signifie que la probabilité $\mathbb{P}$ "charge" ce point.

Définition 2.11 (Fonction de masse)
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ et F la fonction de répartition associée. On appelle fonction de masse de $\mathbb{P}$ l'application

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to [0,1] \\ x & \mapsto \pi(x) = \mathbb{P}(x) = F(x) - F(x^-) \end{cases}$$

On note $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \pi(x) \neq 0\}$ l'ensemble des points de discontinuités de F.

Le nombre $\pi(x)$ est la hauteur du saut de F en x. Ainsi F est continue au point x si et seulement si $\pi(x) = 0$.

Proposition 2.2 (Cardinal de $\mathcal{D}$)
L'ensemble $\mathcal{D}$ des discontinuités de F est au plus dénombrable.

Preuve. Notons $A_n = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \pi(x) \geq \frac{1}{n}\}$. L'ensemble A_n est de cardinal inférieur ou égal à n puisque F varie de 0 à 1. Or $\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, donc $\mathcal{D}$ est une union dénombrable d'ensemble finis : il est au plus dénombrable.

■

Définition 2.12 (Lois discrètes, lois diffuses)
On dit que la mesure de probabilité P est
– *diffuse si $\mathcal{D} = \emptyset$;*
– *discrète si $\sum_{x \in \mathcal{D}} \pi(x) = 1$. $\mathcal{D}$ est alors appelé le support de $\mathbb{P}$.*

Une mesure de probabilité est diffuse si et seulement si sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$. Une mesure de probabilité est discrète si et seulement si sa fonction de répartition n'augmente que par sauts. Même si on en rencontre peu en pratique, une loi de probabilité peut n'être ni diffuse ni discrète : c'est le cas de la loi mixte $\mathbb{P} = \frac{1}{2}\mathbb{P}_{\mathcal{U}} + \frac{1}{2}\delta_1$.

Remarque. Le support d'une mesure de probabilité discrète peut être dense dans $\mathbb{R}$. Considérer par exemple $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ et la mesure :

$$\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{q_n}.$$

Proposition 2.3 (Décomposition discrète/diffuse)
Toute mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ se décompose de façon unique sous la forme :

$$\mathbb{P} = \alpha\mu + \beta\nu,$$

où α et β sont deux nombres positifs sommant à 1, μ une probabilité discrète et ν une probabilité diffuse.

Dans l'exemple de loi mixte ci-dessus, on a donc $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\mu = \delta_1$ et $\nu = \mathbb{P}_{\mathcal{U}}$. Parmi les mesures de probabilités diffuses, on distinguera encore celles qui sont absolument continues de celles qui sont singulières (cf. chapitre 3).

2.7 Exercices

Exercice 2.1 (Ensembles dénombrables)
On dit que E est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Concrètement, E est dénombrable si on peut numéroter tous ses éléments, i.e. écrire $E = \{u_0, u_1, \dots, u_n, \dots\}$. Pour montrer qu'un ensemble est dénombrable, il suffit de pouvoir indiquer un procédé de numérotage qui n'oublie aucun élément de E. On parle de "au plus dénombrable" pour dire "fini ou dénombrable". Par exemple, un ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est dénombrable.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (procédé diagonal de Cantor).

Corrigé
Pour montrer qu'un ensemble est dénombrable, il suffit de pouvoir indiquer un procédé de numérotage qui n'oublie aucun élément de E. C'est ce que nous allons utiliser dans la suite.

1. Pour voir que $\mathbb{Z}$ est dénombrable, il suffit d'écrire :
$$\mathbb{Z} = (0, -1, +1, -2, +2, ...),$$
c'est-à-dire $\mathbb{Z} = (u_n)_{n \geq 0}$, avec :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} u_{2n} & = n \\ u_{2n+1} & = -(n+1) \end{cases}$$
2. Pour l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, on exhibe en figure 2.9 un moyen de parcourir l'ensemble des couples (p, q) avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Puisqu'on ne suppose pas p et q premiers entre eux, l'application $(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$ n'est pas bijective, mais peu importe puisqu'elle est surjective donc on n'oublie aucun rationnel positif et c'est bien là l'essentiel : dans la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ ainsi obtenue, il suffira ensuite d'éliminer les u_n redondants. Appelons $(v_n)_{n \geq 0}$ cette suite épurée, elle est donc en bijection avec $\mathbb{Q}^+$. Pour obtenir $\mathbb{Q}$ tout entier, on peut alors procéder comme pour $\mathbb{Z}$, en alternant un élément de $\mathbb{Q}^+$ et son opposé dans $\mathbb{Q}^-$. On obtient alors une suite $(q_n)_{n \geq 0}$ décrivant l'ensemble des rationnels.

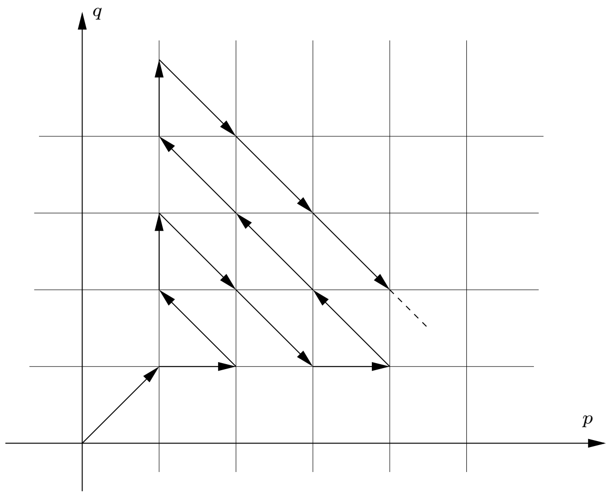

FIGURE 2.9 – Une façon de parcourir l'ensemble des couples $(p, q) \in \{(0, 0)\} \cup \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

3. Pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, il suffit de prouver que l'ensemble $[0,1[$ ne l'est pas. Pour cela, commençons par rappeler que tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n 10^{-n} = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} + \ldots$$

avec $x_n \in \{0,1,\ldots,9\}$ pour tout n. C'est le développement décimal de x et on écrit encore $x = 0,\overline{x_1x_2\ldots x_n\ldots}$. On convient en général que ce développement décimal ne finit pas par une infinité de 9, c'est-à-dire qu'on écrit $x = 0.3780000$ ou plus succinctement $x = 0.378$, plutôt que $x = 0.37799999\ldots$. On raisonne alors pas l'absurde. Si on suppose $[0,1[$ dénombrable, il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $[0,1[= (u_n)_{n\geq 1}$. Chaque terme u_n admet un développement décimal, que l'on convient d'écrire comme suit :

$$u_n = 0,\overline{u_n^1 u_n^2 \ldots u_n^n \ldots}.$$

Vient alors la ruse diabolique de Cantor, connue sous le nom de procédé diagonal : en considérant le nombre $x = 0,\overline{x_1x_2\ldots x_n\ldots}$ pour lequel :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n^n \neq 0 \\ 1 & \text{si } u_n^n = 0 \end{cases}$$

Le réel x est encore clairement dans $[0,1[$, or il est différent de chaque u_n puisque par construction il en diffère au moins par une décimale ($x_n \neq u_n^n$ pour tout n). On a donc une contradiction, ce qui signifie que l'hypothèse de départ était absurde : $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2.2 (L'ensemble triadique de Cantor)
On considère la suite décroissante (K_n) de sous-ensembles de l'intervalle $[0,1]$ définie par : $K_0 = [0,1]$, $K_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$, $K_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$, etc. De façon générale :

$$K_n = \bigcup_{(\varepsilon_i, 1\leq i\leq n)\in\{0,2\}^n} \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_i 3^{-i}, 3^{-n} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i 3^{-i}\right].$$

L'ensemble de Cantor K est défini par $K = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_n$.

1. Représenter K_1, K_2 et K_3. Pourquoi les K_n sont-ils boréliens ? Et K ?
2. Calculer $\lambda(K_n)$? En déduire que K est négligeable.
3. Soit $x \in [0,1]$, $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n 3^{-n}$ son développement triadique. Que dire des x_n lorsque x appartient à l'ensemble de Cantor ?
4. Montrer que l'application $\phi : K \to [0,1]$, définie par $\phi(x) = \phi\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n 3^{-n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2} 2^{-n}$, établit une bijection entre l'ensemble de Cantor et l'intervalle $[0,1]$. En déduire que K n'est pas dénombrable.

Exercice 2.3 (Mesures d'intervalles)
On considère les mesures suivantes : mesure de Lebesgue λ, mesure de Dirac δ_0 au point 0, mesure de comptage μ sur $\mathbb{N}$. Donner pour chacune les mesures des ensembles suivants : $\mathbb{R}$, $[0,+\infty[$, $[1,+\infty[$, $[0,1]$, $[0,2]$, $\{1\}$.

Exercice 2.4 (Mesures d'unions et d'intersections)
On considère les mesures suivantes : mesure de Lebesgue λ, mesure de comptage μ, mesure $\nu = \sum_{n=0}^{+\infty} n\delta_n$. Donner pour chacune les mesures des ensembles suivants :

1. $A_n = [n, n+1+\frac{1}{n^2}]$, avec $n > 0$.
2. $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ et $B = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$.
3. $C_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$ et $C = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$.

Exercice 2.5 (Mesure et aspect borné)
On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ, c'est-à-dire l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ la suite d'ensembles de $\mathbb{R}$ définie par $A_n =]n, n+\frac{1}{2^n}[$.

1. Représenter A_0, A_1, A_2. Les A_n sont-ils boréliens ?
2. Soit $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Pourquoi A est-il borélien ? Déterminer alors $\lambda(A)$.
3. Un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il nécessairement borné ?

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet d'avril 2004.

Exercice 2.6 (Exemple de tribu engendrée)
On se place dans l'ensemble $\mathbb{N}$. On considère la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par les ensembles

$$S_n = \{n, n+1, n+2\} \text{ avec } n \in \{0, 2, 3, \ldots\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, le singleton $\{n\}$ appartient à $\mathcal{F}$.
2. En déduire que toute partie de $\mathbb{N}^{**} = \{2, 3, \ldots\}$ est dans $\mathcal{F}$, autrement dit que $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{**}) \subset \mathcal{F}$.
3. Caractériser alors simplement les éléments de $\mathcal{F}$.

Corrigé

1. On a $S_0 = \{0, 1, 2\}$, $S_2 = \{2, 3, 4\}$, $S_3 = \{3, 4, 5\}$, $S_4 = \{4, 5, 6\}$, etc. Par stabilité d'une tribu par intersection, on voit donc que pour tout $n \geq 4$, le singleton $\{n\} = S_n \cap S_{n-1} \cap S_{n-2}$ appartient à $\mathcal{F}$. Pour les mêmes raisons, le singleton $\{2\} = S_0 \cap S_2$ appartient à $\mathcal{F}$. Enfin $\{3\} = S_2 \cap \overline{\{2\}} \cap \overline{\{4\}}$ appartient lui aussi à $\mathcal{F}$.
2. Une partie de $\mathbb{N}^{**} = \{2, 3, \ldots\}$ est l'union au plus dénombrable de singletons piochés parmi les entiers supérieurs ou égaux à 2. Comme on vient de voir que chacun de ces singletons est dans $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}$ est stable par union au plus dénombrable, on en déduit que tout sous-ensemble de $\mathbb{N}^{**}$ est dans $\mathcal{F}$. Autrement dit : $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{**}) \subset \mathcal{F}$.
3. On voit que $S_0 \setminus \{2\} = \{0, 1\} \in \mathcal{F}$, mais aucun des singletons $\{0\}$ et $\{1\}$ n'appartient à $\mathcal{F}$, autrement dit on ne peut pas séparer 0 et 1 dans $\mathcal{F}$. De fait $A \in \mathcal{F}$ si et seulement si il existe $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^{**})$ tel que $A = B$ ou $A = \{0, 1\} \cup B$.

Exercice 2.7 (Résultat utile en probabilités)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles mesurables tels que :

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

Grâce à la sous-σ-additivité, montrer que l'un des événements A_i est de probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{n}$.

Corrigé

Si tous les $\mathbb{P}(A_i)$ étaient de probabilité strictement inférieure à $1/n$, ceci serait clairement impossible puisque la somme des probabilités serait alors strictement inférieure à 1. On en déduit que l'un des événements A_i est bien de probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{n}$.

Exercice 2.8 (Fonction définie via une mesure)

Dans cet exercice, μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ vérifiant de plus les conditions :
(C_1) $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \mu(\{x\}) = 0$;
(C_2) Pour tous réels $a < b$: $\mu([a, b]) < +\infty$.

1. La mesure de Lebesgue λ vérifie-t-elle ces deux conditions ? Et la mesure de Dirac δ_0 ?
2. Calculer $\lim_{n\to\infty} \mu(] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}[)$. Montrer que $\mu(\mathbb{Q}) = 0$.
3. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. On définit la fonction f_A comme suit
$$f_A : \begin{cases} \mathbb{R} & \to [0, +\infty[\\ x & \mapsto f_A(x) = \mu(A \cap [-|x|, |x|]) \end{cases}$$
Pourquoi la fonction f_A est-elle bien définie ? Montrer que f_A est paire. Montrer que f_A est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Que vaut $f_A(x)$ lorsque $A = \mathbb{Q}$?
4. On suppose dans cette question que $\mu = \lambda$. Représenter f_A lorsque $A = \mathbb{R}$. Même question lorsque $A = [0, 1]$, lorsque $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty}[n, n + \frac{1}{2}]$.

Corrigé

Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2005.

Exercice 2.9 (Limites supérieure et inférieure d'ensembles)

Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties d'un ensemble Ω. On appelle limite supérieure des A_n et on note $\overline{\lim} A_n$, ou $\limsup_n A_n$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité de A_n. On appelle limite inférieure des A_n et on note $\underline{\lim} A_n$, ou $\liminf_n A_n$ l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les A_n sauf à un nombre fini d'entre eux.

1. Soit A et B deux parties de Ω et la suite (A_n) définie par $A_0 = A_2 = \cdots = A$ et $A_1 = A_3 = \cdots = B$. Déterminer les limites sup et inf des A_n.
2. Ecrire les définitions de $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ à l'aide des quantificateurs logiques $\exists$ et $\forall$. Les traduire en termes ensemblistes à l'aide des symboles $\cup$ et $\cap$.
3. Déterminer $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ dans les situations suivantes :
   (a) $A_n =] - \infty, n]$ avec $n \geq 0$;
   (b) $A_n =] - \infty, -n]$ avec $n \geq 0$;
   (c) $A_n =] - 1/n, 1/n[$ avec $n > 0$;
   (d) $A_n =] - \infty, a_n]$, pour $n \geq 1$, avec :
$$\begin{cases} a_{2p+1} & = -1 - 1/(2p + 1) \quad \forall p \geq 0 \\ a_{2p} & = 1 + 1/(2p) \quad \forall p > 0 \end{cases}$$

Corrigé

1. Soit A et B deux parties de Ω et la suite (A_n) définie par $A_{2n} = A$ et $A_{2n+1} = B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

– Concernant la limite sup, un élément ω lui appartient s'il est dans une infinité de A_n : soit tous les indices n sont pairs, auquel cas $\omega \in A$, soit tous les indices n sont impairs, auquel cas $\omega \in B$, soit il y en a des pairs et des impairs, auquel cas $\omega \in A \cap B$. Quoi qu'il en soit, il est clair que si ω est dans la limite sup des A_n, on a nécessairement $\omega \in A \cup B$. La réciproque marche aussi : si $\omega \in A \cup B$, le raisonnement précédent permet d'exhiber une infinité de A_n auxquels ω appartient. Ainsi on a $\overline{\lim} A_n = A \cup B$.
– Concernant la limite inf, un élément ω lui appartient s'il est dans tous les A_n sauf un nombre fini. Il existe donc un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0 \qquad \omega \in A_n.$$

En particulier $\omega \in A_{n_0}$ et $\omega \in A_{n_0+1}$, ainsi $\omega \in A$ et $\omega \in B$, donc $\omega \in A \cap B$. Réciproquement, soit $\omega \in A \cap B$, alors il est clair que $\omega \in A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi on a $\underline{\lim} A_n = A \cap B$.

2. On peut réécrire automatiquement les définitions de $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ à l'aide des quantificateurs logiques $\exists$ et $\forall$. Ceci donne pour la limite sup :

$$\overline{\lim} A_n = \{\omega \in \Omega \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \exists k \geq n, \ \omega \in A_k\},$$

et pour la limite inf :

$$\underline{\lim} A_n = \{\omega \in \Omega \ : \ \exists n \in \mathbb{N}, \ \forall k \geq n, \ \omega \in A_k\}.$$

On peut aussi les traduire en termes ensemblistes, en remplaçant $\exists$ par $\cup$ et $\forall$ par $\cap$. Ceci donne pour la limite sup :

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k,$$

et pour la limite inf :

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

3. On donne ici les résultats sans les justifier.
   (a) Si $A_n =]-\infty, n]$ pour tout $n \geq 0$, alors $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \mathbb{R}$. Lorsque la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante pour l'inclusion, comme c'est le cas ici, on a en fait le résultat général :

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

   (b) Si $A_n =]-\infty, -n]$ pour tout $n \geq 0$, alors $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \emptyset$. Lorsque la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est décroissante pour l'inclusion, comme c'est le cas ici, on a en fait le résultat général :

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

   (c) Si $A_n =]-1/n, 1/n[$ pour tout $n > 0$, alors on est à nouveau dans le cas d'une suite décroissante pour l'inclusion et :

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{0\}.$$

   (d) Dans ce dernier cas, on a :

$$\underline{\lim} A_n =]-\infty, -1[\subsetneq \overline{\lim} A_n =]-\infty, 1].$$

Exercice 2.10 (Un ensemble non borélien)
On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. On définit sur $[0,1]$ la relation d'équivalence :

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Cette relation partitionne l'intervalle $[0,1]$ en classes d'équivalence. Choisissons un représentant x dans chaque classe et considérons l'ensemble $E = \cup\{x\}$ formé par l'union de ces représentants. La classe de x est alors notée C_x.

1. Montrer que pour tout $y \in [0,1]$, on a $y \in \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(q+E)$. Que dire par ailleurs de l'intersection des ensembles $(q+E)$?
2. En déduire que :
$$[0,1] \subseteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (q+E) \subseteq [-1,2].$$
3. Supposons E borélien. Soit $q \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]$: que vaut alors $\lambda(q+E)$?
4. En utilisant la propriété de $\sigma-$additivité, en déduire que E n'est pas borélien.

Exercice 2.11 (Probabilités d'intervalles)
On considère les mesures de probabilités suivantes sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$: mesure $\mathbb{P}_{\mathcal{U}}$ associée à la loi uniforme sur le segment $[0,1]$, mesure $\mathbb{P}_{\mathcal{E}}$ associée à la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, mesure $\mathbb{P}_{\mathcal{N}}$ associée à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, mesure $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}$ associée à la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, mesure $\mathbb{P}_{\mathcal{P}}$ associée à la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$, mesure $\mathbb{P}_m$ associée à la loi mixte $\frac{1}{2}\mathcal{U}_{[0,1]} + \frac{1}{2}\delta_1$.Donner pour chacune les mesures des boréliens suivants : $]0,+\infty[$, $[1,+\infty[$, $[0,1]$, $[0,2]$, $\{1\}$.

Exercice 2.12 (Loi de Cauchy)
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\pi(1+t^2)}$.

1. Exprimer plus simplement F.
2. Vérifier que F est une fonction de répartition. Donner sa représentation.
3. Que vaut $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\pi(1+t^2)}\,dt$?
4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X est intégrable si $\mathbb{E}|X| < +\infty$. Une variable aléatoire X, admettant pour densité $f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$, est-elle intégrable ?

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de décembre 2004.

Exercice 2.13 (Fonction de survie)
On considère sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ la mesure ν définie par : $\nu = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^n}\delta_n$.

1. Vérifier que ν est une probabilité. Comment appelle-t-on cette loi de probabilité ?
2. Déterminer $\nu(]-\infty,1])$, $\nu(\{1\})$, $\nu(\{2\})$, $\nu([2,+\infty[)$.
3. On appelle F la fonction de répartition de ν. Représenter F sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$.
4. On appelle fonction de survie associée à ν la fonction r définie sur $\mathbb{N}$ par $r(n) = \nu(]n,+\infty[)$. Calculer $r(n)$ et vérifier que $\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2$: $r(n+m) = r(n)r(m)$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de décembre 2004.

Exercice 2.14 (Cocktail de mesures)
On considère les mesures suivantes sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$: mesure de Lebesgue λ, mesure de comptage $\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n$, mesure $\nu = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\delta_n$. Pour tout $n > 0$, on considère l'intervalle : $A_n = \left[n, n + \frac{1}{n}\right[$.

1. Pour tout $n > 0$, déterminer $\lambda(A_n)$, $\mu(A_n)$ et $\nu(A_n)$.
2. On définit $B_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$. Pour tout $N > 0$, déterminer $\lambda(B_N)$, $\mu(B_N)$ et $\nu(B_N)$.
3. On considère alors $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Déterminer $\lambda(B)$, $\mu(B)$ et $\nu(B)$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2006.

Exercice 2.15 (Formule de Poincaré)
Les étudiants de Mass 3 ont décidé d'aller se picorer la ruche dans un boui-boui rennais, et ce en dépit des sages recommandations de leur professeur d'analyse. A la fermeture, pétés comme des serre-joints, ils passent au vestiaire récupérer leur manteau. Problème : ils sont dans un tel état qu'ils finissent par en prendre chacun un au hasard (encore bravo...). Le but de l'exercice est de déterminer la probabilité qu'aucun des étudiants ne récupère le sien.

1. Les étudiants sont numérotés de 1 à n et l'évènement A_i signifie : "l'étudiant i a récupéré son manteau". Exprimer grâce aux A_i l'évènement A : "aucun des étudiants ne récupère son manteau".
2. Rappeler la formule de Poincaré pour la probabilité de l'union des A_i.
3. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Combien y a-t-il de séquences d'indices $(i_1, \dots, i_k)$ telles que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$?
4. Que vaut la probabilité $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$?
5. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$.
6. On rappelle que pour tout réel x, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A) = 1/e \approx 37\%$ de chances que ce soit le mardi gras absolu en fin de soirée.

Exercice 2.16 (Lemme de Borel-Cantelli)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ et $A = \overline{\lim} A_n$.

1. Par la caractérisation ensembliste de la limite sup, dire pourquoi A appartient à $\mathcal{F}$.
2. Considérons la suite d'ensembles $D_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Montrer qu'elle est décroissante.
3. On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. Via la sous-$\sigma$-additivité, montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n) = 0$.
4. Grâce à la continuité monotone décroissante, en déduire que $\mathbb{P}(A) = 0$. Traduire ce résultat concrètement.
   Remarque : Réciproquement, on montre que si les A_n sont des événements deux à deux indépendants et si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$.

Corrigé

1. On a vu dans l'exercice 2.9 que :
$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n.$$
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $D_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$ appartient à $\mathcal{F}$ puisque la tribu $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable. Puisqu'elle est également stable par intersection dénombrable, $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ appartient encore à $\mathcal{F}$.

2. Si on note $D_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$, on a :

$$D_{n+1} = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \subset A_n \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = D_n,$$

et la suite $(D_n)_{n\geq 0}$ est bien décroissante pour l'inclusion.

3. On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. La sous-$\sigma$-additivité permet d'écrire pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(D_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

et le terme de droite est le reste d'une série convergente, qui tend donc nécessairement vers 0, d'où a fortiori $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n) = 0$.

4. La suite $(D_n)_{n\geq 0}$ étant décroissante pour l'inclusion, on peut appliquer la continuité monotone décroissante :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} D_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n) = 0.$$

Ainsi, lorsque la série $\sum_{n=\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente, il est improbable qu'une infinité d'événements A_n se produisent simultanément.

Exercice 2.17 (Limites supérieures et inférieures de nombres)
Soit (x_n) une suite de nombres réels.

1. On construit la suite (d_n) par : $d_n = \sup_{k\geq n} x_k$. Pourquoi (d_n) admet-elle une limite ? On l'appelle la limite sup de la suite (x_n) et on la note $\limsup_n x_n$ ou $\overline{\lim} x_n$.
2. On construit la suite (c_n) par : $c_n = \inf_{k\geq n} x_k$. Pourquoi (c_n) admet-elle une limite ? On l'appelle la limite inf de la suite (x_n) et on la note $\liminf_n x_n$ ou $\underline{\lim} x_n$.
3. Calculer $\limsup_n x_n$ et $\underline{\lim} x_n$ dans les situations suivantes : $x_n = (-1)^n$, $(x_n) = (1, 2, 1 + 1/2, 2 + 1/2, \dots, 1 + 1/p, 2 + 1/p, \dots)$, $x_n = 1 + 1/n$, (x_n) tend vers un nombre réel L, $x_n = n + (-1)^n$, (x_n) tend vers $+\infty$, $x_{2n} = -\ln(n + 1)$, $x_{2n+1} = -n - 1/(n + 1)$, (x_n) tend vers $-\infty$, $x_n = (-1)^n(1 + 1/n)$.
4. Soit (x_n) une suite de réels. Avec les notions de limites supérieure et inférieure d'ensembles vues ci-dessus, écrire autrement $\overline{\lim}] - \infty, x_n]$ et $\underline{\lim}] - \infty, x_n]$.

Exercice 2.18 (Fonction de répartition généralisée)
Soit m une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ vérifiant de plus la condition :

$$(\mathcal{C}) \qquad \text{Pour tous réels } a < b \qquad m([a, b]) < +\infty.$$

On appelle fonction de répartition généralisée de m la fonction G qui à un réel x associe

$$G(x) = \begin{cases} -m(]x, 0[) & \text{si } x < 0 \\ m([0, x]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) \in \mathbb{R}$.
2. Donner le signe de $G(x)$ suivant x.
3. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de limite 0. Calculer $G(0^-) = \lim_{n\to+\infty} G(x_n)$.
4. Si $0 \leq x \leq x'$, montrer que $G(x) \leq G(x')$. Montrer la même inégalité si $x \leq x' < 0$. En déduire que G est croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $x \geq 0$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante vers x, préciser $\lim_{n\to+\infty} G(x_n)$. Même question avec $x < 0$. Qu'en déduire sur G ?
6. Préciser et représenter G lorsque : $m = \lambda$ mesure de Lebesgue, $m = \delta_0$ mesure de Dirac au point 0, $m = \mu$ mesure de comptage de $\mathbb{N}$.
7. (bonus) Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, F sa fonction de répartition et G sa fonction de répartition généralisée. Donner la relation entre $F(x)$ et $G(x)$ (on ne demande pas de justification).

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de décembre 2005.

Exercice 2.19 (Additivité non dénombrable)
On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ un ensemble de parties de Ω. Quelles conditions $\mathcal{F}$ doit-elle satisfaire pour être une tribu ?
2. On considère l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. A quelles conditions une application $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ est-elle une mesure ?
3. On considère l'application $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ définie pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ par :
$$m(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ \sum_{n\in A} \frac{1}{n^2} & \text{si } A \text{ est un ensemble fini} \\ +\infty & \text{si } 0 \in A \text{ ou si } A \text{ est un ensemble infini} \end{cases}$$
Notons encore $A_n = \{n\}$. Déterminer $m(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Que vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n)$?
5. Déterminer $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, puis $m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$. m est-elle une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?
6. Montrer que m est additive, c'est-à-dire que si A et B sont deux ensembles disjoints de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de novembre 2006.

Exercice 2.20 (Une loi mixte)
On note $\lambda_{[0,1]}$ la mesure de probabilité associée à la loi uniforme sur $[0, 1]$, δ_0 et δ_1 les mesures de Dirac en 0 et 1. On considère alors la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ définie par :
$$\mathbb{P} = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{3}\lambda_{[0,1]} + \frac{1}{6}\delta_1.$$

1. Déterminer $\mathbb{P}(\{0\})$, $\mathbb{P}(]-\infty, 1/2])$, $\mathbb{P}([1/4, 3/4])$, $\mathbb{P}(]1/2, 1])$, $\mathbb{P}([1, +\infty[)$.
2. Représenter la fonction de répartition F associée à $\mathbb{P}$.
3. La probabilité $\mathbb{P}$ est-elle discrète ? Est-elle diffuse ?

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2007.

Chapitre 3

L'intégrale de Lebesgue

Introduction

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction : on veut lui associer son intégrale par rapport à la mesure m. On commence par préciser ce qu'est une fonction mesurable, puis intégrable. Afin de fixer les idées, on se place dans l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Mais on verra que la construction de l'intégrale de Lebesgue est en fait très générale et s'applique aussi à la théorie des séries numériques et au calcul des probabilités.

3.1 Fonctions mesurables

Dans toute la suite, la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est notée $\mathcal{B}$.

Notation. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathbb{R}$, on note :

$$[f \in A] = f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \in A\}.$$

Exemple. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2$, alors on a par exemple : $[f < 1] =]-1, 1[$, $[f < 0] = \emptyset$, $[f \geq 0] = \mathbb{R}$. Voir aussi la figure 3.1 pour une fonction arbitraire.

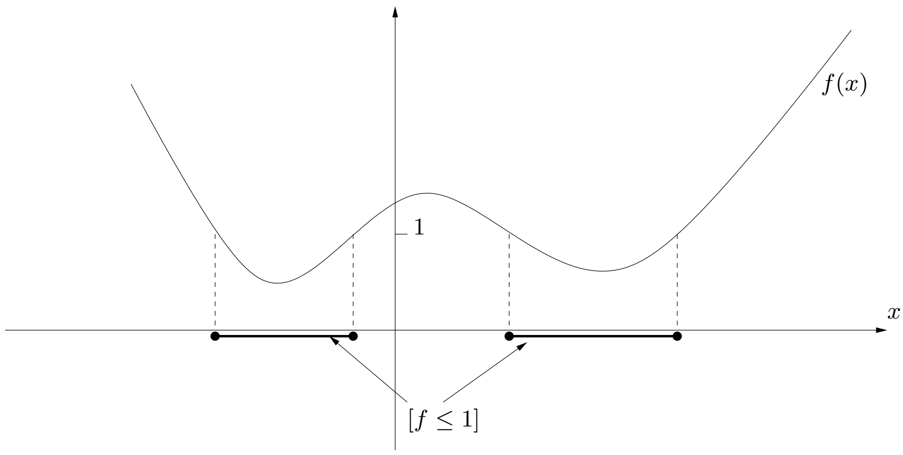

Figure 3.1 – Représentation de $[f \leq 1]$.

Définition 3.1 (Fonction mesurable)
On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable par rapport à la tribu borélienne, ou mesurable, ou encore borélienne, si :

$$\forall c \in \mathbb{R} \qquad [f < c] \in \mathcal{B}.$$

On a les caractérisations équivalentes suivantes : "f est mesurable si $\forall c \in \mathbb{R},\ [f \leq c] \in \mathcal{B}$", "$f$ est mesurable si $\forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ [c < f \leq d] \in \mathcal{B}$", "$f$ est mesurable si $\forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ [c < f < d] \in \mathcal{B}$", "$f$ est mesurable si $\forall c \in \mathbb{R},\ [c < f] \in \mathcal{B}$", "$f$ est mesurable si $\forall c \in \mathbb{R},\ [c \leq f] \in \mathcal{B}$", "$f$ est mesurable si $\forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ [c \leq f \leq d] \in \mathcal{B}$".

Exemples.
- Toute fonction continue est mesurable, car $f^{-1}(]-\infty, c[)$ est un ouvert, donc borélien.
- Toute fonction monotone est mesurable, car $f^{-1}(]-\infty, c[)$ est un intervalle, donc borélien.
- Soit E l'ensemble non borélien vu en exercice au chapitre précédent. La fonction $f = \mathbb{1}_E$ n'est pas borélienne, car $[f = 1] = [1 \leq f \leq 1] = E \notin \mathcal{B}$.

Généralisation. Soit $f : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ une fonction entre deux espaces mesurables : on dit que f est mesurable (sous-entendu : par rapport aux tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$) si pour tout ensemble A de la tribu d'arrivée $\mathcal{F}_2$, l'ensemble $[f \in A]$ est dans la tribu de départ $\mathcal{F}_1$.

Exemples :
- Dans le cas qui nous intéresse des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$(\Omega_1, \mathcal{F}_1) = (\Omega_2, \mathcal{F}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}).$$

- Une variable aléatoire réelle est une application $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mesurable, avec $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
- Une suite numérique peut être vue comme une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Si on munit $\mathbb{N}$ de la tribu complète $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}$, toute suite est une application mesurable de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Revenons aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. **En pratique**, de même qu'il est bien rare de rencontrer un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non borélien, les fonctions étudiées seront presque toujours mesurables. Par ailleurs, l'ensemble des fonctions mesurables est stable pour les opérations usuelles sur les fonctions.

Propriétés 3.1 (Propriétés opératoires classiques)
Soit f et g mesurables.
- *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ est mesurable.*
- *fg est mesurable.*
- *Si $g(x) \neq 0$ pour tout x, alors f/g est mesurable.*
- *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables, alors, sous réserve d'existence, les fonctions $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ et $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sont mesurables.*
- *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables convergeant simplement vers f, alors f est mesurable.*

Preuve.
- On vérifie sans difficulté que si f est mesurable et α une constante réelle, alors la fonction αf est mesurable. Prenons donc f et g mesurables et vérifions que $f + g$ l'est aussi. Or soit c un réel, alors :

$$[f + g < c] = [f < c - g] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left([f < q] \cap [q < c - g]\right).$$

Or si g est mesurable, il en va de même de la fonction $c - g$. Par stabilité de la tribu borélienne par intersections et unions au plus dénombrables, on en déduit que $[f+g<c]$ est borélien, donc que $f+g$ est mesurable.

– On commence par remarquer que si f est borélienne, alors f^2 l'est aussi. En effet :

$$[f^2 < c] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } c \leq 0 \\ [-\sqrt{c} < f < \sqrt{c}] & \text{si } c > 0 \end{cases}$$

Soit alors f et g mesurables, les fonctions $(f+g)$ et $(f-g)$ le sont aussi et il reste à remarquer que :

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

pour conclure à la mesurabilité de fg.

– Soit c un réel, alors la mesurabilité de la fonction $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ résulte de l'égalité :

$$\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n < c\right] = \bigcap_{n=0}^{+\infty} [f_n < c].$$

De même, la mesurabilité de la fonction $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ résulte de l'égalité :

$$\left[\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n < c\right] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [f_n < c].$$

– On utilise les notions de limites supérieures et inférieures vues en travaux dirigés. On introduit les fonctions $g_n = \sup_{k\geq n} f_k$. Alors si on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, on a à plus forte raison $\limsup_n f_n(x) = f(x)$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = f(x).$$

Mais puisque les f_n sont mesurables, les g_n le sont aussi, et la fonction $f = \inf_{n\in\mathbb{N}} g_n$ aussi.

■

Définition 3.2 (Fonction simple)
On appelle fonction simple, ou étagée, toute fonction qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs, c'est-à-dire de la forme :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}(x) \end{cases}$$

où les α_i sont des réels et où les E_i forment une partition de $\mathbb{R}$.

Remarques.

– Toute fonction en escalier sur un segment $[a,b]$ (voir chapitre 1, section 1.3) est simple, mais la réciproque est fausse (cf. la fonction de Peano).
– Il est clair que la décomposition $\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ n'est pas unique, sauf si on impose aux α_i d'être deux à deux distincts, ce que nous supposerons **dans la suite** : on parle alors de forme réduite, ou canonique, de la fonction ϕ.

La mesurabilité d'une fonction simple est facile à vérifier.

Proposition 3.1 (Mesurabilité d'une fonction simple)
Soit $\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ une fonction simple, alors ϕ est mesurable si et seulement si les E_i sont tous boréliens.

3.2 Intégration des fonctions simples positives

Définition 3.3 (Intégrale d'une fonction simple positive)
Soit $\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ une fonction simple positive mesurable. L'intégrale de ϕ sur $\mathbb{R}$ est par définition :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(E_i).$$

avec la convention $0 \times +\infty = 0$.
Si, plus généralement, X est un borélien de $\mathbb{R}$, l'intégrale de Lebesgue de ϕ sur X est :

$$\int_X \phi \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \phi \cdot \mathbb{1}_X \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(E_i \cap X).$$

On dit que ϕ est intégrable (au sens de Lebesgue) sur X si :

$$\int_X \phi \, d\lambda < +\infty.$$

On notera aussi l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\lambda(\,dx)$, ou encore $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, d\lambda(x)$.

Remarques.
– Graphiquement, l'intégrale de ϕ sur $\mathbb{R}$ est donc tout simplement l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la fonction ϕ.
– La valeur de l'intégrale peut donc être $+\infty$. Ceci n'est pas gênant, on dira simplement que la fonction n'est pas intégrable au sens de Lebesgue. Par contre, on s'est restreint aux fonctions positives afin d'éviter des situations problématiques de type $+\infty - \infty$ dans la définition ci-dessus.
– On vérifie que la valeur de l'intégrale est indépendante du fait que ϕ est écrite sous forme canonique ou non.

Exemples.
– La fonction $\phi = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ est une fonction simple mesurable positive et $\int_{\mathbb{R}} \phi \, d\lambda = +\infty$. Elle n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}$. Par contre $\int_{[0,1]} \phi \, d\lambda = 1$, donc elle est intégrable sur $[0, 1]$.
– La fonction $\phi = 2 \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}$ est une fonction simple mesurable positive et $\int_{\mathbb{R}} \phi \, d\lambda = 4$. Elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. Elle l'est aussi sur $[0, 1]$, avec $\int_{[0,1]} \phi \, d\lambda = 2$.

Propriétés 3.2 (Propriétés de l'intégrale)
Soit ϕ, ϕ_1, ϕ_2 des fonctions simples mesurables positives, X, X_1, X_2 des boréliens.
– *Positivité : si $\phi_1 \leq \phi_2$ sur X, alors :*

$$\int_X \phi_1 \, d\lambda \leq \int_X \phi_2 \, d\lambda.$$

– *Positivité (bis) : si $X_1 \subseteq X_2$, alors :*

$$\int_{X_1} \phi \, d\lambda \leq \int_{X_2} \phi \, d\lambda.$$

– *Si $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, alors :*

$$\int_{X_1 \cup X_2} \phi \, d\lambda = \int_{X_1} \phi \, d\lambda + \int_{X_2} \phi \, d\lambda.$$

– *Si $\phi = 0$ sur X, alors :*

$$\int_X \phi \, d\lambda = 0.$$

– *Si X est négligeable, i.e. $\lambda(X) = 0$, alors :*

$$\int_X \phi \, d\lambda = 0.$$

– *Si α et β sont des réels positifs, alors :*

$$\int_X (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) \, d\lambda = \alpha \int_X \phi_1 \, d\lambda + \beta \int_X \phi_2 \, d\lambda.$$

Preuve.

– Les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 étant simples et positives, on peut les décomposer comme suit :

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \qquad \phi_2 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}.$$

Puisque les $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et les $(B_j)_{1 \leq j \leq m}$ forment chacun une partition de X, il est clair que les ensembles $(C_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$, avec $C_{i,j} = A_i \cap B_j$, forment aussi une partition de X. Sur cette partition, on a les écritures (non canoniques) :

$$\phi_1 = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \alpha_i \mathbb{1}_{C_{i,j}} \qquad \phi_2 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{C_{i,j}}.$$

On en déduit que :

$$\int_X \phi_1 \, d\lambda = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \alpha_i \lambda(C_{i,j} \cap X).$$

Or, sur le borélien $C_{i,j} \cap X$, on a $\alpha_i \leq \beta_j$ puisque $\phi_1 \leq \phi_2$, donc :

$$\int_X \phi_1 \, d\lambda \leq \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \beta_j \lambda(C_{i,j} \cap X) = \int_X \phi_2 \, d\lambda.$$

– La deuxième propriété se déduit de la première puisque :

$$X_1 \subseteq X_2 \quad \Rightarrow \quad \phi \mathbb{1}_{X_1} \leq \phi \mathbb{1}_{X_2}.$$

– Partant de la décomposition $\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$, il suffit de remarquer que :

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \lambda(E_i \cap (X_1 \cup X_2)) = \lambda(E_i \cap X_1) + \lambda(E_i \cap X_2).$$

– Cette propriété est claire même si $\lambda(X) = +\infty$, grâce à la convention $0 \times +\infty = 0$.

– Clair également.

– En reprenant les notations ci-dessus, on peut écrire :

$$\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_j) \mathbb{1}_{C_{i,j}},$$

d'où en intégrant :

$$\int_X (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) \, d\lambda = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_j) \lambda(C_{i,j} \cap X).$$

En séparant les deux termes de la somme, en sommant la première partie sur les indices i et la seconde sur les indices j, on obtient donc :

$$\int_X (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) \, d\lambda = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(A_i \cap X) + \beta \sum_{j=1}^{m} \beta_j \lambda(B_j \cap X) = \alpha \int_X \phi_1 \, d\lambda + \beta \int_X \phi_2 \, d\lambda.$$

■

Remarque. La fonction de Peano donne d'emblée un exemple de fonction Lebesgue intégrable non Riemann intégrable. Sur $X = [0, 1]$, $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ est simple, puisqu'elle ne prend que deux valeurs, et mesurable, puisque l'ensemble des rationnels de $[0, 1]$ est un borélien (union dénombrable de points, qui sont des boréliens) et que son complémentaire l'est aussi. Par ailleurs, un ensemble dénombrable de points est de mesure de Lebesgue nulle, donc par la propriété ci-dessus :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \, d\lambda = 0.$$

Ainsi cette fonction est intégrable d'intégrale nulle au sens de Lebesgue, alors qu'elle n'est pas Riemann intégrable.

3.3 Intégration des fonctions mesurables positives

Maintenant qu'on a défini l'intégrale pour les fonctions simples positives, on peut passer aux fonctions mesurables positives.

Définition 3.4 (Intégrale d'une fonction mesurable positive)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable positive. L'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ est par définition :

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi \, d\lambda \ : \ \phi \text{ simple, mesurable, positive et } \phi \leq f \right\}.$$

On dit que f est intégrable si $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda < +\infty$.

On définit de même l'intégrabilité d'une fonction mesurable positive sur un borélien X de $\mathbb{R}$.

Remarque. Une question naturelle est la suivante : étant donnée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mesurable positive, existe-t-il une suite de fonctions simples, mesurables, positives, inférieures à f et convergeant simplement vers f ? La réponse est oui. La preuve en est donnée par l'astucieuse construction suivante (voir figure 3.2) : pour $n \geq 1$, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n2^n - 1, n2^n\}$, notons

$$E_{n,i} = \left[\frac{i-1}{2^n} \leq f < \frac{i}{2^n} \right] \qquad F_n = [f \geq n].$$

Soit alors $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\phi_n = n \mathbb{1}_{F_n} + \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \mathbb{1}_{E_{n,i}}$$

Il est clair que, pour tout $n \geq 1$, la fonction ϕ_n est simple, mesurable, positive et inférieure à f. De plus, la suite (croissante) de fonctions $(\phi_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f.

Proposition 3.2 (Critère d'intégrabilité)
Soit f et g mesurables telles que $0 \leq f \leq g$, alors :

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda \leq +\infty.$$

En particulier, si g est intégrable, alors f l'est aussi.

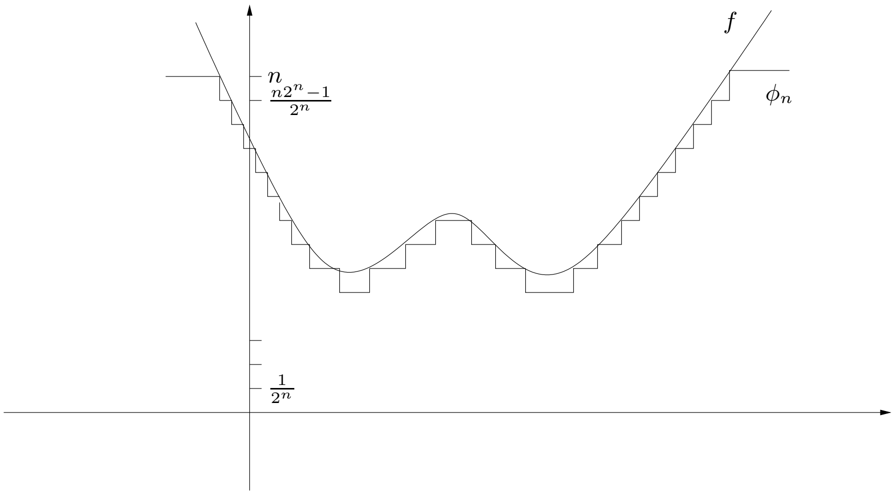

FIGURE 3.2 – La fonction ϕ_n.

Preuve. La positivité de l'intégrale de f ne fait pas de doute puisque pour toute fonction ϕ simple, mesurable et positive telle que $\phi \leq f$, il découle de la définition du paragraphe précédent que :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi \, d\lambda \geq 0.$$

La borne supérieure de telles quantités ne peut donc être que positive.
Maintenant, si ϕ est simple, mesurable, positive et inférieure à f, alors elle est aussi inférieure à g puisque $f \leq g$, donc

$$\int_{\mathbb{R}} \phi \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda,$$

et en prenant la borne supérieure sur de telles fonctions ϕ, on en déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda.$$

■

Exemple. Ainsi une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$. Par exemple, la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rl}]0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 + \sin \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

est mesurable (car continue), positive et majorée par 2 sur l'ensemble borné $]0, 1]$, donc elle est Lebesgue intégrable sur $]0, 1]$, d'intégrale inférieure à 2.

Théorème 3.1 (Convergence Monotone de Lebesgue)
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables positives telles que :*
(i) $0 \leq f_0 \leq f_1 \leq \dots$
(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda.$$

Preuve. f est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables. Par la proposition précédente, on a d'une part :

$$\int_{\mathbb{R}} f_0\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f_1\, d\lambda \leq \dots$$

et d'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda.$$

Donc on a existence de la limite des intégrales et majoration de celle-ci :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda.$$

Il reste à prouver l'inégalité inverse. Considérons une fonction simple, mesurable, positive ϕ inférieure à f :

$$\phi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}.$$

Soit $c \in]0,1[$ et considérons :

$$A_n = [c\phi \leq f_n] = \{x \in \mathbb{R}\ :\ c\phi(x) \leq f_n(x)\}.$$

Les A_n sont mesurables et puisque (f_n) est une suite croissante de fonctions de limite f, on a :

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \uparrow A_n.$$

L'inégalité $c\phi\mathbb{1}_{A_n} \leq f$ implique :

$$c\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda(E_i \cap A_n) = \int_{\mathbb{R}} c\phi\mathbb{1}_{A_n}\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda.$$

Mais par la continuité monotone croissante, on a pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda(E_i \cap A_n) = \lambda(E_i).$$

On en déduit que :

$$c\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda(E_i) = c\int_{\mathbb{R}} \phi\, d\lambda \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda.$$

Si on fait tendre c vers 1, on a donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi\, d\lambda \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda.$$

Il reste à prendre la borne supérieure sur l'ensemble des fonctions ϕ pour obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda.$$

■

Remarques.
- Ce résultat est encore appelé Théorème de Beppo Levi.
- La valeur commune ci-dessus est éventuellement $+\infty$, auquel cas la limite simple f des f_n n'est pas intégrable. Par exemple, prendre $f_n = \mathbb{1}_{[0,n]}$.

– Le résultat est encore valable si on se place sur un borélien X de $\mathbb{R}$.
– On peut donc passer la limite sous le signe somme avec la seule hypothèse de convergence simple des f_n, hypothèse moins forte que celles vues en chapitre 1 pour l'intégrale de Riemann (convergence uniforme et intervalle d'intégration borné).
– Le cadre d'application est typiquement le même que celui vu alors : en général, on sait calculer $f(x)$ et $\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda$, mais pas $\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda$. Le théorème permet donc de calculer la limite d'une suite dont on n'a pas d'expression analytique simple pour le terme général.

Exemple. Soit $f \geq 0$ mesurable, alors $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]}(1-x^n)f(x)\,d\lambda(x) = \int_{[0,1]} f\,d\lambda$.

Exercice. En considérant $f_n = \mathbb{1}_{[n,+\infty[}$, vérifier que le résultat n'est pas vrai si on considère une suite décroissante de fonctions. Quelle hypothèse pourrait-on ajouter dans ce cas pour que ça marche ?

Corollaire 3.1 (Beppo Levi pour les séries de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives, alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence monotone à la suite de fonctions mesurables positives $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

■

On retrouve alors naturellement pour l'intégrale des fonctions mesurables positives les propriétés vues pour l'intégrale des fonctions simples positives (cf. propriétés 3.2). On énonce maintenant un résultat d'usage surtout théorique : il servira notamment à prouver le théorème de convergence dominée de Lebesgue en section suivante.

Lemme 3.1 (Lemme de Fatou)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions boréliennes positives, alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_n f_n\,d\lambda \leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda.$$

Preuve. La fonction $\liminf_n f_n$ est la limite de la suite croissante de fonctions $(g_k)_{k\geq 0}$, avec :

$$g_k = \inf_{n\geq k} f_n.$$

Le théorème de convergence monotone assure donc que :

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_k\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \liminf_n f_n\,d\lambda.$$

Par ailleurs, on a $g_k \leq f_n$ pour tout $n \geq k$ donc par monotonie de l'intégration :

$$\forall n \geq k \qquad \int_{\mathbb{R}} g_k\,d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda,$$

d'où l'on déduit :

$$\int_{\mathbb{R}} g_k\,d\lambda \leq \inf_{n\geq k} \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda.$$

Et en faisant tendre k vers l'infini :

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_k\,d\lambda \leq \lim_{k\to+\infty} \left(\inf_{n\geq k} \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda\right) = \liminf_n \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda.$$

Et l'inégalité est prouvée.

■

Remarques.
– Quelle hypothèse ajouter pour avoir un résultat comparable sur les limites supérieures ?
– L'inégalité peut être stricte. Prendre par exemple $f_n = n\mathbb{1}_{]0,1/n]}$.
– Les fonctions f_n peuvent être intégrables sans que la fonction $\liminf_n f_n$ le soit. Prendre par exemple $f_n = \mathbb{1}_{[0,n]}$.

3.4 Intégration des fonctions de signe quelconque

On peut maintenant passer à l'intégration des fonctions de signe quelconque. On retrouve la séparation de f en parties positive et négative, vue au chapitre 1.

Définition 3.5 (Parties positive et négative)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, alors les fonctions f^+ et f^- définies par :

$$\begin{cases} f^+(x) & = \max(f(x), 0) \\ f^-(x) & = -\min(f(x), 0) \end{cases}$$

sont mesurables positives et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f^+(x) - f^-(x) \qquad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

Ces fonctions sont appelées partie positive et partie négative de f.

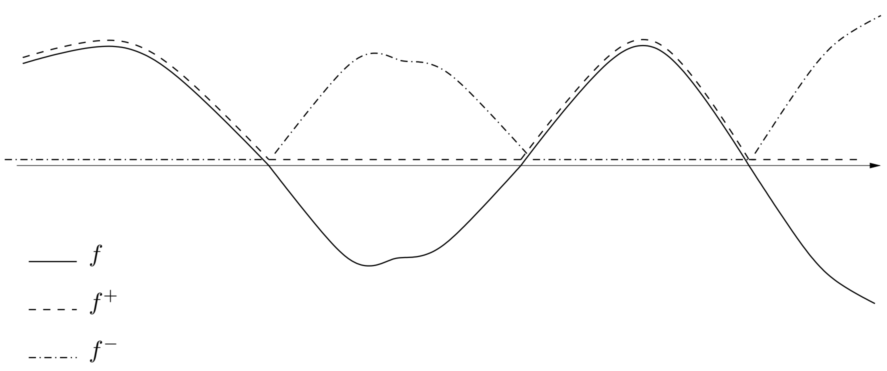

FIGURE 3.3 – Parties positive et négative d'une fonction.

Nota Bene. f^- est, comme f^+, une fonction **positive** (voir figure 3.3).

Définition 3.6 (Intégrale d'une fonction de signe quelconque)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est intégrable si f^+ et f^- le sont, son intégrale étant alors :

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f^+ \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f^- \, d\lambda.$$

On note $\mathcal{L}^1_{\mathcal{R}}$, ou plus simplement $\mathcal{L}^1$, l'ensemble des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.

Remarques.

– On remarque que f est intégrable si et seulement si $|f|$ l'est, auquel cas :

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f^+ \, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} f^- \, d\lambda.$$

Ceci laisse présager une différence entre intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann : nous préciserons ce point ultérieurement.

– Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on dira de la même façon que f est intégrable si ses parties réelle f_R et imaginaire f_I le sont, ce qui revient à dire que son module $|f|$ l'est. On a alors naturellement :

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f_R \, d\lambda + i \int_{\mathbb{R}} f_I \, d\lambda.$$

On peut maintenant donner les propriétés opératoires classiques de l'intégrale de Lebesgue.

Propriétés 3.3 (Propriétés de l'intégrale)
Soit f et g intégrables, α et β réels, X un borélien de $\mathbb{R}$.

– *Linéarité : $\alpha f + \beta g$ est intégrable, avec :*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\lambda = \alpha \int_X f \, d\lambda + \beta \int_X g \, d\lambda.$$

– *Positivité : si $f \leq g$, alors :*

$$\int_X f \, d\lambda \leq \int_X g \, d\lambda.$$

– *Positivité (bis) :*

$$\left| \int_X f \, d\lambda \right| \leq \int_X |f| \, d\lambda.$$

– *Cas de nullité : si $f = 0$ sur X ou si X est négligeable, alors :*

$$\int_X f \, d\lambda = 0.$$

Remarques.

– Le dernier point a pour corollaire : si N est un sous-ensemble négligeable de X, alors :

$$\int_X f \, d\lambda = \int_{X \setminus N} f \, d\lambda.$$

C'est-à-dire que, dans la théorie de Lebesgue, on ne change pas la valeur de l'intégrale d'une fonction en la modifiant sur un ensemble de mesure nulle : par exemple en un nombre au plus dénombrable de points (ensemble fini, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, etc.) ou même sur l'ensemble de Cantor K vu en exercice. Ceci est plus fort que le résultat vu dans le cadre de l'intégrale de Riemann, qui autorisait seulement la modification en un nombre fini de points.

– Une autre conséquence de ce dernier point : pour étudier l'intégrabilité de f et la valeur de son intégrale, f n'a pas besoin d'être définie en tout point de X, mais seulement presque partout (i.e. partout sauf sur un ensemble négligeable). Conséquence immédiate : pour appliquer le théorème de convergence monotone, on n'a pas besoin de la convergence simple des f_n vers f en tout point, mais seulement presque partout.

Le résultat qui suit est sans aucun doute le plus puissant de la théorie de l'intégration de Lebesgue.

Théorème 3.2 (Convergence dominée de Lebesgue)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur un borélien X de $\mathbb{R}$. On suppose :
(i) $\forall x \in X,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$;
(ii) Il existe une fonction g intégrable telle que : $\forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq g(x)$.
Alors f est intégrable et :

$$\int_X f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\lambda.$$

Preuve. On considère la suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$h_n = 2g - |f - f_n|.$$

Par hypothèse, les h_n sont mesurables positives, donc on peut appliquer le lemme de Fatou :

$$\int_X \liminf_n h_n\, d\lambda \leq \liminf_n \int_X h_n\, d\lambda.$$

Mais par linéarité de l'intégration et par interversion limite sup/ limite inf :

$$\liminf_n \int_X h_n\, d\lambda = 2\int_X g\, d\lambda - \limsup_n \int_X |f - f_n|\, d\lambda.$$

Par ailleurs, puisque la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f, la suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $2g$, donc :

$$\liminf_n h_n = 2g.$$

On a ainsi obtenu :

$$2\int_X g\, d\lambda \leq 2\int_X g\, d\lambda - \limsup_n \int_X |f - f_n|\, d\lambda,$$

donc :

$$\limsup_n \int_X |f - f_n|\, d\lambda = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\int_X |f - f_n|\, d\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par la propriété de positivité (bis), on en déduit bien que :

$$\int_X f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\lambda.$$

■

Remarques.
– Plus précisément, on a prouvé la convergence dans $\mathcal{L}^1$ de (f_n) vers f :

$$\int_X |f - f_n|\, d\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

– On peut établir une version "presque partout" de ce théorème : s'il y a convergence presque partout des f_n vers f et s'il existe une fonction g intégrable qui domine les f_n presque partout, alors on peut intervertir limite et intégrale.

Exercice. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,1]} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) d\lambda = 0.$$

3.5 Lien avec l'intégrale de Riemann

Soit a et b deux réels, avec $a < b$, on note comme précédemment $\mathcal{R}_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$ et $\mathcal{L}^1_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions Lebesgue intégrables sur ce segment.

Théorème 3.3 (Riemann intégrabilité sur un segment ⇒ Lebesgue intégrabilité)
Si f est Riemann intégrable sur $[a, b]$, alors f est Lebesgue intégrable sur $[a, b]$ et les intégrales ont même valeur :

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Preuve. Nous admettons que si $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, alors f est continue sauf sur un ensemble négligeable $N \subset [a, b]$. Par conséquent f est mesurable, donc intégrable au sens de Lebesgue puisqu'elle est bornée (par hypothèse de Riemann intégrabilité). Par ailleurs, si f est une fonction en escalier, le résultat est clair. Dans le cas général, on sait qu'il existe deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ et $(\psi_n)_{n\geq 0}$ telles que : $\forall n \geq 0$, $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x) \, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Par monotonie de l'intégration, on a $\forall n \geq 0$:

$$\int_{[a,b]} \varphi_n \, d\lambda \leq \int_{[a,b]} f \, d\lambda \leq \int_{[a,b]} \psi_n \, d\lambda.$$

Mais puisque les intégrales au sens de Lebesgue et de Riemann coïncident pour les fonctions en escalier, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x) \, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda,$$

et par conséquent :

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx.$$

■

Remarque. La réciproque est fausse, comme on l'a vu avec la fonction de Peano.

L'intérêt de ce résultat est clair : pouvoir appliquer à de telles intégrales à la fois les résultats de Lebesgue (théorèmes de convergence monotone, dominée, etc.) et de Riemann (lien intégrale/primitive, intégration par parties, changement de variable, etc.).

On s'intéresse maintenant au cas des intégrales généralisées, c'est-à-dire aux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$, avec I intervalle non nécessairement fermé, non nécessairement borné.

Théorème 3.4 (Riemann absolue convergence ⇒ Lebesgue intégrabilité)
Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente sur I, alors f est aussi Lebesgue intégrable sur I et les valeurs coïncident :

$$\int_I f \, d\lambda = \int_I f(x) \, dx.$$

Preuve. On suppose $I = [0, +\infty[$, les autres cas se traitant de la même façon. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$f_n = |f|\mathbb{1}_{[0,n]}.$$

Puisque $|f| \in \mathcal{R}_{[0,n]}$, $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, convergeant simplement vers $|f|$. Par conséquent $|f|$ est mesurable et par le théorème de convergence monotone :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n \, d\lambda = \int_I |f| \, d\lambda.$$

Or d'après le résultat précédent :

$$\int_I f_n \, d\lambda = \int_0^n f_n(x) \, dx,$$

et par définition de l'intégrale de Riemann généralisée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n |f(x)| \, dx = \int_0^{+\infty} |f(x)| \, dx.$$

On en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} |f(x)| \, dx = \int_I |f| \, d\lambda.$$

Considérons maintenant la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$g_n = f\mathbb{1}_{[0,n]}.$$

$(g_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions mesurables convergeant simplement vers f, dominées par la fonction intégrable $|f|$, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I g_n \, d\lambda = \int_I f \, d\lambda.$$

Mais, d'après le théorème précédent, on sait que pour tout $n \geq 0$:

$$\int_I g_n \, d\lambda = \int_0^n f(x) \, dx,$$

et par définition de l'intégrale de Riemann généralisée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x) \, dx = \int_0^{+\infty} f(x) \, dx.$$

On en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx = \int_I f \, d\lambda.$$

$\blacksquare$

A retenir ! En résumé, les seules fonctions Riemann intégrables non Lebesgue intégrables sont celles dont l'intégrale sur I est semi-convergente. Un exemple typique est la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Notation. Etant donné que les intégrales de Riemann et de Lebesgue sont égales dans la plupart des cas, on convient d'adopter dorénavant la notation usuelle $\int_a^b f(x) \, dx$ pour les intégrales de Lebesgue.

3.6 Applications

3.6.1 Le problème des primitives

Dans ce qui suit, $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.5 (Primitive d'une fonction bornée $\Rightarrow$ formule fondamentale)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction ***bornée*** *ayant une primitive F sur $[a, b]$. Alors f est Lebesgue intégrable sur $[a, b]$ et :*

$$\forall x \in [a, b] \qquad \int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a).$$

Preuve. F est continue sur $[a, b]$ (car dérivable), donc mesurable. Les fonctions $(f_n)_{n>0}$ définies par :

$$f_n(t) = n\left(F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)\right)$$

sont donc elles aussi mesurables, et convergent simplement vers f par définition de la dérivée. On en déduit que f est mesurable.
D'autre part, pour tout $n > 0$, le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction dérivable F assure de l'existence de $\theta_n \in]0, 1[$ tel que :

$$f_n(t) = n\left(F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)\right) = f\left(t + \frac{\theta_n}{n}\right).$$

Puisque f est bornée, on en déduit que :

$$\forall n > 0,\ \forall t \in [a, b] \qquad |f_n(t)| \leq ||f||_\infty,$$

avec $||f||_\infty \in \mathcal{L}^1_{[a,b]}$, puisque $[a, b]$ est un intervalle borné. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée sur $[a, b]$, donc aussi sur $[a, x]$ avec $x \in [a, b]$:

$$\int_a^x f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)\, dt = n \int_a^x \left(F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)\right) dt.$$

Or F est continue donc on peut appliquer successivement un changement de variable et la relation de Chasles, ce qui donne :

$$\int_a^x f_n(t)\, dt = n\left(\int_x^{x+\frac{1}{n}} F(t)\, dt - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t)\, dt\right).$$

Il reste à appliquer le théorème de la moyenne à la fonction continue F : il existe des réels $\theta'_n \in [0, 1]$ et $\theta''_n \in [0, 1]$ tels que

$$\int_a^x f_n(t)\, dt = F\left(x + \frac{\theta'_n}{n}\right) - F\left(a + \frac{\theta''_n}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x) - F(a).$$

On a donc bien établi :

$$\forall x \in [a, b] \qquad \int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a).$$

■

Remarques.
- On peut noter qu'en général, $\int_a^x f(t)\, dt$ n'est pas une intégrale de Riemann.
- L'escalier du diable est un exemple de fonction continue croissante de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$, dérivable presque partout (i.e. partout sauf sur un ensemble négligeable), de dérivée intégrable, mais sans qu'on ait $\int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0)$ (voir exercice).

3.6.2 Fonction définie par une intégrale

On considère dans tout ce paragraphe une fonction F définie par une intégrale de la forme :

$$F(t) = \int_X f(x,t)\,dx,$$

où X est un borélien de $\mathbb{R}$.

Cette écriture sous-entend que la fonction

$$\phi_t : \left\{ \begin{array}{ll} X & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x,t) \end{array} \right.$$

est intégrable au sens de Lebesgue sur X. L'étude d'une fonction définie par une intégrale commence donc par la détermination de l'ensemble T sur lequel F est définie (T est en général un intervalle).

Exemple : la fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1}\,dx.$$

Par les critères classiques de convergence des intégrales généralisées, cette intégrale de Riemann est absolument convergente pour tout réel t strictement positif : on peut donc la voir aussi comme une intégrale de Lebesgue. Le domaine de définition de Γ est donc $T = \mathbb{R}_+^*$. On montre aisément par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$. Ceci se voit sur la représentation donnée figure 3.4.

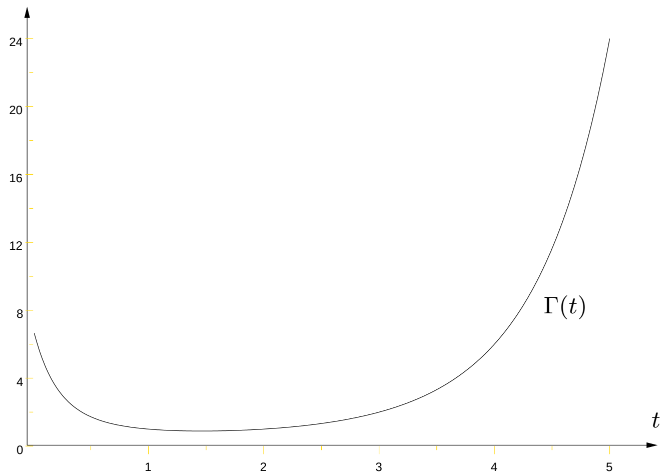

FIGURE 3.4 – Représentation de la fonction Γ.

Les résultats de continuité et de dérivabilité sous le signe somme s'énoncent très simplement dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. La condition essentielle est, comme dans le théorème de convergence dominée, l'hypothèse de domination.

Théorème 3.6 (Continuité)
Supposons vérifiées les conditions suivantes :
(i) $\forall x \in X$*, la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est continue sur* T *;*
(ii) il existe une fonction g *dans* $\mathcal{L}^1_X$ *telle que :* $\forall t \in T$*,* $\forall x \in X$*,* $|f(x,t)| \leq g(x)$*.*
Alors F *est continue sur* T*.*

Preuve. Soit $t_0 \in T$ et $(t_n)_{n>0}$ une suite de points de T tendant vers t_0. Alors, par l'hypothèse (i), la suite de fonctions $(h_n)_{n>0}$ définies sur X par :

$$h_n(x) = f(x, t_n)$$

converge simplement vers la fonction h définie sur X par :

$$h(x) = h(x, t_0).$$

De plus, par l'hypothèse (ii), les fonctions h_n sont dominées par la fonction intégrable g. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X h_n(x)\,dx = \int_X h(x)\,dx,$$

ce qui exactement dire que :

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = F(t_0),$$

c'est-à-dire que F est continue en t_0. Ceci étant vrai pour tout $t_0 \in T$, F est continue sur T.

■

Remarques.
– On peut donner une version "presque partout" de ce résultat : il suffit de remplacer dans (i) et (ii) "$\forall x \in X$" par "pour presque tout $x \in X$".
– Ce résultat peut se voir comme un passage à la limite sous le signe somme puisqu'il ne dit rien de plus que :

$$\lim_{t\to t_0} \int_X f(x,t)\,dx = \int_X f(x,t_0)\,dx = \int_X \left(\lim_{t\to t_0} f(x,t)\right)\,dx.$$

– L'hypothèse (ii), dite de domination, est bien entendu la plus difficile à vérifier. Cependant, il ne faut pas oublier que la continuité est une propriété locale : F est continue sur T si elle est continue en tout point t_0 de T. Donc pour montrer la continuité sur T, il suffit, en tout point t_0 de T, de trouver un intervalle T_0 contenant t_0 et contenu dans T sur lequel on peut appliquer le théorème. On illustre ceci sur l'exemple de la fonction Γ.

Exemple : Continuité de la fonction Gamma sur $\mathbb{R}_+^*$
L'hypothèse (i) est clairement vérifiée. Par contre, on ne peut trouver de fonction g intégrable sur $]0,+\infty[$ telle que :

$$\forall x > 0, \forall t > 0 \qquad\qquad e^{-x}x^{t-1} \leq g(x).$$

Mais pour montrer la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$, il suffit de la montrer sur tout intervalle $[\varepsilon, M]$, où $0 < \varepsilon < M < +\infty$. Or on a cette fois :

$$\forall x > 0,\ \forall t \in [\varepsilon, M] \qquad\qquad e^{-x}x^{t-1} \leq g(x) = e^{-x}\left(x^{\varepsilon-1} + x^{M-1}\right),$$

et sur $]0,+\infty[$, l'intégrale de Riemann de g est absolument convergente par les arguments classiques, donc $g \in \mathcal{L}^1_{]0,+\infty[}$ et le théorème s'applique.

Théorème 3.7 (Dérivation sous le signe somme)
Supposons vérifiées les conditions suivantes :
(i) $\forall t \in T$, $\forall x \in X$, *la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est dérivable par rapport à* t *;*
(ii) il existe une fonction g *dans* $\mathcal{L}^1_X$ *telle que :* $\forall t \in T, \forall x \in X,\ \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$.
Alors F *est dérivable sur* T*, de dérivée :*

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Preuve. Soit $t_0 \in T$ et $(t_n)_{n>0}$ une suite de points de T tendant vers t_0. Alors, par l'hypothèse (i), la suite de fonctions $(h_n)_{n>0}$ définies sur X par :

$$h_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}$$

converge simplement vers la fonction h définie sur X par :

$$h(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0).$$

De plus, par l'hypothèse (ii), les fonctions h_n sont dominées par la fonction intégrable g. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X h_n(x)\,dx = \int_X h(x)\,dx,$$

ce qui est exactement dire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,dx,$$

c'est-à-dire que F est dérivable en t_0, de dérivée :

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,dx.$$

Ceci étant vrai pour tout $t_0 \in T$, F est dérivable sur T.

■

Les remarques faites à propos du résultat de continuité sous le signe somme sont encore valables ici. Poursuivons l'étude de la fonction Γ.

Exemple : Dérivabilité de la fonction Gamma sur $\mathbb{R}_+^*$
L'hypothèse (i) est vérifiée, avec :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = e^{-x}x^{t-1}\ln x.$$

Comme précédemment, on ne peut trouver de fonction g valable pour tout $t > 0$. On se ramène donc encore à $t \in [\varepsilon, M]$. Cette fois :

$$\forall x > 0,\ \forall t \in [\varepsilon, M] \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x) = e^{-x}|\ln x|\left(x^{\varepsilon-1} + x^{M-1}\right),$$

et g est absolument intégrable sur $]0,+\infty[$ (pas de problème en $+\infty$ grâce à l'exponentielle ; en 0, on peut comparer aux intégrales de Bertrand). Ainsi la fonction Γ est dérivable sur tout $[\varepsilon, M]$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad \Gamma'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\ln x\,dx.$$

La représentation de la dérivée de la fonction Gamma est donnée figure 3.5.

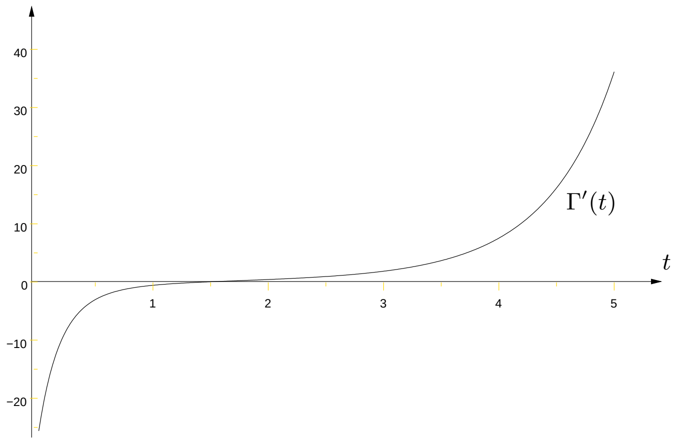

FIGURE 3.5 – Représentation de la fonction Γ'.

3.6.3 Séries numériques

Une suite numérique peut être vue comme une application

$$u : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \to \mathbb{R} \\ m & \mapsto u_m \end{array} \right.$$

Si on munit $\mathbb{N}$ de la tribu complète $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}$, toute suite est une application mesurable de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Si on munit $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de la mesure de comptage μ, la théorie de l'intégrale de Lebesgue vue ci-dessus se traduit sans problème. L'intégrale d'une fonction correspond alors à la somme d'une série. Formellement, ceci s'écrit :

$$\int_{\mathbb{N}} u \, d\mu = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m.$$

En ce sens, une suite (u_m) est intégrable si la série $\sum u_m$ est absolument convergente, c'est-à-dire si :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |u_m| < +\infty.$$

On note très logiquement :

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{N}} = \{(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \ : \ \sum_{m=0}^{+\infty} |u_m| < +\infty\}$$

l'ensemble des suites "intégrables" ou "sommables". Par rapport aux séries numériques vues en deuxième année, on exclut donc de notre étude les séries semi-convergentes. De même que dans le lien Riemann/Lebesgue, on excluait les intégrales généralisées semi-convergentes.

Exemple. Le cas typique de suite non intégrable alors que la série est convergente est donné par :

$$\forall m \geq 1 \qquad u_m = \frac{(-1)^m}{m},$$

puisque :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m} = -\ln 2,$$

tandis que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^m}{m} \right| = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} = +\infty.$$

Autrement dit, la série harmonique alternée est l'exemple typique de série semi-convergente.

On peut alors traduire les principaux théorèmes rencontrés précédemment. Une suite de fonctions $(f_n(x))$ devient dans ce cadre une suite de suites $(u_n(m))$, encore appelée suite double et notée $(u_{n,m})$.

Théorème 3.8 (Convergence monotone pour les suites)
Soit $(u_{n,m})$ une suite double à termes positifs telle que :
(i) $\forall m \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{0,m} \leq u_{1,m} \leq \dots$
(ii) $\forall m \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} u_{n,m} = v_m$.
Alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} v_m,$$

ces deux quantités valant éventuellement $+\infty$.

Exemple. Calculer $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{3^m}(1 - \frac{1}{nm})$.

Le résultat de Beppo Levi pour les séries de fonctions est alors connu sous le nom de petit théorème de Fubini-Tonelli.

Corollaire 3.2 (Petit théorème de Fubini-Tonelli)
Soit $(u_{n,m})$ une suite double à termes positifs, alors l'ordre de sommation n'importe pas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m},$$

ces deux quantités valant éventuellement $+\infty$. On note $\sum_{n,m=0}^{+\infty} u_{n,m}$ cette quantité.

Exemple. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2m^2}$.

Théorème 3.9 (Convergence dominée pour les suites)
Soit $(u_{n,m})$ une suite double telle que :
(i) $\forall m \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} u_{n,m} = v_m$;
(ii) il existe une suite $(w_m) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall (n,m) \in \mathbb{N}$, $|u_{n,m}| \leq w_m$.
Alors $(v_m) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{N}}$ et on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} v_m,$$

ces deux quantités valant éventuellement $+\infty$.

Exemple. Calculer $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\sin(m/n)}{2^m}$.

Voyons ce que deviennent les résultats de continuité et de dérivabilité sous le signe somme. Une "intégrale dépendant d'un paramètre" est cette fois la somme d'une série de fonctions :

$$F(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}u_m(t).$$

On suppose F définie sur l'intervalle T, c'est-à-dire que :

$$\forall t\in T \qquad \sum_{m=0}^{+\infty}|u_m(t)|<+\infty.$$

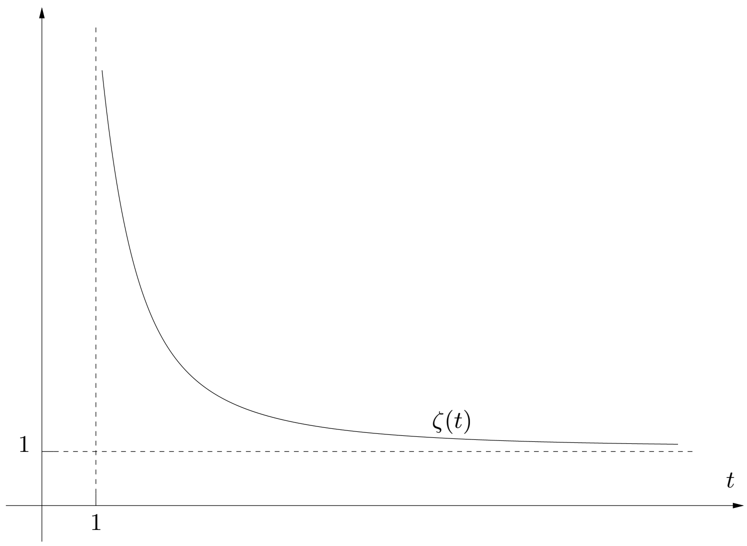

Figure 3.6 – Représentation de la fonction Zeta de Riemann.

Exemple. La fonction Zeta de Riemann
On considère la série de fonctions à termes positifs :

$$\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^t}.$$

D'après le critère des séries de Riemann, il y a convergence pour tout $t>1$. On appelle fonction Zeta de Riemann la fonction somme, définie sur $T=]1,+\infty[$ par :

$$\zeta(t)=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^t}.$$

On peut alors traduire les résultats vus précédemment.

Théorème 3.10 (Continuité)
Supposons vérifiées les conditions suivantes :
(i) $\forall m\in\mathbb{N}$*, la fonction* $t\mapsto u_m(t)$ *est continue sur* T *;*
(ii) il existe une suite $(w_m)_{m\geq 0}$ *telle que :* $\forall t\in T,\forall m\in\mathbb{N},\ |u_m(t)|\leq w_m$ *et* $\sum_{m=0}^{+\infty}w_m<+\infty$.
Alors F *est continue sur* T.

Remarque. Ce résultat a en fait été vu en deuxième année : c'est la continuité d'une série de fonctions normalement convergente.

Exemple. Continuité de la fonction Zeta de Riemann sur $]1, +\infty[$
Le point (i) est clair. Par contre, comme dans le cas des intégrales, c'est l'hypothèse de domination qui pose souvent problème. Ici, en particulier, on ne peut trouver de série numérique convergente qui domine $\frac{1}{m^t}$ pour tout $t > 1$. On s'en sort en prouvant que la fonction est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$. En effet, on a alors :

$$\forall t > 1, \forall m \geq 1 \qquad \left|\frac{1}{m^t}\right| \leq \frac{1}{m^a},$$

et par le critère de Riemann, la série numérique $\sum_{m\geq 1} \frac{1}{m^a}$ est convergente. On peut donc appliquer le théorème de continuité sur $[a, +\infty[$. Soit alors $t_0 > 1$ et $a = \frac{1+t_0}{2}$: la fonction ζ est continue sur $[a, +\infty[$, donc en t_0. Ceci étant vrai pour tout $t_0 > 1$, ζ est continue sur $]1, +\infty[$, comme on peut le voir figure 3.6.

Théorème 3.11 (Dérivation sous le signe somme)
Supposons vérifiées les conditions suivantes :
(i) $\forall m \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto u_m(t)$ est dérivable sur T ;
(ii) il existe une suite $(w_m)_{n\geq 0}$ telle que : $\forall t \in T, \forall m \in \mathbb{N},\ |u'_m(t)| \leq w_m$ et $\sum_{m=0}^{+\infty} w_m < +\infty$.
Alors F est dérivable sur T, de dérivée :

$$F'(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} u'_m(t).$$

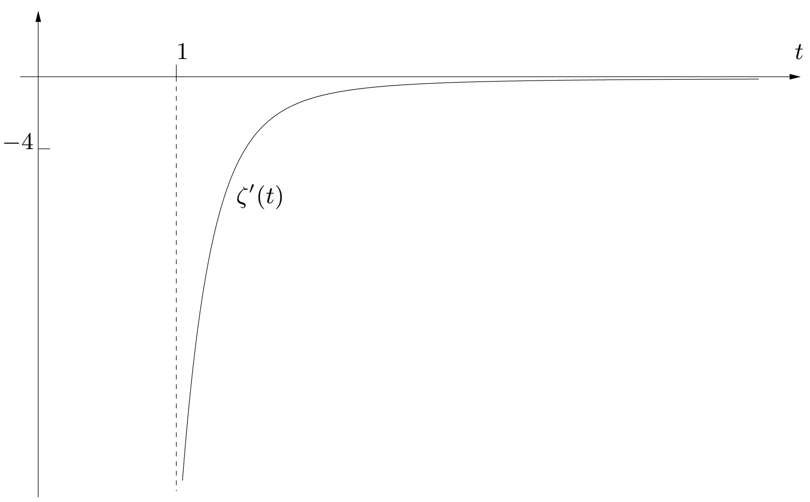

FIGURE 3.7 – Dérivée de la fonction Zeta de Riemann.

Exemple. Dérivation de la fonction Zeta de Riemann sur $]1, +\infty[$
Soit $a > 1$, ici le théorème s'applique sur $[a, +\infty[$:
(i) $\forall m \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{m^t}$ est dérivable sur $T =]1, +\infty[$;
(ii) $\forall t \geq a, \forall m \geq 1$, on a :

$$\left|\left(\frac{1}{m^t}\right)'\right| = \frac{\ln m}{m^t} \leq \frac{\ln m}{m^a},$$

avec $\sum_{m\geq 1}\frac{\ln m}{m^a}$ qui est une série de Bertrand convergente. Par le même raisonnement que pour la continuité, on en déduit que la fonction ζ est dérivable sur $]1,+\infty[$, de dérivée :

$$\zeta'(t) = -\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\ln m}{m^t}.$$

La représentation de ζ' est donnée figure 3.7.

3.6.4 Fondements des probabilités

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 3.7 (Variable aléatoire)
Une variable aléatoire réelle est une application $X:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$ mesurable.

Ceci signifie que :

$$\forall c\in\mathbb{R}\qquad [X<c]=X^{-1}(]-\infty,c[)=\{\omega\in\Omega\ :\ X(\omega)<c\}\in\mathcal{F}.$$

On ne s'étend pas sur ce sujet. On va plutôt s'intéresser au calcul effectif de quantités définies à partir de X. On reprend donc la discussion entamée au chapitre 2 sur les lois de probabilités.

Définition 3.8 (Loi d'une variable aléatoire)
Soit $X:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$ une variable aléatoire réelle. La loi de X est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ définie par :

$$\forall B\in\mathcal{B}\qquad \mathbb{P}_X(B)=\mathbb{P}(X\in B)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\ :\ X(\omega)\in B\}).$$

On a ainsi défini une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R},\mathcal{B})$. Or on a vu au chapitre 2 que celle-ci est complètement caractérisée par la fonction de répartition associée, objet bien plus maniable.

Définition 3.9 (Fonction de répartition d'une variable aléatoire)
Soit $X:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$ une variable aléatoire réelle. La fonction de répartition de X est la fonction $F_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad F_X(x)=\mathbb{P}(X\leq x).$$

Dans la suite, on note F au lieu de F_X. Bien entendu, F vérifie les trois propriétés déjà vues d'une fonction de répartition, à savoir : croissance, limites 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$, continuité à droite. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des discontinuités de F (on a vu que $\mathcal{D}$ est au plus dénombrable) et π la fonction de masse associée, c'est-à-dire que : $\pi(x)\neq 0 \leftrightarrow x\in\mathcal{D}$.

Définition 3.10 (Variable aléatoire discrète, variable aléatoire diffuse)
Soit $X:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$ une variable aléatoire réelle, F sa fonction de répartition. On dit que :
– X est diffuse si $\mathcal{D}=\emptyset$;
– X est discrète si $\sum_{x\in\mathcal{D}}\pi(x)=1$.

En clair, X est diffuse si sa fonction de répartition est continue, X est discrète si elle ne prend qu'un nombre au plus dénombrable de valeurs. Rappelons qu'une variable peut n'être ni discrète, ni diffuse.

Exemple : variable aléatoire mixte
Considérons la variable aléatoire X obtenue de la façon suivante : on fait un tirage à pile ou face (pièce non truquée) et :

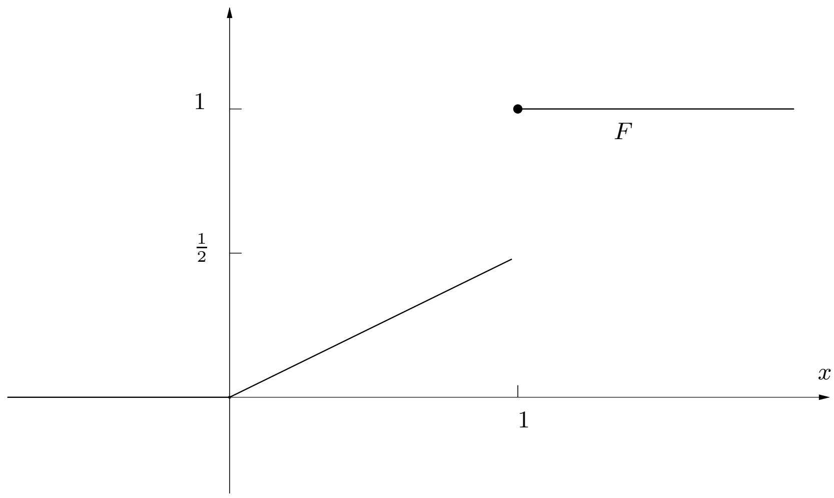

Figure 3.8 – Fonction de répartition d'une loi mixte.

– si on obtient pile, on décide que $X = 1$;
– si on obtient face, X est égal au résultat d'un tirage uniforme dans le segment $[0, 1]$.
La fonction de répartition de X est alors très facile à construire (voir figure 3.8) :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x/2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On voit que X n'est ni discrète ni diffuse. On a montré au chapitre 2 que la loi de X peut se décomposer en une partie discrète et une partie diffuse.

Parmi les variables aléatoires diffuses, celles que l'on rencontre usuellement sont les variables aléatoires absolument continues.

Définition 3.11 (Variable aléatoire absolument continue)
Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ une variable aléatoire réelle et F sa fonction de répartition. On dit que X est absolument continue, ou à densité, s'il existe une fonction réelle f telle que
– *$f \geq 0$;*
– *f est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$ avec $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$;*
– *Pour tout réel x : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.*
f est appelée densité de X.

Si X est absolument continue, on a donc pour tout borélien B de la droite réelle :

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(t)\,dt.$$

Il est clair que si X est absolument continue, elle est diffuse puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(X = x) = \int_x^x f(t)\,dt = 0.$$

Proposition 3.3 (Lien entre F et f)
Si X est absolument continue, de fonction de répartition F et de densité f, alors $F'(x) = f(x)$ en tout point x où f est continue.

Les variables aléatoires absolument continues sont souvent définies directement par leur densité : variables aléatoires uniformes, exponentielles, gaussiennes, de Cauchy etc.

Exemple. Une variable exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ a pour densité $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$. Sa fonction de répartition est donc :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = (1 - e^{-x})\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x),$$

et on voit que le seul point où F n'est pas dérivable est l'origine, point où f n'est pas continue (cf. figure 3.9).

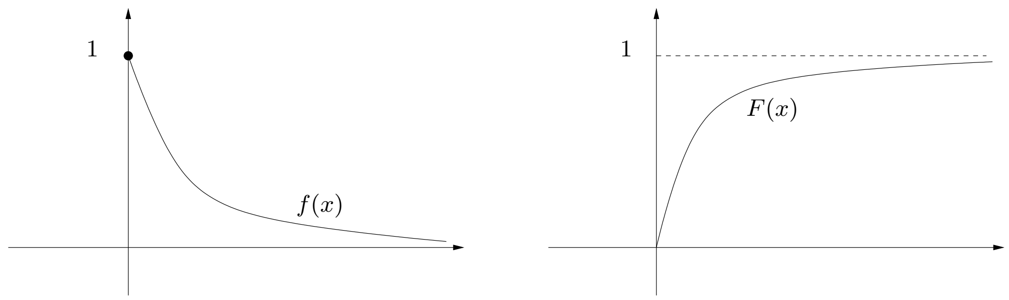

FIGURE 3.9 – Densité et fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

On montre cependant que les variables aléatoires absolument continues ne représentent pas le cas général des variables aléatoires diffuses, c'est-à-dire qu'il existe des variables aléatoires diffuses qui ne sont pas absolument continues ! Ces variables aléatoires sont appelées **singulières**. L'exemple typique est celui d'une variable correspondant à un tirage uniforme sur l'ensemble de Cantor : sa fonction de répartition est appelée fonction de Lebesgue ou escalier du diable (voir exercice).

Dans le cas général, on a le résultat suivant (admis) :

Théorème 3.12 (Décomposition de Lebesgue)
Soit F une fonction de répartition. Alors il existe trois fonctions de répartition F_1 discrète, F_2 absolument continue et F_3 singulière, trois réels positifs α_1, α_2 et α_3, avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ tels que :

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$$

Ceci signifie que toute fonction de répartition peut être représentée comme une combinaison linéaire convexe de fonctions de répartition des trois grands types. Cette représentation est unique si les α_i sont tous strictement positifs.

On a construit l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables $f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ en commençant par les fonction simples positives, puis en passant aux fonctions positives et enfin dans le cas général. Considérons maintenant une variable aléatoire réelle $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. On peut adopter exactement la même démarche pour définir l'intégrale d'une variable aléatoire par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$: on commence par les variables aléatoires simples positives, puis on passe aux variables aléatoires positives et enfin on passe au cas général. On dit que X est $\mathbb{P}$-intégrable, ou plus simplement intégrable, si :

$$\int_\Omega |X|\,d\mathbb{P} < +\infty.$$

On note de façon naturelle $\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, ou plus simplement $\mathcal{L}^1$, l'ensemble des variables aléatoires intégrables.

Définition 3.12 (Espérance d'une variable aléatoire)
Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ une variable aléatoire $\mathbb{P}$-intégrable. L'espérance de X est :

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}.$$

On note encore $\int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ ou $\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(\,d\omega)$ l'espérance de X. Lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$, on dit que X est centrée. On retrouve bien sûr toutes les propriétés classiques d'une intégrale : positivité, linéarité, théorèmes de convergence monotone, théorème de convergence dominée, etc.

Le problème vient de ce que l'expression définissant $\mathbb{E}[X]$ n'est pas vraiment explicite : en général, on connaît une variable aléatoire par sa loi et on aimerait donc calculer l'espérance via cette loi. C'est ce qui fait tout l'intérêt du théorème de transfert.

Théorème 3.13 (Théorème de transfert)
Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, alors sous réserve d'existence, on a :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_\Omega g(X)\, d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} g(x)\, dP_X(x).$$

Par l'expression "sous réserve d'existence", il faut comprendre : si l'une des deux quantités existe, l'autre aussi, auquel cas elles sont égales. Ce théorème permet donc de transformer le calcul d'une intégrale sur un espace probabilisé "abstrait" en un calcul d'intégrale sur $\mathbb{R}$. Il reste à préciser la mesure par rapport à laquelle on intègre dans les situations usuelles, ce "$dP_X(x)$", encore noté "$P_X(\,dx)$".

Corollaire 3.3 (Espérance d'une variable aléatoire discrète)
Si X prend les valeurs $(x_n)_{n\geq 0}$ avec les probabilités $(p_n)_{n\geq 0}$, alors :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{n=0}^{+\infty} g(x_n) p_n,$$

à condition que cette série soit absolument convergente. En particulier, si $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| p_n < +\infty$, l'espérance de X est bien définie et on a :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n p_n.$$

Remarque. L'espérance de X peut donc s'interpréter comme le centre d'inertie des points x_n de la droite réelle affectés des masses p_n : c'est une moyenne pondérée.

A partir d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, en notant $p_n = \mathbb{P}(X = n)$, on peut définir sa fonction génératrice par :

$$G_X(u) = \mathbb{E}\left[u^X\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n u^n.$$

C'est la somme d'une série entière de rayon au moins égale à 1. Elle admet donc des dérivées de tout ordre sur son intervalle ouvert de convergence, etc. On montre par exemple que G_X admet une dérivée à gauche en $u = 1$ si et seulement si $\mathbb{E}[X]$ existe, auquel cas : $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$.

Corollaire 3.4 (Espérance d'une variable aléatoire absolument continue)
Si la loi de X admet pour densité f, on a :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,dx,$$

à condition que cette intégrale soit absolument convergente. En particulier, l'espérance de X vaut :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx.$$

Le théorème de transfert est encore valable si g est à valeurs complexes. En particulier, à partir d'une variable aléatoire absolument continue, on définit sa fonction caractéristique par :

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)f(x)\,dx + i\int_{\mathbb{R}} \sin(tx)f(x)\,dx.$$

Les propriétés suivantes sont faciles à établir : Φ_X est définie et continue sur $\mathbb{R}$, son module est borné par 1, c'est une fonction hermitienne (i.e. $\Phi_X(-t) = \overline{\Phi_X(t)}$), elle est réelle et paire si la loi de X est symétrique, etc. On peut montrer que la connaissance de Φ_X permet de retrouver la loi de X : en d'autres termes, deux variables aléatoires ont même loi si et seulement si elles ont même fonction caractéristique, c'est-à-dire que la fonction caractéristique **caractérise** la loi d'une variable aléatoire. Via le théorème de Paul Lévy, elle joue un rôle essentiel dans les phénomènes de convergence en loi (typiquement, pour prouver le théorème central limite).

3.7 Exercices

Exercice 3.1 (Calculs de limites)
Déterminer les limites des intégrales suivantes lorsque n tend vers l'infini :

$\int_0^{\pi/2}(\cos x)^n\,dx$	$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+nx^2}\,dx$
$\int_{\mathbb{R}}(1-\frac{x}{n})\mathbb{1}_{[0,n]}(x)\,dx$	$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x/n)}{x}e^{-x}\,dx$
$\int_{\mathbb{R}} e^{1-(\cos x)^{2n}-\lvert x\rvert}\,dx$	$\int_{-1}^{1} e^{-nx^2}\,dx$
$\int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x}\,dx$	$\int_0^1 \left(\cos\frac{1}{x}\right)^n\,dx$

Exercice 3.2 (Problème d'interversion)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x > 0$, on considère :

$$f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}.$$

1. Soit $x > 0$ fixé. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-x})^n$. Prouver que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{e^x+1}.$$

2. Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u(1+u)}\, du$. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\, dx$.
3. Soit $n > 0$ fixé. Calculer $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} I_n$. Vérifier que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx \neq \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) dx.$$
Pourquoi le résultat de Beppo Levi sur les séries de fonctions ne s'applique-t-il pas ?
4. Soit $n > 0$ fixé. Déterminer le signe de $f_n(x)$ en fonction de x sur $]0, +\infty[$. En déduire $\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx$, puis :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx.$$

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2005.

Exercice 3.3 (Mémoire d'un massacre)
1. Préciser la limite suivante :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin x)^n\, dx.$$
2. Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n^2}} \cos\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}\, dx.$$
3. Calculer la somme suivante :
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n}\, dx.$$

Corrigé
Cet exercice a été consciencieusement saboté en avril 2004 par une génération d'étudiants désinvoltes et peu au fait des subtilités de l'intégration selon Lebesgue (voir annexe).

Exercice 3.4 (Fonction définie par une intégrale)
On définit la fonction F par :
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+x^2}\, dx.$$
1. Justifier l'existence de $F(t)$ pour tout réel t.
2. Vérifier que F est une fonction impaire. Déterminer $F(0)$ et $F(1)$.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que F est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Quel est le sens de variation de F ?
5. Pour $|t| \neq 1$, calculer $F'(t)$ grâce à une réduction en éléments simples. F est-elle dérivable en 0 ? Que valent $F'(1)$ et $F'(-1)$?
6. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} F(n)$. En déduire les limites de $F(t)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
7. Représenter la fonction F.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de juin 2004.

Exercice 3.5 (Théorèmes de convergence)
On rappelle que $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n}{1+x^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$
2. Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{nk^2+k+1}.$$
3. Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k}{k^2} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n.$$

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de juin 2004.

Exercice 3.6 (Autour de la convergence dominée)

1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n>0}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. Comparer $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$. Pourquoi ne peut-on appliquer le théorème de convergence dominée ?
3. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera. Comparer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ et $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Exercice 3.7 (L'escalier du diable)
On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,1]$ par la récurrence suivante : $\forall x \in [0,1]$, $f_0(x) = x$, et pour construire f_{n+1} à partir de f_n :
$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(3x)/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/3 \\ 1/2 & \text{si } 1/3 < x < 2/3 \\ 1/2 + f_n(3x-2)/2 & \text{si } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

On a représenté figure 3.10 les fonctions f_0, f_1 et f_2.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in [0,1]$: $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{3\cdot 2^n}$.
2. En introduisant une somme télescopique, montrer que :
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \forall x \in [0,1] \qquad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3\cdot 2^n}$$
3. Grâce au critère de Cauchy uniforme, en déduire que (f_n) est une suite de fonctions uniformément convergente. On note F la fonction limite.
4. Déterminer $F(0)$ et $F(1)$. Montrer que F est continue et croissante sur $[0,1]$. Ainsi F est une fonction de répartition.

5. Supposons qu'il existe une fonction f positive, Lebesgue intégrable et d'intégrale égale à 1 telle que pour tout réel x :
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$
Montrer qu'alors f est nulle presque partout et aboutir à une contradiction.

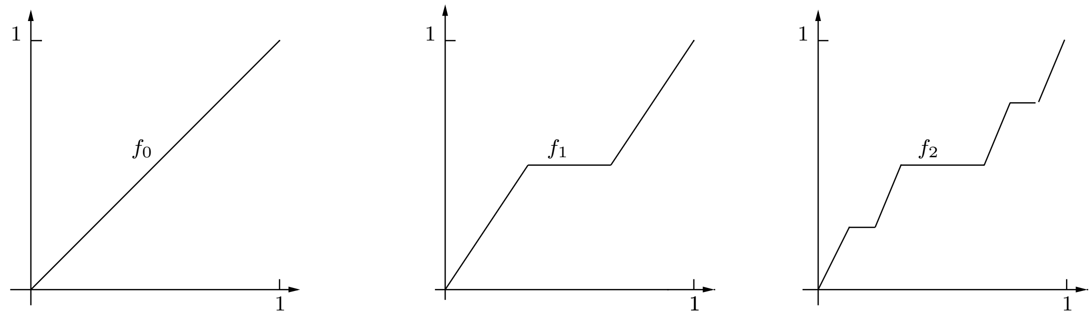

FIGURE 3.10 – Premières étapes pour la construction de l'escalier du diable.

Exercice 3.8 (Fonction définie par une intégrale)
On définit la fonction F par :
$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{x^2}+x^2\right)}\,dx = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dx.$$

1. Soit $t > 0$ fixé. Justifier l'existence de $F(t)$. Peut-on se contenter d'étudier F sur $[0, +\infty[$?
2. Déterminer $F(0)$ et $\lim_{n\to+\infty} F(n)$.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\forall u \geq 0 : u \leq e^u$. Soit alors $\alpha > 0$ fixé : en déduire que :
$$\forall x \geq 0, \forall t \geq \alpha \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
5. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner sa dérivée sous forme d'intégrale. Quel est le sens de variation de F sur $]0, +\infty[$?
6. Soit $t > 0$ fixé. A l'aide du changement de variable $u = \frac{t}{x}$, exprimer $F'(t)$ en fonction de $F(t)$. En déduire $F(t)$ pour $t > 0$.
7. Représenter F sur $\mathbb{R}$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2005.

Exercice 3.9 (Rubrique-à-brac)
1. Déterminer
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} 1_{[0,n]}(x)\,dx.$$
2. Trouver
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n}\,dx.$$

3. On considère la suite double $(u_{n,m})$ définie pour tout couple d'entiers naturels (n, m) par

$$u_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq m \leq n \\ \frac{1}{2^{n+m}} & \text{si } m \geq (n+1) \end{cases}$$

Soit $n \geq 0$ fixé : calculer $\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}$. En déduire la somme de la série double

$$\sum_{n,m=0}^{+\infty} u_{n,m}.$$

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2005.

Exercice 3.10 (Problème de natalité)
Supposons qu'à la naissance, la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est de $1/2$. Supposons encore que tout couple engendre jusqu'à obtention d'un garçon. Le but est de trouver la proportion de garçons dans ce modèle théorique.

1. Notons X le nombre d'enfants d'un couple. Donner la loi de la variable aléatoire X.
2. Soit P la proportion de garçons parmi les enfants d'un couple. Exprimer P en fonction de X.
3. En déduire que $\mathbb{E}[P] = \ln 2 \approx 0.69$ (on rappelle que pour tout $x \in [-1, 1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$).

Corrigé

1. X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on vérifie facilement que X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(1/2)$.
2. Puisqu'il y a exactement un garçon parmi les X enfants, $P = 1/X$.
3. Le calcul d'espérance s'écrit par le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[P] = \mathbb{E}[1/X] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1}{2^n}.$$

Rappelons le développement en série entière :

$$\forall x \in [-1, +1[\qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$

qu'il suffit d'appliquer ici en $x = 1/2$ pour obtenir $\mathbb{E}[P] = \ln 2 \approx 0.69$. Ainsi, à la génération suivante, il y a bien plus de garçons que de filles, ce qui n'est pas étonnant mais risque de poser très vite des problèmes de renouvellement de population.

Exercice 3.11 (Fonction caractéristique de la loi normale)
On considère l'intégrale dépendant d'un paramètre

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(tx)\, dx.$$

1. Domaine de définition de F ? Calculer $F(0)$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(t)$.
3. Exprimer $F'(t)$ en fonction de $F(t)$. Résoudre l'équation différentielle pour en déduire $F(t)$.

4. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi normale centrée réduite : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer sa fonction caractéristique :
$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}].$$

Exercice 3.12 (Suite d'intégrales)
Pour tout $n \geq 0$, on considère :
$$I_n = \int_0^1 \frac{1+x^n}{\sqrt{x}(1+x^{n+1})}\,dx.$$

1. Soit $n \geq 0$ fixé. Justifier le fait que l'intégrale est bien définie au sens de Riemann. En déduire qu'elle est bien définie au sens de Lebesgue.
2. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 2.$$
3. Prouver que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in [0,1]$:
$$\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}} - \frac{1+x^{n+1}}{1+x^{n+2}} \geq 0.$$
En déduire que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
4. Montrer que pour tout $n \geq 0$:
$$I_n - 2 = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{\sqrt{x}(1+x^{n+1})}\,dx.$$
5. Calculer pour tout $n \geq 0$:
$$\int_0^1 (x^{n-\frac{1}{2}} - x^{n+\frac{1}{2}})\,dx.$$
6. En déduire que pour tout $n \geq 0$:
$$0 \leq I_n - 2 \leq \frac{1}{n^2}.$$

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2006.

Exercice 3.13 (Fonction définie par une intégrale)
On définit la fonction F par :
$$F(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 f(x,t)\,dx.$$

1. Pour tout réel t, justifier l'existence de $F(t)$.
2. Déterminer $F(0)$ et $\lim_{n\to+\infty} F(n)$.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $M > 0$ fixé. Justifier l'inégalité :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [-M, M] \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq 2M.$$

5. En déduire que F est dérivable sur $[-M, M]$, puis sur $\mathbb{R}$ tout entier. Donner sa dérivée sous forme d'intégrale.
6. Quel est le signe de $F'(t)$ en fonction de t. Donner le tableau de variations de F, représenter F.
7. On considère maintenant la primitive de $u \mapsto e^{-u^2}$ qui s'annule en 0, c'est-à-dire la fonction G définie pour tout réel t par :
$$G(t) = \int_0^t e^{-u^2}\,du.$$
   (a) Montrer que pour tout réel t, on a : $F'(t) = -2G(t)G'(t)$.
   (b) En déduire que pour tout réel t : $G^2(t) = \frac{\pi}{4} - F(t)$.
   (c) Déterminer alors la valeur de l'intégrale :
$$I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du.$$

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2006.

Exercice 3.14 (Quelques limites)
1. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-m-\frac{m}{n}}.$$
2. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x)^2}\,dx.$$
3. Trouver
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx.$$
4. Préciser
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{m}{n^2} \sin\left(\frac{m}{n}\right).$$
5. Donner
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(k/n)}{2^k}$$
6. Valeur de
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\left(1 - \frac{1}{nk}\right)$$

Corrigé
Pour les quatre premières limites, cf. sujet de janvier 2006.

Exercice 3.15 (Janvier 2007)
1. Calculer :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx^3}{1+nx}\,dx.$$

2. Pour tout $n \geq 1$, on note :
$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\, dx.$$
   (a) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
   (b) Etablir l'égalité suivante :
$$\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\, dx = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} u^{\frac{1}{n}-1} e^{-u}\, du.$$
   (c) Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} u^{\frac{1}{n}-1} e^{-u}\, du = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = I,$$
   et en déduire un équivalent de I_n en fonction de I.
3. En vous servant par exemple de l'inégalité $\ln(1-x) \leq -x$ pour tout $x < 1$ (que l'on justifiera par un simple dessin), calculer :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \mathbb{1}_{\{1\leq m\leq n\}}.$$

Corrigé
Tout est dit dans le titre de l'exercice.

Exercice 3.16 (Fonction définie par une intégrale)
On définit la fonction F par :
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dx.$$

1. Vérifier que pour tout couple $(x,t) \in]0,+\infty[\times[1,+\infty[$, on a $f(x,t) \geq 0$.
2. Soit $t \geq 1$ fixé, déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x,t)$ en fonction de t.
3. Pour tout réel $t \geq 1$, justifier l'existence de $F(t)$.
4. Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$. Exprimer sa dérivée $F'(t)$ sous forme d'intégrale, puis calculer cette intégrale.
5. Que vaut $F(1)$? En déduire $F(t)$ pour tout réel $t \geq 1$.
6. Montrer que pour $0 < t \leq 1$, on a $F(1/t) = -F(t)$. En déduire l'expression générale de $F(t)$ pour tout réel t strictement positif.
7. On considère deux réels a et b strictement positifs et l'intégrale :
$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx.$$
   Montrer que $I(a,b) = \ln b - \ln a$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2007.

Exercice 3.17 (Lois de Laplace et de Cauchy)
On considère une variable aléatoire X qui suit une loi de Laplace, c'est-à-dire que X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de densité :
$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

1. Représenter f.
2. Calculer et représenter la fonction de répartition F.
3. Montrer que tout moment d'ordre impair est nul : $\mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0$ pour tout $n \geq 0$.
4. Pour $n \geq 1$, établir une relation de récurrence entre $\mathbb{E}[X^{2n}]$ et $\mathbb{E}[X^{2n-2}]$. En déduire que $\mathbb{E}[X^{2n}] = (2n)!$ pour tout $n \geq 0$.
5. La fonction caractéristique de X est la fonction Φ définie pour tout réel t par :
$$\Phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx.$$
   (a) Montrer que $\Phi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
   (b) Bonus : Grâce au lien entre dérivées successives de Φ en 0 et moments de la variable aléatoire, retrouver les résultats obtenus sur les moments de X (on pourra utiliser un développement en série entière de Φ).
6. Le théorème d'inversion dit que si la fonction caractéristique Φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors on peut retrouver la densité f à partir de Φ comme suit :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \Phi(t)\, dt.$$
   En déduire une expression de $e^{-|x|}$ sous forme d'intégrale.
7. On considère une variable aléatoire Y qui suit une loi de Cauchy, c'est-à-dire que Y est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de densité :
$$g(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$
   Déterminer la fonction caractéristique de Y.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2007.

Exercice 3.18 (Septembrisation quand tu nous tiens)
Pour $u \geq 0$, on pose :
$$F(u) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ut)}{t} e^{-t}\, dt.$$

1. Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $F'(u)$ sous forme d'intégrale.
2. Montrer que :
$$\forall u \geq 0 \qquad F'(u) = \frac{1}{1+u^2}.$$
3. Préciser $F(0)$. En déduire $F(u)$.

Annexe A

Annales

Université de Rennes 2
Licence MASS

Mardi 27 Avril 2004
durée : 1 heure

Contrôle de Mesure et Intégration

I. Mesure et aspect borné

On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ, c'est-à-dire l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ la suite d'ensembles de $\mathbb{R}$ définie par $A_n =]n, n+\frac{1}{2^n}[$.

1. Représenter A_0, A_1, A_2. Les A_n sont-ils boréliens ?
2. Soit $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Pourquoi A est-il borélien ? Déterminer alors $\lambda(A)$.
3. Un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il nécessairement borné ?

II. Théorèmes de convergence

1. Préciser la limite suivante :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin x)^n \, dx.$$
2. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n^2}} \cos \frac{x}{n}}{1+x^2} \, dx.$$
3. Calculer la somme suivante
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n} \, dx.$$

III. Fonction définie par une intégrale
On considère la fonction F définie par :

$$F(t) = \int_1^2 f(x,t)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x} e^{t^2 x}\,dx.$$

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Soit $M > 0$. Montrer que F est dérivable sur $[-M, M]$.
3. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $F'(t)$.

Université de Rennes 2
Licence MASS

Mardi 27 Avril 2004
durée : 1 heure

Corrigé du Contrôle

I. Mesure

1. On a $A_0 =]0,1[$, $A_1 =]1, \frac{3}{2}[$, $A_2 =]2, \frac{9}{4}[$. Les A_n sont boréliens, puisque ce sont des intervalles.
2. Soit $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. A est ouvert en tant qu'union d'ouverts, donc borélien. Puisque c'est une réunion dénombrable d'ensembles disjoints, on peut appliquer la propriété de σ-additivité :

$$\lambda(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Ceci est la somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$: on a donc $\lambda(A) = 2$.

3. Un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il nécessairement borné ? Non, comme le montre l'exemple précédent : A est borélien, de mesure finie égale à 2, mais clairement non borné.

II. Théorèmes de convergence

1. On vérifie sans problème que la suite de fonctions (f_n) à intégrer converge simplement vers la fonction nulle pour tout x n'appartenant pas à l'ensemble :

$$E = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N} \right\},$$

mais E est un ensemble dénombrable (i.e. en bijection avec $\mathbb{N}$), donc de mesure de Lebesgue nulle et par suite :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin x)^n \, dx = \int_{\mathbb{R}^+ \setminus E} e^{-x}(\sin x)^n \, dx.$$

Il suffit de vérifier l'hypothèse de domination pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée, or :

$$\forall x \geq 0 \qquad |e^{-x}(\sin x)^n| \leq e^{-x},$$

et $x \mapsto e^{-x}$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}^+$ en tant qu'intégrale de Riemann généralisée absolument convergente. On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin x)^n \, dx = \int_{\mathbb{R}^+ \setminus E} 0 \, dx = 0.$$

2. Cette fois la suite de fonctions (f_n) à intégrer converge simplement vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Par ailleurs cette fonction domine les f_n et est intégrable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n^2}} \cos \frac{x}{n}}{1+x^2} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \pi.$$

3) Les fonctions $x \mapsto \frac{x}{(1+x)^n}$ sont positives sur $[0,+\infty[$, donc on peut appliquer directement le théorème de convergence monotone pour les séries de fonctions positives (sans se soucier de la convergence !) :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^n}\,dx=\int_1^{+\infty}\left(\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^n}\right)\,dx,$$

or x étant un nombre positif fixé, on reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{1+x}\in]0,1[$:

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^n}=x\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^n}=x\frac{\frac{1}{(1+x)^3}}{1-\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Ainsi :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^n}\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{2}.$$

III. Fonction définie par une intégrale

1. Soit t réel fixé. La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}e^{t^2x}$ est continue sur $[1,2]$ donc Riemann intégrable sur ce segment, donc Lebesgue intégrable (on peut aussi dire qu'elle est continue, donc mesurable ; elle est de plus positive et majorée par la constante e^{2t^2} sur $[1,2]$, donc Lebesgue intégrable). Donc le domaine de définition de F est $T=\mathbb{R}$.
2. Soit $M>0$. On a bien :
   (i) $\forall x\in[1,2]$, la fonction $t\mapsto\frac{1}{x}e^{t^2x}$ est dérivable, avec :
   $$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=2te^{t^2x}.$$
   (ii) $\forall(t,x)\in[-M,M]\times[1,2]$, on a clairement :
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|=2|t|e^{t^2x}\leq 2Me^{M^2x}=g(x),$$
   avec $g\in\mathcal{L}^1_{[1,2]}$, puisque $g\in\mathcal{R}_{[1,2]}$.
   Donc F est dérivable sur $[-M,M]$.
3. Soit $t\in\mathbb{R}$ fixé : soit $M>0$ tel que $M>|t|$, alors F étant dérivable sur $[-M,M]$, elle est dérivable en t. Ceci étant vrai pour tout réel t, F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Par application du théorème de dérivation sous le signe somme, on a pour tout réel t :
   $$F'(t)=\int_1^2 2te^{t^2x}\,dx=\left[\frac{2}{t}e^{t^2x}\right]_1^2=\frac{2}{t}\left(e^{2t^2}-e^{t^2}\right).$$

Université de Rennes 2
Licence MASS

Jeudi 10 Juin 2004
durée : 2 heures

Examen de Mesure et Intégration

I. Fonction définie par une intégrale
On définit la fonction F par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\, dt.$$

1. Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout réel x. Vérifier que F est une fonction impaire.
2. Déterminer $F(0)$ et $F(1)$.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que F est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Quel est le sens de variation de F ?
5. Pour $|x| \neq 1$, calculer $F'(x)$ (on pourra effectuer une réduction en éléments simples). F est-elle dérivable en 0 ?
6. Déterminer
$$\lim_{n \to +\infty} F(n).$$
En déduire les limites de $F(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
7. Représenter la fonction F.

II. Intégrale multiple
On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto (x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}) \end{cases}$$

1. Pourquoi φ est-elle un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$? Application réciproque φ^{-1} ?
2. Soit $D = \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$. Représenter D.
3. Déterminer $\Delta = \varphi^{-1}(D)$, son image réciproque par φ. Représenter Δ.
4. Calculer l'intégrale suivante :
$$I = \iint_D \frac{3y}{\sqrt{1+(x+y)^3}}\, dx\, dy.$$

III. Calculs de limites
On rappelle que $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{n}{1+x^2}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\,dx$$
2. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{nk^2+k+1}$$
3. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n$$

IV. Formule de Stirling

Rappel : on dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec :
$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(X=m) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^m}{m!}$$

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson de paramètres λ et μ strictement positifs. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.
2. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Poisson de paramètre 1.
   (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $S_n = X_1 + \cdots + X_n$?
   (b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}(n \leq S_n < n+1)$.
3. Calculer la limite suivante :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2n}}\,dt.$$
4. On admet l'équivalent suivant lorsque n tend vers l'infini :
$$\mathbb{P}(n \leq S_n < n+1) \sim \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$
   Déduire des questions précédentes la formule de Stirling :
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Université de Rennes 2
Licence MASS

Jeudi 10 Juin 2004
durée : 2 heures

Corrigé de l'Examen

I. Fonction définie par une intégrale

On définit la fonction F par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\, dt.$$

1. Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ est mesurable car continue. La fonction arctan étant comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, on a de plus :

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} \right| dt \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{4} < +\infty$$

   $F(x)$ est une intégrale de Riemann absolument convergente, donc c'est une intégrale convergente au sens de Lebesgue. La fonction arctan étant impaire, on vérifie sans problème que F l'est aussi.

2. $F(0) = 0$ et :

$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\, dt = \left[\frac{1}{2} \arctan^2 t \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Pour montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, il suffit d'appliquer le théorème de continuité sous le signe somme :

   - pour tout réel positif t, l'application $x \mapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ est continue ;
   - pour tout réel x, on a la majoration $\left|\frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\right| \leq \frac{\pi}{2(1+t^2)}$, avec $t \mapsto \frac{\pi}{2(1+t^2)}$ Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$ (cf. 1).

4. Soit $\alpha > 0$ fixé, on a cette fois :

   - pour tout réel positif t, l'application $x \mapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$, de dérivée $\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$;
   - pour tout réel $x \geq \alpha$, on a la majoration :

$$\left| \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \right| \leq \frac{t}{(1+t^2)(1+\alpha^2t^2)}$$

   avec $t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)(1+\alpha^2t^2)}$ Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$, comme intégrale de Riemann généralisée absolument convergente (un équivalent en $+\infty$ est $\frac{1}{\alpha^2 t^3}$).

On en déduit que F est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par imparité, F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme :

$$\forall x \neq 0 \qquad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt.$$

On a clairement $F'(x) > 0$ pour tout x non nul, donc F est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Puisque F est continue en 0, elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Pour $|x| \neq 1$, on a :

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right),$$

d'où l'on déduit :

$$F'(x) = \frac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln\left(\frac{1+t^2}{1+x^2t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln|x|}{x^2-1},$$

si $x \neq 0$ et par suite :

$$\lim_{x\to 0} F'(x) = +\infty.$$

Ainsi F n'est pas dérivable en 0 : sa courbe admet une tangente verticale en ce point. Par contre, on remarque que :

$$\lim_{x\to 1} F'(x) = \lim_{x\to -1} F'(x) = \frac{1}{2} = F'(1) = F'(-1).$$

6. On applique le théorème de convergence dominée :

- pour tout réel positif t, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(nt)}{1+t^2} = \frac{\pi}{2(1+t^2)}$;
- pour tout entier n, $|\frac{\arctan(nt)}{1+t^2}| \leq \frac{\pi}{2(1+t^2)}$, avec $t \mapsto \frac{\pi}{2(1+t^2)}$ Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$.

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} F(n) = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

F étant croissante, il s'ensuit que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{n\to+\infty} F(n) = \frac{\pi^2}{4}$ et par imparité :

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\frac{\pi^2}{4}.$$

7. On peut alors donner la représentation de F (figure A.1).

II. Intégrale multiple

On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto (x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}) \end{cases}$$

1. φ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Des calculs élémentaires montrent que $(x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}) \leftrightarrow (u = x+y, v = x-y)$. Son application réciproque φ^{-1} est donc définie par

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (u = x+y, v = x-y) \end{cases}$$

φ^{-1} est donc également de classe $\mathcal{C}^1$ et φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Ceci peut aussi se justifier en remarquant que φ est une application linéaire de déterminant non nul.

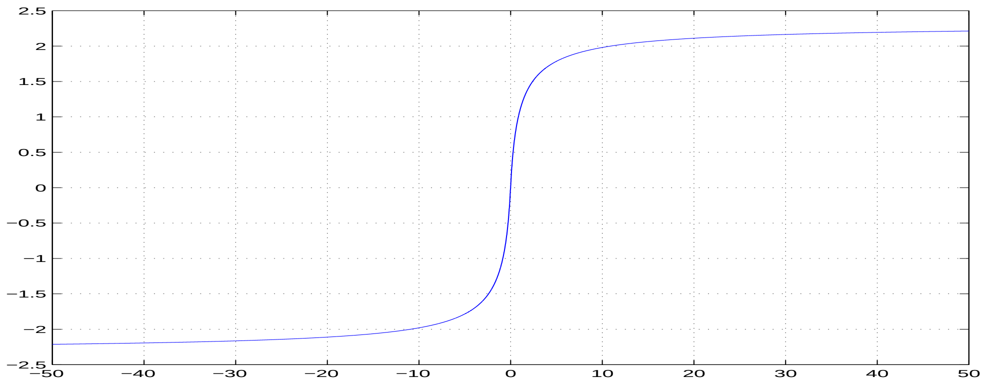

FIGURE A.1 – Représentation de la fonction F.

2. Le domaine $D = \{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$ est représenté figure $A.2$.
3. On obtient $\Delta = \{(u, v) \mid 0 < u < 1,\ -u < v < u\}$, représenté sur la même figure.
4. Pour calculer :

$$I = \iint_D \frac{3y}{\sqrt{1 + (x + y)^3}}\, dx\, dy,$$

on applique le changement de variables associé à φ. Il faut commencer par calculer sa matrice jacobienne, qui est constante et vaut :

$$J_\varphi(u, v) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

d'où $|\det J_\varphi(u, v)| = \frac{1}{2}$. On a donc :

$$I = \frac{3}{4} \iint_\Delta \frac{u - v}{\sqrt{1 + u^3}}\, du\, dv,$$

et tout étant positif, on applique le Théorème de Tonelli-Fubini :

$$I = \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + u^3}} \left(\int_{-u}^u (u - v)\, dv \right) du = \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + u^3}} \left[uv - \frac{v^2}{2} \right]_{-u}^u du = \int_0^1 \frac{3u^2}{2\sqrt{1 + u^3}}\, du,$$

et on reconnaît la dérivée de $\sqrt{1 + u^3}$, donc :

$$I = \left[\sqrt{1 + u^3} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

III. Calculs de limites

1. On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions mesurables

$$f_n : \begin{cases} [0, 1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{n}{1+x^2} \sin \frac{x}{n} \end{cases}$$

- convergence simple : pour $0 < x \leq 1$, on a $\sin \frac{x}{n} \sim \frac{x}{n}$ lorsque n tend vers l'infini, donc :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{1 + x^2} \sin \frac{x}{n} = \frac{x}{1 + x^2}.$$

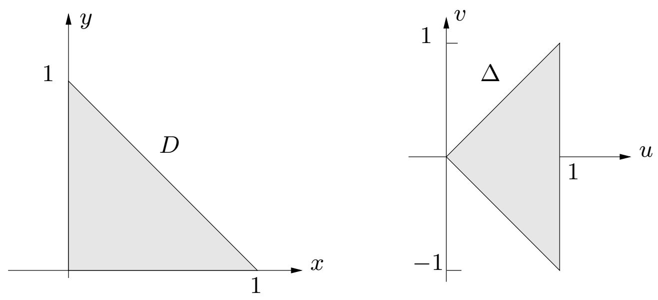

FIGURE A.2 – Domaines D et Δ.

Pour $x = 0$, ceci est encore vrai puisque, pour tout n, $f_n(0) = 0 = \frac{0}{1+0^2}$.
- domination : la fonction limite

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x}{1+x^2} \end{array} \right.$$

majore les f_n, puisque pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq \sin \frac{x}{n} \leq \frac{x}{n}$. Par ailleurs, la fonction f est intégrable sur $[0,1]$ et on a donc :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n}{1+x^2} \sin \frac{x}{n}\, dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

2. On applique cette fois le théorème de convergence monotone dans l'espace $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, où μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. La suite double

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \to \mathbb{R} \\ k & \mapsto \frac{n}{nk^2+k+1} \cdot \mathbb{1}_{1\leq k\leq n} = \frac{1}{k^2+k/n+1/n} \cdot \mathbb{1}_{1\leq k\leq n} \end{array} \right.$$

est positive croissante : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il est clair que :

$$0 \leq f_1(k) \leq \cdots \leq f_n(k) \leq f_{n+1}(k) \leq \ldots$$

et par ailleurs, $\lim_{n\to\infty} f_n(k) = \frac{1}{k^2}$. On a donc par le théorème de Beppo Levi :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{nk^2+k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Dans le même espace mesuré, on applique cette fois le théorème de convergence dominée à la suite double

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \to \mathbb{R} \\ k & \mapsto \frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n \end{array} \right.$$

qui converge simplement vers

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \to \mathbb{R} \\ k & \mapsto 0 \end{array} \right.$$

puisque pour tout k fixé, $0 < \frac{k}{k+1} < 1$, et $|\frac{\sin k}{k^2}| < 1$, donc la suite géométrique :

$$\left(\frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n\right)_{n>0}$$

tend vers zéro. Par ailleurs, pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, on a la majoration indépendante de n :

$$\left|\frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n\right| \leq \frac{1}{k^2},$$

avec la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ convergente. Donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

IV. Formule de Stirling

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson de paramètres λ et μ strictement positifs. La variable aléatoire $Z = X+Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sa loi est le produit de convolution des lois de X et Y, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(Z=n) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\lambda^k\mu^{n-k},$$

et la formule du binôme donne :

$$\mathbb{P}(Z=n) = e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

Ceci signifie que :

$$Z = X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu).$$

2. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Poisson de paramètre 1.
   (a) Par le point précédent, la variable aléatoire somme S_n suit une loi de Poisson de paramètre n.
   (b) Puisque S_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(n \leq S_n < n+1) = \mathbb{P}(S_n = n) = e^{-n}\cdot\frac{n^n}{n!}$$

3) Pour calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2n}}\,dt,$$

il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée :

- convergence simple : pour $0 < t \leq 1$, on a $\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{t^2}{2n}} = 1$;
- domination : pour $0 < t \leq 1$, pour tout $n > 0$, $0 \leq e^{-\frac{t^2}{2n}} \leq 1$. La fonction constante égale à 1 est bien sûr intégrable sur $[0,1]$.

Finalement, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2n}}\,dt = \int_0^1 1\,dt = 1.$$

3. On admet l'équivalent suivant lorsque n tend vers l'infini :

$$\mathbb{P}(n \leq S_n < n+1) \sim \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

On a donc par le changement de variable $t = \sqrt{n}x$:

$$\mathbb{P}(n \leq S_n < n+1) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2n}}\, dt,$$

donc par la question précédente :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n} \cdot \mathbb{P}(n \leq S_n < n+1) = 1,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n} e^{-n} \cdot \frac{n^n}{n!} = 1,$$

ce qui donne bien :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Université de Rennes 2
Licence MASS 3

Mardi 7 Décembre 2004
Durée : 1 heure

Contrôle de Mesure et Intégration

I. Loi géométrique

On considère sur $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ la mesure ν définie par :

$$\nu = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^n}\delta_n,$$

où δ_n est la mesure de Dirac au point n.

1. Vérifier que ν est une probabilité. Comment appelle-t-on une telle mesure de probabilité ?
2. Déterminer $\nu(]-\infty,1])$, $\nu(\{1\})$, $\nu(\{2\})$, $\nu([2,+\infty[)$.
3. On appelle F la fonction de répartition de ν. Représenter F sur l'intervalle $[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$.
4. On appelle fonction de survie associée à ν la fonction r définie sur $\mathbb{N}$ par $r(n)=\nu(]n,+\infty[)$. Vérifier que :
$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2 \qquad r(n+m)=r(n)r(m).$$

II. Loi de Cauchy

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{\pi(1+t^2)}$.

1. Exprimer plus simplement F.
2. Vérifier que F est une fonction de répartition. Esquisser sa représentation.
3. Que vaut $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|t|}{\pi(1+t^2)}\,dt$? Soit X une variable aléatoire admettant pour fonction de répartition F : qu'en conclure quant à son intégrabilité ?

III. Intégrale de Riemann

1. Déterminer les limites suivantes :
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6} \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2-4n^2}$$
2. Donner la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale suivante : $\int_0^{+\infty} x^2\sin\frac{1}{x^3}\,dx$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Justifier la convergence de l'intégrale $I_n=\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\,dx$. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire I_n.

Université de Rennes 2
Licence MASS 3

Mardi 7 Décembre 2004
Durée : 1 heure

Corrigé du Contrôle

I. Loi géométrique
On considère sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ la mesure ν définie par :

$$\nu = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^n} \delta_n,$$

où δ_n est la mesure de Dirac au point n.

1. Il suffit de vérifier que $\nu(\mathbb{R}) = 1$. Or :

$$\nu(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^n} \delta_n(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^n} = \frac{3/4}{1 - 1/4} = 1.$$

   Puisque le support de ν est l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels strictement positifs, ν est une mesure de probabilité discrète (c'est ce qu'on appelle une loi géométrique).
2. On trouve : $\nu(]-\infty, 1]) = 3/4$; $\nu(\{1\}) = 3/4$; $\nu(\{2\}) = 3/16$; $\nu([2, +\infty[) = 1 - \nu(]-\infty, 2[) = 1 - \nu(] - \infty, 1]) = 1/4$.
3. La représentation graphique de la fonction de répartition F de ν sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ est donnée figure $A.3$.

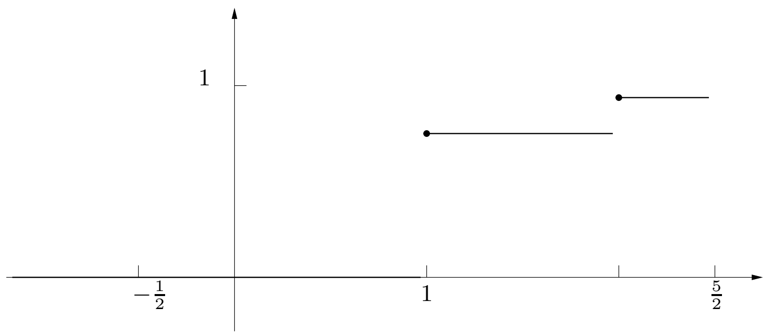

FIGURE A.3 – Fonction de répartition F de la loi de probabilité ν.

4. On appelle fonction de survie associée à ν la fonction r définie sur $\mathbb{N}$ par $r(n) = \nu(]n, +\infty[)$. Pour tout entier naturel m, on a :

$$r(m) = \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{3}{4^n} = \frac{\frac{3}{4^{m+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{4^m}.$$

On en déduit que pour tout couple d'entiers naturels $(n, m) \in \mathbb{N}^2$:

$$r(n+m) = \frac{3}{4^{n+m}} = \frac{3}{4^n} \cdot \frac{3}{4^m} = r(n)r(m).$$

II. Loi de Cauchy

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\pi(1+t^2)}$.

1. On a pour tout réel x :

$$F(x) = \left[\frac{1}{\pi}\arctan t\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x.$$

2. De par les propriétés de la fonction arctan, F est croissante, a pour limites 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$, est continue à droite, donc F est une fonction de répartition. Sa représentation se déduit sans problème de celle de la fonction arctan (voir figure $A.4$).

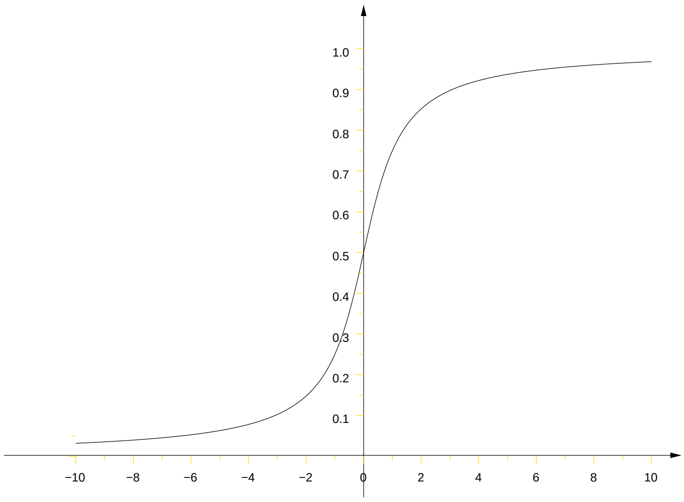

FIGURE A.4 – Fonction F.

3. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{\pi(1+t^2)}\,dt$ est doublement généralisée en $\pm\infty$, il convient donc de voir les deux problèmes séparément. En $+\infty$, on a :

$$\frac{|t|}{\pi(1+t^2)} \sim \frac{1}{\pi t},$$

or $\int^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente, donc il en va de même pour $\int^{+\infty} \frac{|t|}{\pi(1+t^2)}\,dt$. Si X une variable aléatoire admettant pour fonction de répartition F, on a donc $\mathbb{E}|X| = +\infty$. Ainsi X n'est pas intégrable et elle n'a pas d'espérance.

III. Intégrale de Riemann

1. Ce sont de braves sommes de Riemann. Pour la première :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + \cdots + n^5}{n^6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5,$$

et puisque la fonction $x \mapsto x^5$ est continue sur $[0, 1]$, elle y est Riemann intégrable, avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^5 + 2^5 + \cdots + n^5}{n^6} = \int_0^1 x^5\,dx = \frac{1}{6}.$$

Pour la seconde :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2-4n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k^2}{n^2}-4},$$

et puisque la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$$

est continue sur $[0,1]$, elle y est Riemann intégrable, avec :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2-4n^2} = \left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_0^1 = -\frac{\ln 3}{4}.$$

2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 \sin\frac{1}{x^3}\,dx$ est doublement généralisée. En $+\infty$, on a :

$$x^2 \sin\frac{1}{x^3} \sim \frac{1}{x},$$

or $\int^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ est divergente, donc l'intégrale en question est aussi divergente (pas besoin d'étude en 0).

3. L'intégrale est généralisée en $+\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a $\lim_{n\to\infty} x^{n+2}e^{-x} = 0$, c'est-à-dire qu'au voisinage de l'infini :

$$x^n e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or $\int^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est convergente, donc il en va de même pour I_n. On peut alors effectuer une intégration par parties :

$$I_n = [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx = nI_{n-1}.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n :

$$I_n = n! I_0 = n! \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = n!$$

Université de Rennes 2
Licence MASS 3

Janvier 2005
Durée : 2 heures

Examen de Mesure et Intégration

I. Mesure

Dans cet exercice, μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ vérifiant de plus les conditions :

(C_1) $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \mu(\{x\}) = 0$;
(C_2) Pour tous réels $a < b$: $\mu([a, b]) < +\infty$.

1. La mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ vérifie-t-elle ces deux conditions ? Et la mesure de Dirac δ_0 ?
2. Calculer $\lim_{n\to\infty} \mu(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[)$. Montrer que $\mu(\mathbb{Q}) = 0$.
3. Soit A ensemble Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}$ (i.e. $A \in \mathcal{L}$). On définit la fonction f_A comme suit
$$f_A : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to [0, +\infty[\\ x & \mapsto f_A(x) = \mu(A \cap [-|x|, |x|]) \end{array} \right.$$
Pourquoi la fonction f_A est-elle bien définie ? Montrer que f_A est paire. Montrer que f_A est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Que vaut $f_A(x)$ lorsque $A = \mathbb{Q}$?
4. On suppose dans cette question que $\mu = \lambda$. Représenter f_A lorsque $A = \mathbb{R}$. Même question lorsque $A = [0, 1]$, lorsque $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty}[n, n + \frac{1}{2}]$.

II. Calculs divers

Une rédaction concise est demandée pour chacun des calculs.

1. Déterminer
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[0,n]}(x)\, dx.$$
2. Trouver $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n}\, dx$.
3. On considère la suite double $(u_{n,m})$ définie pour tout couple d'entiers naturels (n, m) par
$$u_{n,m} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } 0 \leq m \leq n \\ \frac{1}{2^{n+m}} & \text{si } m \geq (n + 1) \end{array} \right.$$
Soit $n \geq 0$ fixé : calculer $\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}$. En déduire la somme de la série double
$$\sum_{n,m=0}^{+\infty} u_{n,m}.$$

III. Problème d'interversion
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x > 0$, on considère :

$$f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}.$$

1. Soit $x > 0$ fixé. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-x})^n$. Prouver que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{e^x+1}.$$
2. Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u(1+u)}\,du$. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$.
3. Soit $n > 0$ fixé. Calculer $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} I_n$. Vérifier que
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \neq \int_0^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x))\,dx.$$
Pourquoi le résultat de Beppo Levi sur les séries de fonctions ne s'applique-t-il pas ?
4. Soit $n > 0$ fixé. Déterminer le signe de $f_n(x)$ en fonction de x sur $]0, +\infty[$. En déduire $\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx$, puis :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx.$$

IV. Fonction définie par une intégrale
On définit la fonction F par :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{x^2}+x^2)}\,dx = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dx.$$

1. Soit $t > 0$ fixé. Justifier l'existence de $F(t)$. Peut-on se contenter d'étudier F sur $[0, +\infty[$?
2. Déterminer $F(0)$ et $\lim_{n\to+\infty} F(n)$.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\forall u \geq 0 : u \leq e^u$. Soit alors $\alpha > 0$ fixé : en déduire que
$$\forall x \geq 0, \forall t \geq \alpha \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq \frac{2}{\alpha}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
5. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner sa dérivée sous forme d'intégrale. Quel est le sens de variation de F sur $]0, +\infty[$?
6. Soit $t > 0$ fixé. A l'aide du changement de variable $u = \frac{t}{x}$, exprimer $F'(t)$ en fonction de $F(t)$. En déduire $F(t)$ pour $t > 0$.
7. Représenter F sur $\mathbb{R}$.

Université de Rennes 2
Licence MASS 3

Janvier 2005
Durée : 2 heures

Corrigé de l'Examen

I. Mesure
Dans cet exercice, μ est une mesure sur $(\mathbb{R},\mathcal{L})$ vérifiant de plus les conditions :
(C_1) $\forall x \in \mathbb{R}\ :\ \mu(\{x\}) = 0$;
(C_1) Pour tous réels $a < b$: $\mu([a,b]) < +\infty$.

1. La mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ vérifie bien ces deux conditions puisque pour tous réels $a \leq b$: $\mu([a,b]) = b - a$ (en particulier $\mu(\{x\}) = x - x = 0$). La mesure de Dirac δ_0 vérifie (C_2), mais pas (C_1) puisque $\delta_0(\{0\}) = 1 \neq 0$.
2. μ est une mesure donc elle vérifie la propriété de continuité monotone décroissante :
$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[\right) = \mu(\{0\}) = 0$$
par la propriété (C_1). Par définition, μ vérifie aussi la propriété de $\sigma-$additivité. Or $\mathbb{Q} = \{q_0, q_1, \ldots\}$ est dénombrable donc :
$$\mu(\mathbb{Q}) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}\{q_n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mu(\{q_n\}) = 0$$
toujours par (C_1).
3. Soit A ensemble Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}$ (i.e. $A \in \mathcal{L}$). On définit la fonction f_A comme suit
$$f_A : \left\{\begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to [0,+\infty[\\ x & \mapsto f_A(x) = \mu(A \cap [-|x|,|x|]) \end{array}\right.$$
Puisque $A \in \mathcal{L}$ et que $[-|x|,|x|] \in \mathcal{L}$ (tous les intervalles sont Lebesgue mesurables), on a bien $A \cap [-|x|,|x|] \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ est stable par intersection au plus dénombrable). Par ailleurs, par la propriété de monotonie :
$$f_A(x) \leq \mu([-|x|,|x|]) < +\infty$$
par la propriété (C_2). Il est clair par ailleurs que f_A est paire et la propriété de monotonie de la mesure μ implique la croissance de f_A. Lorsque $A = \mathbb{Q}$, toujours par la propriété de monotonie :
$$f_{\mathbb{Q}}(x) = \mu(\mathbb{Q} \cap [-|x|,|x|]) \leq \mu(\mathbb{Q}) = 0$$
donc $f_{\mathbb{Q}}$ est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

4. On suppose dans cette question que $\mu = \lambda$. Lorsque $A = \mathbb{R}$, on a :
$$f_{\mathbb{R}}(x) = \lambda([-|x|, |x|]) = 2|x|$$
Lorsque $A = [0,1]$, on a $f_A(x) = |x|$ si $-1 \leq x \leq 1$ et $f_A(x) = 1$ si $|x| \geq 1$. Lorsque $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty}[n, n+\frac{1}{2}]$, f_A est une fonction en escalier. Ces trois fonctions, respectivement appelées f_1, f_2 et f_3, sont représentées figure $A.5$.

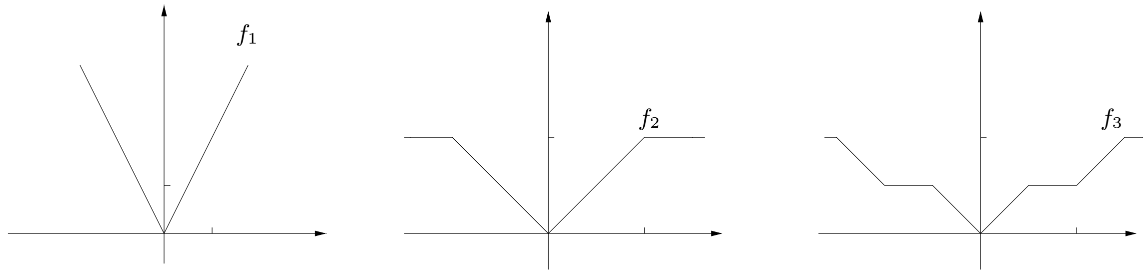

FIGURE A.5 – De gauche à droite : fonctions f_A pour $A = \mathbb{R}$, $A = [0,1]$, $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty}[n, n+\frac{1}{2}]$.

II. Calculs divers

1. Soit $x \geq 0$ fixé, alors l'équivalent $\ln(1-u) \sim_0 -u$ impose :
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-\frac{x}{n})} e^{\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[0,n]}(x) = e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) = g(x).$$
Par ailleurs, la majoration $\ln(1-u) \leq -u$ pour tout $u < 1$ donne :
$$|f_n(x)| = f_n(x) = e^{n\ln(1-\frac{x}{n})} e^{\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \leq e^{n\cdot\frac{-x}{n}} e^{\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) = g(x).$$
Il reste à vérifier que g est intégrable :
$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} = 2.$$
Donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne :
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[0,n]}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 2.$$

2. $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n}\,dx$? La limite simple de la suite de fonctions (f_n) est
$$f : \left\{ \begin{array}{ll} [0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{\pi}{2e} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$
Par ailleurs les f_n sont toutes majorées sur $\mathbb{R}^+$ par la fonction
$$g : x \mapsto \frac{\pi}{2}\left(\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + e^{-x}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)\right)$$
laquelle est bien intégrable sur $[0,+\infty[$:
$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left(1 + \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx\right) = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right).$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\arctan(nx)e^{-x^n}\,dx=\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\int_0^1\frac{\pi}{2}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

3. On considère la suite double $(u_{n,m})$ définie pour tout couple d'entiers naturels (n,m) par

$$u_{n,m}=\begin{cases}0 & \text{si } 0\le m\le n\\ \frac{1}{2^{n+m}} & \text{si } m\ge(n+1)\end{cases}$$

Soit $n\geq 0$ fixé :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}=\sum_{m=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+m}}=\frac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1}{4^n}.$$

La suite double $(u_{n,m})$ est à termes positifs donc d'après le petit théorème de Fubini-Tonelli :

$$\sum_{n,m=0}^{+\infty}u_{n,m}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.$$

III. Problème d'interversion

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x>0$, on considère :

$$f_n(x)=e^{-nx}-2e^{-2nx}$$

1. Soit $x>0$ fixé.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-x})^n=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{1}{e^x-1}.$$

On a de même :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)=\frac{1}{e^x-1}-\frac{2}{e^{2x}-1}=\frac{1}{e^x-1}-\frac{2}{(e^x+1)(e^x-1)}=\frac{e^x+1-2}{(e^x+1)(e^x-1)}=\frac{1}{e^x+1}.$$

2. Une décomposition en éléments simples donne :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{u(1+u)}\,du=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)\,du=\left[\ln\frac{u}{1+u}\right]_1^{+\infty}=\ln 2.$$

Le changement de variable $u=e^x$ donne alors :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x+1}\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{u(1+u)}\,du=\ln 2.$$

3. Soit $n>0$ fixé. On a :

$$I_n=\int_0^{+\infty}f_n(x)\,dx=\left[-\frac{e^{-nx}}{n}+\frac{e^{-2nx}}{n}\right]_0^{+\infty}=0$$

On en déduit : $\sum_{n=1}^{+\infty}I_n=0$. On a donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\,dx=0\neq\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)\right)\,dx=\ln 2.$$

Le résultat de Beppo Levi sur les séries de fonctions ne s'applique pas car les fonctions f_n ne sont pas de signe constant.

4. Soit $n > 0$ fixé. On vérifie aisément que $f_n(x) \leq 0$ si $0 \leq x \leq \frac{2}{\ln n}$ et $f_n(x) \geq 0$ si $x \geq \frac{2}{\ln n}$. On a donc :
$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = \int_0^{\frac{\ln 2}{n}} (2e^{-2nx} - e^{-nx})\,dx + \int_{\frac{\ln 2}{n}}^{+\infty} (e^{-nx} - 2e^{-2nx})\,dx.$$
Après calculs, on obtient :
$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = \frac{1}{2n}.$$
D'après la divergence de la série harmonique, on a donc :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$
Ceci explique pourquoi on ne peut intervertir symboles de sommation et d'intégration.

IV. Fonction définie par une intégrale

On définit la fonction F par :
$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{x^2}+x^2)}\,dx = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dx.$$

1. Il suffit de majorer f par une fonction dont l'intégrale de Riemann est absolument convergente sur $]0,+\infty[$:
$$\forall x > 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \qquad |f(x,t)| \leq e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
Or la fonction
$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$$
est d'intégrale convergente sur $]0,+\infty[$ puisqu'elle admet une limite en 0 et que :
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$
Ceci assure l'existence de $F(t)$ pour tout réel t. Par ailleurs, on peut se contenter d'étudier F sur $[0,+\infty[$ puisqu'elle est clairement paire.
2. Partant de la densité d'une gaussienne centrée réduite, on déduit $F(0) = \sqrt{2\pi}$. Pour ce qui concerne $\lim_{n\to+\infty} F(n)$, on applique le théorème de convergence dominée :

   – $\forall x > 0 \qquad f(x,n) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{n^2}{x^2}+x^2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
   – $\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f(x,n)| \leq g(x).$

   On en déduit que :
$$\lim_{n\to+\infty} F(n) = \int_0^{+\infty} 0\,dx = 0.$$
3. On applique le théorème de continuité sous le signe somme :

   – $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
   – $\forall x > 0,\ \forall t > 0 \qquad |f(x,t)| \leq g(x)$, avec $g \in \mathcal{L}^1_{]0,+\infty[}$.

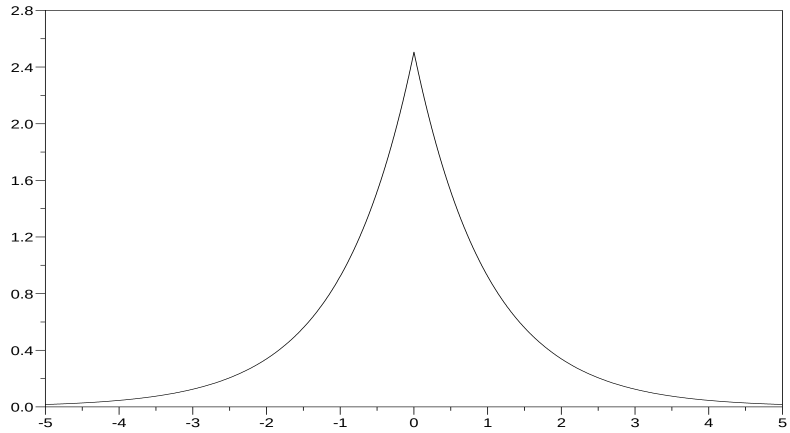

Figure A.6 – Représentation de la fonction F.

4. Pour tout $u \geq 0$:
$$e^u = 1 + u + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} \geq 1 + u \geq u.$$
Soit alors $\alpha > 0$ fixé : on a $\forall x \geq 0, \forall t \geq \alpha$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| = \frac{t}{x^2} e^{-\frac{t^2}{2x^2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{2}{t} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
5. D'après le théorème de dérivabilité sous le signe somme, on en déduit que F est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. F étant paire, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée est :
$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx,$$
ce qui donne ici :
$$F'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{x^2} + x^2)}\, dx.$$
On voit en particulier que $F'(t)$ est du signe de $-t$, donc F est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Soit $t > 0$ fixé. Le changement de variable $u = \frac{t}{x} \leftrightarrow x = \frac{t}{u}$ donne $du = -\frac{t}{x^2}\, dx$ et :
$$F'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{x^2} + x^2)}\, dx = \int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}(u^2 + \frac{t^2}{u^2})}\, du = -F(t).$$
La solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre et à coefficients constants $y' = -y$ est :
$$F(t) = \beta e^{-t}.$$
On doit de plus avoir :
$$\lim_{t \to 0^+} \beta e^{-t} = \beta = F(0) = \sqrt{2\pi}.$$
Par parité de F, on a donc :
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad F(t) = \sqrt{2\pi} e^{-|t|}.$$

7. La représentation de F est donnée figure $A.6$. On note que F est continue en 0, mais pas dérivable.

Université de Rennes 2
Licence MASS 3

Mardi 13 Décembre 2005
Durée : 1 heure 30

Contrôle de Mesure et Intégration

I. QCM

Chaque réponse correcte rapporte 0.5 point, chaque réponse incorrecte enlève 0.25 point. Vous répondrez sur votre copie et non sur l'énoncé.

1. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est-elle convergente ?
   ☐ Oui.
   ☐ Non.
2. Une tribu contient-elle nécessairement l'ensemble vide ?
   ☐ Oui.
   ☐ Non.
3. Pour qu'une fonction soit Riemann intégrable sur le segment $[a,b]$, est-il nécessaire qu'elle soit continue par morceaux ?
   ☐ Oui.
   ☐ Non.
4. Si $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$, avec f et g continues sur $[1,+\infty[$, alors $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ ont forcément même nature.
   ☐ Oui.
   ☐ Non.
5. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments d'une algèbre $\mathcal{F}$. A-t-on nécessairement $\cup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$?
   ☐ Oui.
   ☐ Non.
6. La fonction $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$ est-elle une fonction de répartition ?
   ☐ Oui.
   ☐ Non.
7. Pour quelles valeurs de α l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{(x+1)^\alpha}$ est-elle convergente ?
   ☐ $\alpha > 1$.
   ☐ $\alpha \leq 1$.
   ☐ $\alpha > 2$.
   ☐ $0 < \alpha < 2$.
8. La mesure de Lebesgue λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ est-elle σ-finie ?
   ☐ Oui.
   ☐ Non.

II. Fonction de répartition généralisée

Soit m une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ vérifiant de plus la condition :

$$(\mathcal{C}) \qquad \text{Pour tous réels } a < b \qquad m([a,b]) < +\infty.$$

On appelle fonction de répartition généralisée de m la fonction G qui à un réel x associe

$$G(x) = \begin{cases} -m(]x,0[) & \text{si } x < 0 \\ m([0,x]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) \in \mathbb{R}$.
2. Donner le signe de $G(x)$ suivant x.
3. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de limite 0. Calculer $G(0^-) = \lim_{n\to+\infty} G(x_n)$.

4. Si $0 \leq x \leq x'$, montrer que $G(x) \leq G(x')$. Montrer la même inégalité si $x \leq x' < 0$. En déduire que G est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $x \geq 0$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante vers x, préciser $\lim_{n\to+\infty} G(x_n)$. Même question avec $x < 0$. Qu'en déduire sur G ?
6. Préciser et représenter G lorsque : $m = \lambda$ mesure de Lebesgue, $m = \delta_0$ mesure de Dirac au point 0, $m = \mu$ mesure de comptage de $\mathbb{N}$.
7. (bonus) Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, F sa fonction de répartition et G sa fonction de répartition généralisée. Donner la relation entre $F(x)$ et $G(x)$ (on ne demande pas de justification).

III. Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

1. Justifier la convergence de l'intégrale I_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$.
3. Que vaut I_1 ? En déduire l'expression générale de I_n.
4. Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{(x^2-1)^2-x}{(1+x^2)^3}\,dx$ est convergente.
5. Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{(x^2-1)^2-x}{(1+x^2)^3} = \frac{ax}{(1+x^2)^3} + \frac{b}{(1+x^2)^3} + \frac{c}{(1+x^2)^2} + \frac{d}{1+x^2}.$$

6. En déduire la valeur de I.

IV. Calculs en vrac

1. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^n p e^{-\frac{p}{n}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $I_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx)\,dx$ et $J_n = \int_0^\pi e^x \sin(nx)\,dx$.
3. Donner la nature de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{2x-2}{x(x-1)^2}\,dx$.
4. Justifier la convergence et calculer $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sinh x}$.

V. Bonus

On veut calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

1. Donner une autre expression de I grâce au changement de variable $x = \tan u$.
2. Justifier la relation : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\cos u + \sin u = \sqrt{2} \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right)$.
3. Justifier l'égalité : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\,du = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\,du$.
4. En déduire que :

$$I = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

Université de Rennes 2
Licence MASS 3

Mardi 13 Décembre 2005
Durée : 1 heure 30

Corrigé du Contrôle

I. QCM

1. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ est-elle convergente ?
   ☒ Oui.
   ☐ Non.
2. Une tribu contient-elle nécessairement l'ensemble vide ?
   ☒ Oui.
   ☐ Non.
3. Pour qu'une fonction soit Riemann intégrable sur le segment $[a, b]$, est-il nécessaire qu'elle soit continue par morceaux ?
   ☐ Oui.
   ☒ Non.
4. Si $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$, avec f et g continues sur $[1, +\infty[$, alors $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)\, dx$ ont forcément même nature.
   ☐ Oui.
   ☒ Non.
5. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments d'une algèbre $\mathcal{F}$. A-t-on nécessairement $\cup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$?
   ☐ Oui.
   ☒ Non.
6. La fonction $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$ est-elle une fonction de répartition ?
   ☐ Oui.
   ☒ Non.
7. Pour quelles valeurs de α l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{(x+1)^\alpha}$ est-elle convergente ?
   ☐ $\alpha > 1$.
   ☐ $\alpha \leq 1$.
   ☒ $\alpha > 2$.
   ☐ $0 < \alpha < 2$.
8. La mesure de Lebesgue λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ est-elle σ-finie ?
   ☒ Oui.
   ☐ Non.

II. Fonction de répartition généralisée

1. Si $x \geq 0$, alors $[0, x]$ est un intervalle, donc un borélien. De plus, $G(x) = m([0, x])$ est positif puisque m est une mesure et $G(x) < +\infty$ par $(\mathcal{C})$. Si $x < 0$, alors $]x, 0[$ est un intervalle, donc un borélien et $G(x) = -m(]x, 0[)$ est négatif. Par monotonie de la mesure et par $(\mathcal{C})$, on a de plus :
$$-\infty < -m([x, 0]) \leq -m(]x, 0[).$$
2. Par les arguments précédents, on a :
$$G(x) = \begin{cases} \leq 0 & \text{si } x < 0 \\ \geq 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
3. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de limite 0. Alors par continuité monotone décroissante, et puisque par $(\mathcal{C})$ on a $m(]x_0, 0[) \leq m([x_0, 0]) < +\infty$, on peut écrire :
$$\lim_{n\to+\infty} m(]x_n, 0[) = m\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}]x_n, 0[\right) = m(\emptyset) = 0.$$
   Ainsi $G(0^-) = \lim_{n\to+\infty} G(x_n) = 0$.

4. Si $0 \leq x \leq x'$, l'inégalité $G(x) \leq G(x')$ découle de la monotonie de la mesure m. Même argument si $x \leq x' < 0$. Pour en déduire que G est croissante sur $\mathbb{R}$, il reste à voir le cas où $x < 0 \leq x'$, or dans ce cas $G(x) \leq 0$ tandis que $G(x') \geq 0$, donc on a encore $G(x) \leq G(x')$. Ainsi G est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $x \geq 0$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante vers x, alors par continuité monotone décroissante, et puisque par $(\mathcal{C})$ on a $m([0, x_0]) < +\infty$, on peut écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} G(x_n) = m\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} [0, x_n]\right) = m([0, x]) = G(x).$$

   Si $x < 0$ et si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante vers x, on peut supposer que pour tout n, on a $x_n < 0$. Alors par continuité monotone croissante :

$$\lim_{n\to+\infty} G(x_n) = -m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}]x_n, 0[\right) = -m(]x, 0[) = G(x).$$

   On en déduit que G est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
6. Si $m = \lambda$ mesure de Lebesgue, alors $m(x) = x$. Si $m = \delta_0$ mesure de Dirac au point 0, alors $G(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$. Enfin, si $m = \mu$ mesure de comptage de $\mathbb{N}$, alors :

$$G = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{[n,+\infty[},$$

   c'est-à-dire que $G(x) = (E(x) + 1)\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$. Ces fonctions sont représentées figure A.7, où les axes ont été soigneusement gradués (spéciale dédicace à Charlotte).

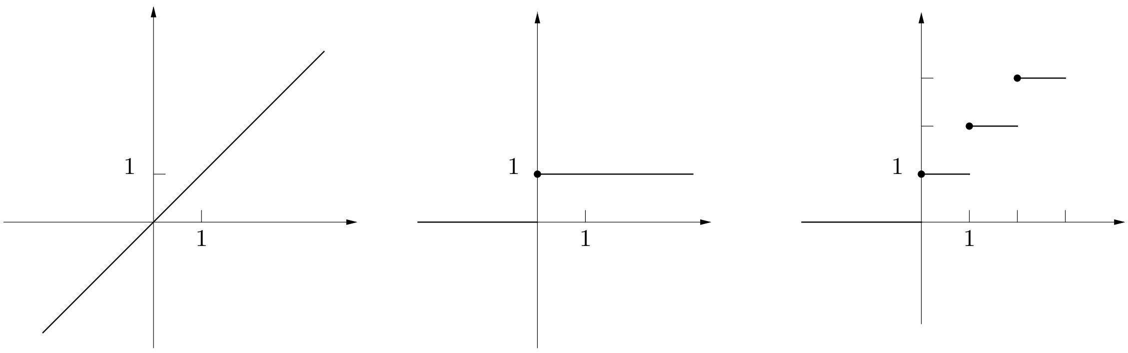

Figure A.7 – De gauche et à droite, fonctions G associées aux mesures $m = \lambda$, $m = \delta_0$, $m = \mu$.

7. Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, F sa fonction de répartition, i.e. $F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x])$. Si $x \geq 0$, on a :

$$G(x) = \mathbb{P}([0, x]) = F(x) - F(0^-).$$

   Si $x < 0$, alors :

$$G(x) = -\mathbb{P}(]x, 0[) = -(F(0^-) - F(x)) = F(x) - F(0^-).$$

III. Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$$

1. Pour tout $n > 0$, on a :
$$0 \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \sim \frac{1}{x^{2n}},$$
et puisque $2n > 1$, on en déduit par comparaison aux intégrales de Riemann que I_n est convergente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégration par parties avec $u' = 1$ et $v = (1+x^2)^{-n}$ donne :
$$I_n = \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^{+\infty} + 2n \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx = 2n \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx \right).$$
On a donc :
$$I_n = 2n(I_n - I_{n+1}) \Rightarrow I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$
3. Puisque
$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$
on en déduit l'expression générale de I_n pour tout $n \geq 1$:
$$I_n = \frac{(2n-3)\dots 3}{(2n-2)\dots 2} I_1 = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!^2}\pi.$$
4. On a :
$$\frac{(x^2-1)^2 - x}{(1+x^2)^3} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2},$$
donc l'intégrale est convergente.
5. La décomposition en éléments simples donne :
$$\frac{(x^2-1)^2 - x}{(1+x^2)^3} = -\frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{4}{(1+x^2)^3} - \frac{4}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2}.$$
6. On en déduit que :
$$I = \left[\frac{1}{4(1+x^2)^2}\right]_0^{+\infty} + 4I_3 - 4I_2 + I_1.$$
et la formule générale ci-dessus pour I_n donne $I_2 = \frac{\pi}{4}$ et $I_3 = \frac{3\pi}{16}$, d'où :
$$I = -\frac{1}{4} + \frac{3\pi}{4} - \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - 1}{4}.$$

IV. Calculs en vrac

1. Puisque la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ est continue sur $[0,1]$, on peut appliquer le résultat de passage à la limite pour les sommes de Riemann :
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{n} pe^{-\frac{p}{n}} = \int_0^1 xe^{-x}\, dx = [-xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

2. Le plus simple est de passer en complexes :
$$I_n + iJ_n = \int_0^\pi e^{(1+in)x}\,dx = \left[\frac{e^{(1+in)x}}{1+in}\right]_0^\pi = \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+in},$$
et il reste à réécrire ce résultat en parties réelle et imaginaire :
$$I_n + iJ_n = \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+n^2} + i\frac{((-1)^{n+1}e^\pi + 1)n}{1+n^2},$$
pour en déduire :
$$I_n = \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+n^2} \qquad J_n = \frac{((-1)^{n+1}e^\pi + 1)n}{1+n^2}.$$
3. L'intégrale est doublement généralisée, en 1 et en $+\infty$. En 1, on a :
$$\frac{2x-2}{x(x-1)^2} \sim_1 \frac{2}{x-1},$$
or l'intégrale $\int_1 \frac{2}{x-1}\,dx$ est divergente, donc I est divergente.
4. L'intégrale est généralisée en $+\infty$, avec :
$$\frac{1}{\sinh x} \sim_{+\infty} 2e^{-x},$$
avec $\int^{+\infty} e^{-x}\,dx$ convergente, donc I est convergente. Le changement de variable $u = e^x$ donne :
$$I = 2\int_e^{+\infty} \frac{du}{u^2-1} = \left[\ln\frac{x-1}{x+1}\right]_e^{+\infty} = \ln\frac{e+1}{e-1}.$$

V. Bonus

On veut calculer :
$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$
1. Le changement de variable $x = \tan u$ donne :
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan u)\,du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u + \sin u)\,du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u\,du.$$
2. De la relation $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$, découle :
$$\cos u + \sin u = \sqrt{2}\sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right).$$
3. Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ donne :
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\,du = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\,du.$$
4. On en déduit que :
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)\right)\,du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u\,du = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)\right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\,du,$$
et les deux intégrales s'annulant, on obtient bien :
$$I = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Université de Rennes 2
Licence MASS 3

Vendredi 20 Janvier 2006
Durée : 2 heures

Examen de Mesure et Intégration

I. Mesures

On considère les mesures suivantes sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$: mesure de Lebesgue λ, mesure de comptage $\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n$, mesure $\nu = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\delta_n$. Pour tout $n > 0$, on considère l'intervalle :

$$A_n = \left[n, n + \frac{1}{n}\right[.$$

1. Pour tout $n > 0$, déterminer $\lambda(A_n)$, $\mu(A_n)$ et $\nu(A_n)$.
2. On définit $B_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$. Pour tout $N > 0$, déterminer $\lambda(B_N)$, $\mu(B_N)$ et $\nu(B_N)$.
3. On considère alors $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Déterminer $\lambda(B)$, $\mu(B)$ et $\nu(B)$.

II. Suite d'intégrales

Pour tout $n \geq 0$, on considère :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1 + x^n}{\sqrt{x}(1 + x^{n+1})}\, dx.$$

1. Soit $n \geq 0$ fixé. Justifier le fait que l'intégrale est bien définie au sens de Riemann. En déduire qu'elle est bien définie au sens de Lebesgue.
2. Montrer que :
$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 2.$$
3. Prouver que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in [0, 1]$:
$$\frac{1 + x^n}{1 + x^{n+1}} - \frac{1 + x^{n+1}}{1 + x^{n+2}} \geq 0.$$
En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
4. Montrer que pour tout $n \geq 0$:
$$I_n - 2 = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{\sqrt{x}(1 + x^{n+1})}\, dx.$$
5. Calculer pour tout $n \geq 0$:
$$\int_0^1 (x^{n-\frac{1}{2}} - x^{n+\frac{1}{2}})\, dx.$$

6. En déduire que pour tout $n \geq 0$:
$$0 \leq I_n - 2 \leq \frac{1}{n^2}.$$

III. Fonction définie par une intégrale

On définit la fonction F par :

$$F(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 f(x,t)\,dx.$$

1. Pour tout réel t, justifier l'existence de $F(t)$.
2. Déterminer $F(0)$ et $\lim_{n\to+\infty} F(n)$.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $M > 0$ fixé. Justifier l'inégalité :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [-M, M] \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq 2M.$$
5. En déduire que F est dérivable sur $[-M, M]$, puis sur $\mathbb{R}$ tout entier. Donner sa dérivée sous forme d'intégrale.
6. Quel est le signe de $F'(t)$ en fonction de t. Donner le tableau de variations de F, représenter F.
7. On considère maintenant la primitive de $u \mapsto e^{-u^2}$ qui s'annule en 0, c'est-à-dire la fonction G définie pour tout réel t par :
$$G(t) = \int_0^t e^{-u^2}\,du.$$
   (a) Montrer que pour tout réel t, on a : $F'(t) = -2G(t)G'(t)$.
   (b) En déduire que pour tout réel t : $G^2(t) = \frac{\pi}{4} - F(t)$.
   (c) Déterminer alors la valeur de l'intégrale :
$$I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du.$$

IV. Quelques limites

1. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-m-\frac{m}{n}}.$$
2. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x)^2}\,dx.$$
3. Trouver
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx.$$
4. Préciser
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{m}{n^2} \sin\left(\frac{m}{n}\right).$$

Université de Rennes 2
Licence MASS 3

Vendredi 20 Janvier 2006
Durée : 2 heures

Corrigé de l'Examen

I. Mesures
On considère les mesures suivantes sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$: mesure de Lebesgue λ, mesure de comptage $\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n$, mesure $\nu = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\delta_n$. Pour tout $n > 0$, on considère l'intervalle :

$$A_n = \left[n, n + \frac{1}{n}\right[.$$

1. Pour tout $n > 0$, on a : $\lambda(A_n) = \frac{1}{n}$, $\mu(A_n) = 1$ et $\nu(A_n) = 2^{-n}$.
2. Pour tout $N > 0$, les ensembles $(A_n)_{1 \leq n \leq N}$ étant disjoints, on a par additivité d'une mesure m :
$$m(B_N) = \sum_{n=1}^{N} m(A_n).$$
Ce qui donne ici :
$$\lambda(B_N) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) + \cdots + \lambda(A_N) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$
De même, pour la mesure de comptage, on trouve $\mu(B_N) = N$. Enfin pour la mesure géométrique :
$$\nu(B_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^N}.$$
3. On considère alors $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Puisque les $(A_n)_{n \geq 1}$ sont disjoints, on a par σ-additivité d'une mesure m :
$$m(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n).$$
Ce qui donne :
$$\lambda(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$
par divergence de la série harmonique. De même :
$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Et pour la mesure géométrique :

$$\nu(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

II. Suite d'intégrales

Pour tout $n \geq 0$, on considère :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1 + x^n}{\sqrt{x}(1 + x^{n+1})}\, dx.$$

1. Soit $n \geq 0$ fixé. La fonction à intégrer est continue positive sur $]0, 1]$ et en 0 on a l'équivalent :

$$\frac{1 + x^n}{\sqrt{x}(1 + x^{n+1})} \sim_{0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Or on sait que l'intégrale généralisée :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

est convergente. On en déduit que I_n peut être vue comme une intégrale de Riemann généralisée convergente. Puisque la fonction intégrée est positive, on peut même dire que c'est une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente, et par suite cette intégrale est bien définie au sens de Lebesgue.

2. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue :
   – Convergence simple : pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + x^n}{\sqrt{x}(1 + x^{n+1})} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

   – Domination : pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$0 \leq \frac{1 + x^n}{\sqrt{x}(1 + x^{n+1})} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} = g(x),$$

   avec g Lebesgue intégrable sur $]0, 1[$ par les mêmes arguments que dans la question précédente.

   On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.$$

3. Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a après simplifications :

$$\frac{1 + x^n}{1 + x^{n+1}} - \frac{1 + x^{n+1}}{1 + x^{n+2}} = \frac{x^n(1 - x)^2}{(1 + x^{n+1})(1 + x^{n+2})},$$

quantité qui est bien positive puisque x est entre 0 et 1. On en déduit que pour tout $n \geq 0$:

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1 + x^n}{1 + x^{n+1}} - \frac{1 + x^{n+1}}{1 + x^{n+2}} \right) dx \geq 0,$$

puisqu'on intègre une fonction positive. Ainsi la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

4. En écrivant la constante 2 telle qu'on l'a obtenue ci-dessus, on a :

$$I_n - 2 = \int_0^1 \frac{1+x^n}{\sqrt{x}(1+x^{n+1})}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1+x^n}{\sqrt{x}(1+x^{n+1})} - \frac{1+x^{n+1}}{\sqrt{x}(1+x^{n+1})}\right) dx,$$

   ce qui donne bien :

$$I_n - 2 = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{\sqrt{x}(1+x^{n+1})}\,dx.$$

5. Pour tout $n \geq 0$:

$$\int_0^1 (x^{n-\frac{1}{2}} - x^{n+\frac{1}{2}})\,dx = \left[\frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}} - \frac{x^{n+\frac{3}{2}}}{n+\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{3}{2}} = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}.$$

6. Puisque la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et de limite 2, il est clair que pour tout $n \geq 0$: $I_n \geq 2$. Par ailleurs, on a vu que :

$$I_n - 2 = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{\sqrt{x}(1+x^{n+1})}\,dx,$$

   et en minorant $1+x^{n+1}$ par 1 pour tout $x \in [0,1]$, on peut majorer facilement cette dernière intégrale :

$$I_n - 2 \leq \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 (x^{n-\frac{1}{2}} - x^{n+\frac{1}{2}})\,dx = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}.$$

   Il reste à minorer brutalement le dénominateur par n^2 pour obtenir :

$$I_n - 2 \leq \frac{1}{n^2}.$$

III. Fonction définie par une intégrale

On définit la fonction F par :

$$F(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 f(x,t)\,dx.$$

1. Pour tout réel t, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue donc Riemann intégrable sur le segment $[0,1]$, donc Lebesgue intégrable sur le segment $[0,1]$. Ainsi la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. On a alors :

$$F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

   Pour déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-n^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx,$$

   on peut appliquer le théorème de convergence dominée :
   – Convergence simple : pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n^2(1+x^2)}}{1+x^2} = 0.$$

– Domination : pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in [0,1]$:

$$0 \leq e^{-n^2(1+x^2)} \leq 1,$$

donc :

$$0 \leq \frac{e^{-n^2(1+x^2)}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} = g(x),$$

avec $g \in \mathcal{L}_{[0,1]}$ comme on l'a vu pour le calcul de $F(0)$.

Ainsi on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F(n) = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

3. On applique le théorème de continuité sous le signe somme :
   – Continuité : pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   – Domination : pour tout $x \in [0,1]$, pour tout réel t :

   $$0 \leq f(x,t) \leq g(x),$$

   avec $g \in \mathcal{L}_{[0,1]}$.

   On en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $M > 0$ fixé. On a :

   $$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -2te^{-t^2(1+x^2)},$$

   et puisque le terme exponentiel est compris entre 0 et 1, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall t \in [-M,M]$:

   $$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| = 2|t|e^{-t^2(1+x^2)} \leq 2M.$$
5. On applique le théorème de dérivation sous le signe somme sur le segment $[-M,M]$:
   – Dérivabilité : pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $[-M,M]$.
   – Domination : pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \in [-M,M]$:

   $$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq 2M = g(x),$$

   avec $g \in \mathcal{L}_{[0,1]}$ puisque toute fonction constante est intégrable sur un intervalle borné.

   On en déduit que F est dérivable sur $[-M,M]$. La dérivabilité étant une propriété locale, F est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

   $$F'(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx = -2t\int_0^1 e^{-t^2(1+x^2)}\,dx.$$
6. Puisque la fonction intégrée est positive, il est clair que $F'(t)$ est positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi F est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Par ailleurs F est paire donc :

   $$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} F(t).$$

   Et puisque F est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on est certain que :

   $$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{n\to+\infty} F(n) = 0.$$

   La représentation de F est donnée figure $A.8$.

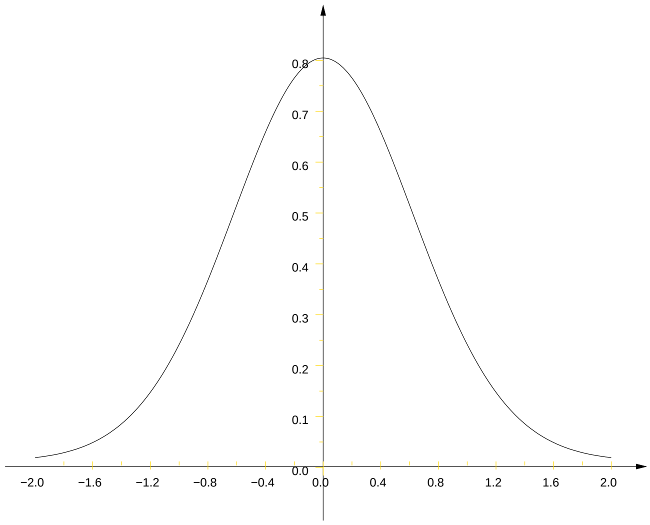

FIGURE A.8 – Fonction F.

7. On considère la fonction G définie pour tout réel t par :

$$G(t) = \int_0^t e^{-u^2}\, du.$$

(a) Par le théorème fondamental du calcul intégral, on a pour tout réel t :

$$G'(t) = e^{-t^2}.$$

Par ailleurs on peut aussi écrire pour tout réel t :

$$F'(t) = -2te^{-t^2} \int_0^1 e^{-t^2x^2}\, dx,$$

et le changement de variable $u = tx$ donne :

$$F'(t) = -2e^{-t^2} \int_0^t e^{-u^2}\, du = -2G(t)G'(t).$$

(b) Ainsi pour tout réel u on a obtenu :

$$-F'(u) = 2G(u)G'(u).$$

En intégrant chaque membre entre 0 et t, il vient :

$$[-F(u)]_0^t = [G^2(u)]_0^t,$$

c'est-à-dire :

$$F(0) - F(t) = G^2(t) - G^2(0),$$

et puisque $G(0) = 0$ et $F(0) = \frac{\pi}{4}$, on a bien pour tout réel t :

$$G^2(t) = \frac{\pi}{4} - F(t).$$

(c) Le nombre $G(t)$ étant positif pour tout t positif, on a alors :

$$I = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-u^2}\,du = \lim_{t\to+\infty} G(t) = \lim_{t\to+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{4} - F(t)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

IV. Quelques limites

1. On applique le théorème de convergence dominée pour les séries :
   – Convergence simple : pour tout $m \geq 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-m-\frac{m}{n}} = e^{-m}.$$

   – Domination : pour tout $n > 0$, pour tout $m \geq 0$:

$$0 \leq e^{-m-\frac{m}{n}} \leq e^{-m},$$

   avec $m \mapsto e^{-m}$ intégrable, puisqu'on reconnaît une série géométrique de raison e^{-1} :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-m} = \frac{e}{e-1}.$$

   On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-m-\frac{m}{n}} = \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-m} = \frac{e}{e-1}.$$

2. On applique le théorème de convergence dominée classique :
   – Convergence simple : puisque $\sin u \sim u$ au voisinage de 0, on en déduit que pour tout $x \in]0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

   – Domination : puisque $|\sin u| \leq |u|$ pour tout réel u, on a pour tout $x \in]0,1]$ et tout $n > 0$:

$$\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x)^2}\right| \leq \frac{1}{(1+x)^2} = g(x),$$

   avec $g \in \mathcal{L}_{]0,1]}$ puisque :

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

   On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

3. Puisque pour tout $x \in [0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{x^n}{1+x} \geq 0,$$

   on peut appliquer le corollaire de Beppo Levi pour les séries de fonctions :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x}\right)dx,$$

   où on reconnaît une série géométrique de raison $x \in [0,1[$, ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,dx = [\operatorname{arg\,tanh} x]_0^1 = \lim_{x\to1^-}\operatorname{arg\,tanh} x = +\infty.$$

4. On a :
$$\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n^2}\sin\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}\sin\left(\frac{m}{n}\right),$$
c'est-à-dire une somme de Riemann pour la fonction $x\mapsto x\sin x$ continue, donc intégrable, sur $[0,1]$. Donc :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n^2}\sin\left(\frac{m}{n}\right)=\int_0^1 x\sin x\,dx,$$
qu'il reste à intégrer par parties :
$$\int_0^1 x\sin x\,dx=[-x\cos x]_0^1+\int_0^1\cos x\,dx=-\cos 1+[\sin x]_0^1=\sin 1-\cos 1.$$

Université de Rennes 2
Licence MASS 3

Jeudi 30 Novembre 2006
Durée : 1 heure

Mesure et Intégration

Contrôle

I. Théorie de la mesure

On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ un ensemble de parties de Ω. Quelles conditions $\mathcal{F}$ doit-elle satisfaire pour être une tribu ?
2. On considère l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. A quelles conditions une application $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ est-elle une mesure ?
3. On considère l'application $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ définie pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ par :
$$m(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{si } A \text{ est un ensemble fini} \\ +\infty & \text{si } 0 \in A \text{ ou si } A \text{ est un ensemble infini} \end{cases}$$
Notons encore $A_n = \{n\}$. Déterminer $m(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Que vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n)$?
5. Déterminer $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, puis $m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$. m est-elle une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?
6. Bonus : Montrer que m est additive, c'est-à-dire que si A et B sont deux ensembles disjoints de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

II. Suite d'intégrales

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :
$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

1. Soit $n \geq 0$ fixé. Justifier la convergence de l'intégrale I_n.
2. Déterminer I_0 et I_1.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+2} = (n+1)I_n$.
4. Donner alors I_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pouvait-on prévoir ce résultat sans calculs ?
5. Déterminer I_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Bonus : Soit X une variable aléatoire gaussienne de moyenne 1 et de variance unité, ce qu'on note $X \sim \mathcal{N}(1,1)$. Déterminer $\mathbb{E}[X^4]$.

III. Calculs d'hiver

1. Calculer la limite suivante :
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{1^2+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{(n-1)^2+n^2}+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$
2. Calculer l'intégrale :
$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x^2}{1-x^2}\,dx.$$
3. On considère l'intégrale généralisée :
$$J=\int_1^{+\infty}\frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$
   (a) Justifier sa convergence.
   (b) Calculer sa valeur.
4. Bonus : Donner la nature de l'intégrale généralisée :
$$K=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}\right)\,dx.$$

Université de Rennes 2
Licence MASS 3

Jeudi 30 Novembre 2006
Durée : 1 heure

Mesure et Intégration

Corrigé du Contrôle

I. Théorie de la mesure

1. $\mathcal{F}$ est une tribu si :
   (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
   (ii) si A appartient à $\mathcal{F}$, alors son complémentaire A^c appartient aussi à $\mathcal{F}$;
   (iii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{F}$.
2. Une application $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ si :
   (i) $\nu(\emptyset) = 0$;
   (ii) σ-additivité : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors
$$\nu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(A_n).$$
3. On a $m(A_0) = +\infty$ et $m(A_n) = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n > 0$.
4. On a donc :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
5. L'union cherchée est $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \mathbb{N}^*$. Puisque $\mathbb{N}^*$ est un ensemble infini, on a par définition de m :
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = m(\mathbb{N}^*) = +\infty.$$
   Or $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ deux à deux disjoints, donc si m était une mesure, on aurait par σ-additivité :
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n),$$
   ce qui n'est pas le cas, comme on vient de le voir. Donc m n'est pas une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
6. Si A et B sont deux ensembles disjoints de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors de deux choses l'une :
   (a) Ou bien $0 \in A\cup B$, auquel cas $m(A\cup B) = +\infty$, mais comme 0 appartient à l'un des deux ensembles, on a $m(A) = +\infty$ ou $m(B) = +\infty$, et quoi qu'il en soit $m(A)+m(B) = +\infty$, donc on a bien additivité : $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

(b) Ou bien $0 \notin A \cup B$, alors on distingue à nouveau deux cas :

i. Ou bien $A \cup B$ est infini : dans ce cas $m(A \cup B) = +\infty$. Mais il est clair que A ou (inclusif) B est infini, donc $m(A) + m(B) = +\infty$ et l'additivité est encore vérifiée.

ii. Ou bien $A \cup B$ est fini : alors A et B sont finis, et comme A et B sont disjoints on peut écrire :

$$m(A \cup B) = \sum_{n \in (A \cup B)} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \in B} \frac{1}{n^2} = m(A) + m(B).$$

II. Suite d'intégrales

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

1. L'intégrale I_n est doublement généralisée, en $\pm\infty$. En $+\infty$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Rightarrow x^n e^{-\frac{x^2}{2}} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Donc, par la règle de Riemann, I_n est convergente en $+\infty$. En $-\infty$, on raisonne de la même façon. Finalement, l'intégrale I_n est convergente, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans toute la suite, on peut donc manipuler ces intégrales sans se soucier des questions de convergence.

2. $I_0 = \sqrt{2\pi}$ est donnée par le texte. Pour I_1, on a :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$I_{n+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^{n+1})(x e^{-\frac{x^2}{2}})\, dx,$$

et on effectue une intégration par parties :

$$I_{n+2} = \left[-x^{n+1} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} (n+1) x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = (n+1) I_n,$$

la dernière égalité venant du fait que l'exponentielle l'emporte sur la puissance :

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to -\infty} x^{n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

4. Puisque $I_1 = 0$, on en déduit que $I_3 = 0$, puis que $I_5 = 0$, et de proche en proche il est clair que $I_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce résultat était d'ailleurs clair sans calculs puisqu'on intègre une fonction impaire sur un domaine symétrique par rapport à 0.

5. Pour les indices pairs, on a $I_2 = 1 \times I_0 = \sqrt{2\pi}$, puis $I_4 = 3 \times I_2 = 3 \times 1 \times I_0 = 3\sqrt{2\pi}$, et de proche en proche :

$$I_{2n} = (2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 3 \times 1 \times I_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{2\pi}.$$

6. Pour déterminer $\mathbb{E}[X^4]$, il y a deux méthodes équivalentes.

– Méthode analytique : on écrit l'espérance sous forme d'intégrale :

$$\mathbb{E}[X^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\, dx,$$

et on effectue le changement de variable $u = x - 1$, ce qui donne :

$$\mathbb{E}[X^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(u+1)^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

On utilise la formule du binôme :

$$(u+1)^4 = u^4 + 4u^3 + 6u^2 + 4u + 1,$$

et on peut alors tout exprimer en fonction des I_n :

$$\mathbb{E}[X^4] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(I_4 + 4I_3 + 6I_2 + 4I_1 + I_0) = 10.$$

– Méthode probabiliste : l'idée est la même, puisqu'on sait que si $X \sim \mathcal{N}(1,1)$, alors $Y = X - 1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Donc, par les calculs faits avant, on sait que $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y^3] = 0$, $\mathbb{E}[Y^2] = 1$ et $E[Y^4] = 3$. Or on a :

$$\mathbb{E}[X^4] = \mathbb{E}[(Y+1)^4] = \mathbb{E}[Y^4] + 4\mathbb{E}[Y^3] + 6\mathbb{E}[Y^2] + 4\mathbb{E}[Y] + 1 = 3 + 6 + 1 = 10.$$

III. Calculs divers

1. On reconnaît une somme de Riemann :

$$\frac{n}{1^2+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{(n-1)^2+n^2} + \frac{n}{n^2+n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k^2}{n^2}+1}.$$

Puisque la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est continue, donc intégrable, sur $[0,1]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. On peut écrire la fraction rationnelle à intégrer sous une autre forme :

$$\frac{2x^2}{1-x^2} = \frac{2x^2-2+2}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2} - 2.$$

Le calcul de I est alors très simple :

$$I = [2\arg\tanh x - 2x]_0^{\frac{1}{2}} = 2\arg\tanh\frac{1}{2} - 1.$$

Ou encore, puisque $\arg\tanh x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, on a $I = \ln 3 - 1$.

3. On considère l'intégrale généralisée :

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

(a) L'intégrale est généralisée en $+\infty$. Puisque la fonction à intégrer est positive, il suffit d'en donner un équivalent :

$$\frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2} \sim_{+\infty} \frac{2\ln x}{x^3} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par le critère de Riemann, l'intégrale est donc convergente.

(b) Pour la calculer, on peut effectuer une intégration par parties :

$$J=\left[-\frac{\ln x}{1+x^2}\right]_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\,dx.$$

On effectue une réduction en éléments simples :

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2},$$

d'où :

$$J=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^{+\infty}=\left[\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

4. L'intégrale K est généralisée en $+\infty$. Puisque $x>0$, on a $e^{\frac{1}{x}}>1\geq\cos\frac{1}{x}$, et on peut utiliser un équivalent. Plus précisément, on va commencer par des développements limités : $e^{\frac{1}{x}}=_{+\infty}1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$, et de même : $\cos\frac{1}{x}=_{+\infty}1+o\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi on obtient :

$$e^{\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}=_{+\infty}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\sim_{+\infty}\frac{1}{x},$$

d'où il vient :

$$\frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}\right)\sim_{+\infty}\frac{1}{x^2},$$

et par suite K est convergente.

Université de Rennes 2
Licence MASS 3

Jeudi 18 Janvier 2007
Durée : 2 heures

Examen de Mesure et Intégration

I. Mesure de probabilité (3 points)
On note $\lambda_{[0,1]}$ la mesure de probabilité associée à la loi uniforme sur $[0, 1]$, δ_0 et δ_1 les mesures de Dirac en 0 et 1. On considère alors la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ définie par :

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{3}\lambda_{[0,1]} + \frac{1}{6}\delta_1.$$

1. Déterminer $\mathbb{P}(\{0\})$, $\mathbb{P}(]-\infty, 1/2])$, $\mathbb{P}([1/4, 3/4])$, $\mathbb{P}(]1/2, 1])$, $\mathbb{P}([1, +\infty[)$.
2. Représenter la fonction de répartition F associée à $\mathbb{P}$.
3. La probabilité $\mathbb{P}$ est-elle discrète ? Est-elle diffuse ?

II. Quelques limites (5 points)

1. Calculer :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx^3}{1+nx}\, dx.$$
2. Pour tout $n \geq 1$, on note :
$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\, dx.$$
   (a) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
   (b) Etablir l'égalité suivante :
$$\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\, dx = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} u^{\frac{1}{n}-1} e^{-u}\, du.$$
   (c) Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} u^{\frac{1}{n}-1} e^{-u}\, du = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = I,$$
   et en déduire un équivalent de I_n en fonction de I.
3. En vous servant par exemple de l'inégalité $\ln(1-x) \leq -x$ pour tout $x < 1$ (que l'on justifiera par un simple dessin), calculer :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \mathbb{1}_{\{1\leq m\leq n\}}.$$

III. Fonction définie par une intégrale (6 points)
On définit la fonction F par :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dx.$$

1. Vérifier que pour tout couple $(x,t) \in]0,+\infty[\times[1,+\infty[$, on a $f(x,t) \geq 0$.
2. Soit $t \geq 1$ fixé, déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x,t)$ en fonction de t.
3. Pour tout réel $t \geq 1$, justifier l'existence de $F(t)$.
4. Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$. Exprimer sa dérivée $F'(t)$ sous forme d'intégrale, puis calculer cette intégrale.
5. Que vaut $F(1)$? En déduire $F(t)$ pour tout réel $t \geq 1$.
6. Montrer que pour $0 < t \leq 1$, on a $F(1/t) = -F(t)$. En déduire l'expression générale de $F(t)$ pour tout réel t strictement positif.
7. On considère deux réels a et b strictement positifs et l'intégrale :

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx.$$

   Montrer que $I(a,b) = \ln b - \ln a$.

IV. Lois de Laplace et de Cauchy (6 points)
On considère une variable aléatoire X qui suit une loi de Laplace, c'est-à-dire que X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de densité :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

1. Représenter f.
2. Calculer et représenter la fonction de répartition F.
3. Montrer que tout moment d'ordre impair est nul : $\mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0$ pour tout $n \geq 0$.
4. Pour $n \geq 1$, établir une relation de récurrence entre $\mathbb{E}[X^{2n}]$ et $\mathbb{E}[X^{2n-2}]$. En déduire que $\mathbb{E}[X^{2n}] = (2n)!$ pour tout $n \geq 0$.
5. La fonction caractéristique de X est la fonction Φ définie pour tout réel t par :

$$\Phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx.$$

   (a) Montrer que $\Phi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
   (b) Bonus : Grâce au lien entre dérivées successives de Φ en 0 et moments de la variable aléatoire, retrouver les résultats obtenus sur les moments de X (on pourra utiliser un développement en série entière de Φ).
6. Le théorème d'inversion dit que si la fonction caractéristique Φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors on peut retrouver la densité f à partir de Φ comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\Phi(t)\, dt.$$

   En déduire une expression de $e^{-|x|}$ sous forme d'intégrale.
7. On considère une variable aléatoire Y qui suit une loi de Cauchy, c'est-à-dire que Y est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de densité :

$$g(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

   Déterminer la fonction caractéristique de Y.

Université de Rennes 2
Licence MASS 3

Jeudi 18 Janvier 2007
Durée : 2 heures

Corrigé de l'Examen

I. Mesure de probabilité

1. On a :
   (a) $\mathbb{P}(\{0\}) = \frac{1}{2}$;
   (b) $\mathbb{P}(]-\infty, 1/2]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$;
   (c) $\mathbb{P}([1/4, 3/4]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;
   (d) $\mathbb{P}(]1/2, 1]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$;
   (e) $\mathbb{P}([1, +\infty[) = \frac{1}{6}$.
2. La fonction de répartition F associée à $\mathbb{P}$ est représentée figure A.9.

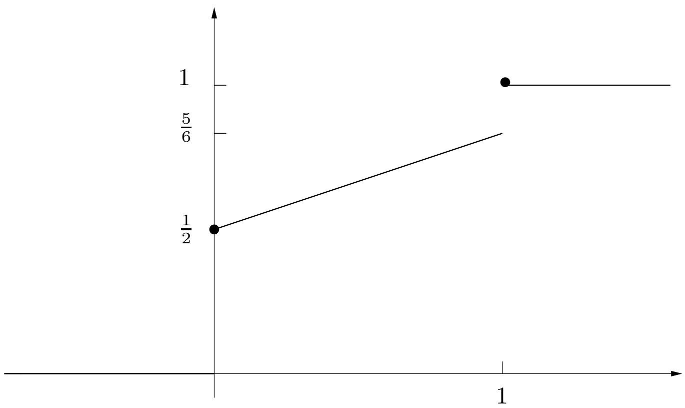

FIGURE A.9 – Fonction de répartition F associée à $\mathbb{P} = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{3}\lambda_{[0,1]} + \frac{1}{6}\delta_1$.

3. La probabilité $\mathbb{P}$ serait discrète si elle n'augmentait que par sauts, ce qui n'est pas le cas ici. Plus précisément, en notant π la fonction de masse et $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ l'ensemble des points de discontinuité de π, on a :
$$\sum_{x \in \mathcal{D}} \pi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} < 1.$$
La probabilité $\mathbb{P}$ n'est pas diffuse non plus puisque F n'est pas continue. Autrement dit, $\mathbb{P}$ est un exemple de probabilité mixte.

II. Quelques limites

1. On peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue :
   – Convergence simple : pour tout $x \geq 1$, on a
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{nx^3}{1+nx} = x^2.$$
   – Domination : pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in [0,1]$, on a
   $$0 \leq \frac{nx^3}{1+nx} \leq \frac{nx^3}{nx} = x^2 = g(x),$$
   avec g Lebesgue intégrable (car Riemann intégrable) sur $[0,1]$.

   On a donc :
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx^3}{1+nx}\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$
2. Pour tout $n \geq 1$, on note :
   $$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx.$$
   (a) On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue sur $]1,+\infty[$:
   – Convergence simple : pour tout $x > 1$, on a
   $$\lim_{n\to+\infty} e^{-x^n} = 0.$$
   – Domination : pour tout $n \geq 1$, pour tout $x > 1$, on a
   $$0 \leq e^{-x^n} \leq e^{-x} = g(x),$$
   avec g Lebesgue intégrable sur $]1,+\infty[$, puisque :
   $$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$
   .

   On a donc :
   $$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_1^{+\infty} 0\,dx = 0.$$
   (b) On effectue le changement de variable $u = x^n$ pour obtenir :
   $$\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} u^{\frac{1}{n}-1}e^{-u}\,du.$$
   (c) On applique à nouveau le théorème de convergence dominée de Lebesgue sur $]1,+\infty[$:
   – Convergence simple : pour tout $u > 1$, on a
   $$\lim_{n\to+\infty} u^{\frac{1}{n}-1}e^{-u} = \frac{e^{-u}}{u}.$$
   – Domination : pour tout $n \geq 1$, pour tout $u > 1$, on a
   $$0 \leq u^{\frac{1}{n}-1}e^{-u} \leq e^{-u} = g(u),$$
   avec g Lebesgue intégrable sur $]1,+\infty[$ (cf ci-dessus).

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} u^{\frac{1}{n}-1}e^{-u}\,du = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du = I,$$

c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = I$, autrement dit $I_n \sim \frac{1}{n}I$.

3. On applique le théorème de convergence dominée pour les séries :
   - Convergence simple : pour tout $m \geq 1$, on a

   $$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^n \mathbb{1}_{\{1\leq m\leq n\}} = e^{-m}.$$

   - Domination : pour tout couple (m,n) tel que $1 \leq m \leq n$, on a la majoration

   $$0 \leq \left(1-\frac{m}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{m}{n}\right)} \leq e^{n\times-\frac{m}{n}} = e^{-m},$$

   avec $m \mapsto e^{-m}$ intégrable, puisqu'on reconnaît une série géométrique de raison e^{-1} :

   $$\sum_{m=1}^{+\infty} e^{-m} = \frac{1}{e-1}.$$

   On en déduit que :

   $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-m-\frac{m}{n}} = \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-m} = \frac{1}{e-1}.$$

III. Fonction définie par une intégrale
On définit la fonction F par :

$$F(t) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-tx}}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dx.$$

1. Pour tout couple $(x,t) \in]0,+\infty[\times[1,+\infty[$, on a $e^{-tx} \leq e^{-x}$, donc $f(x,t) \geq 0$.
2. Pour $t \geq 1$ fixé, on a le développement limité suivant en 0 :

   $$e^{-x}-e^{-tx} = 1-x+o(x)-(1-tx+o(x)) = (t-1)x+o(x),$$

   donc :

   $$f(t,x) = \frac{(t-1)x+o(x)}{x} = (t-1)+o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} t-1,$$

   c'est-à-dire que $x \mapsto f(t,x)$ est prolongeable par continuité en 0, par la valeur $(t-1)$.
3. Soit un réel $t \geq 1$ fixé. $F(t)$ est défini par une intégrale : pour montrer qu'elle existe au sens de Lebesgue, il suffit de vérifier que c'est une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente. Il y a deux problèmes, l'un en 0, l'autre en $+\infty$. En 0, la fonction est prolongeable par continuité donc il n'y a pas de souci. En $+\infty$, on a :

   $$\frac{e^{-x}-e^{-tx}}{x} \sim_{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = o\left(e^{-x}\right),$$

   avec $\int^{+\infty} e^{-x}\,dx$ convergente. Ainsi $F(t)$ est bien définie pour tout $t \geq 1$.
4. On applique le théorème de dérivation sous le signe somme :
   - Dérivabilité : la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $[1,+\infty[$, de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = e^{-tx}$.

– Domination : pour tout couple $(x,t) \in]0,+\infty[\times[1,+\infty[$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| = e^{-tx} \leq e^{-x} = g(x),$$

avec g intégrable sur $[0,+\infty[$.

Ainsi F est dérivable sur $[1,+\infty[$, de dérivée :

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx = \left[-\frac{e^{-tx}}{t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{t}.$$

5. On trouve $F(1) = 0$, or $F(t) = \ln t + C$, avec $F(1) = \ln 1 + C = C$, donc :

$$\forall t \geq 1 \qquad F(t) = \ln t.$$

6. Si $0 < t \leq 1$, on a $1/t \geq 1$ et le changement de variable $u = x/t$ donne :

$$F(1/t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-x/t}}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tu} - e^{-u}}{u}\,du = -F(t).$$

Ainsi $F(t)$ est aussi défini pour $0 < t \leq 1$, avec $F(t) = -F(1/t) = -\ln(1/t) = \ln t$. Par conséquent F est tout simplement égale à la fonction logarithme népérien.

7. On effectue le changement de variable $u = ax$:

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\frac{b}{a}u}}{u}\,du = F(b/a) = \ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a.$$

IV. Lois de Laplace et de Cauchy

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi de Laplace, c'est-à-dire que X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de densité :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

1. La densité f est représentée figure A.10, à gauche.
2. Pour calculer la fonction de répartition F, on distingue deux cas, suivant le signe de x. Après calculs, on obtient :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction de répartition F est représentée figure A.10, à droite.

3. On commence par noter que X admet des moments de tout ordre puisque pour tout $k \geq 0$, on a :

$$\mathbb{E}|X^k| = \int_{\mathbb{R}} |x|^k f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,dx,$$

qui est convergente puisqu'au voisinage de $+\infty$, on a : $x^k e^{-x} = o(x^{-2})$.Pour ce concerne les moments d'ordre impair, on a alors :

$$\mathbb{E}[X^{2n+1}] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1}e^{-|x|}\,dx = 0,$$

puisque c'est l'intégrale d'une fonction impaire sur un domaine symétrique par rapport à 0.

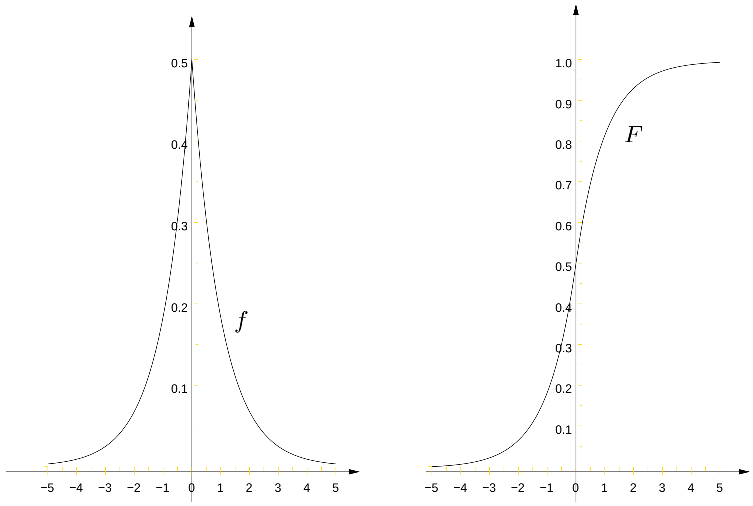

FIGURE A.10 – Densité et fonction de répartition d'une loi de Laplace.

4. Pour $n \geq 1$, on a tout d'abord par un argument de parité :

$$\mathbb{E}[X^{2n}] = \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x}\, dx,$$

et une première intégration par parties donne :

$$\mathbb{E}[X^{2n}] = [-x^{2n}e^{-x}]_0^{+\infty} + 2n \int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-x}\, dx = 2n \int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-x}\, dx,$$

puis une seconde :

$$\mathbb{E}[X^{2n}] = 2n[-x^{2n-1}e^{-x}]_0^{+\infty} + 2n(2n-1) \int_0^{+\infty} x^{2n-2} e^{-x}\, dx = 2n(2n-1)\mathbb{E}[X^{2n-2}].$$

Ainsi, de proche en proche, on obtient :

$$\mathbb{E}[X^{2n}] = (2n)!\mathbb{E}[X^0] = (2n)!\mathbb{E}[1] = (2n)! \qquad \forall n \geq 0.$$

5. La fonction caractéristique de X est la fonction Φ définie pour tout réel t par :

$$\Phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx.$$

(a) On scinde à nouveau l'intégrale en deux suivant le signe de x :

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{(it+1)x}\, dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{(it-1)x}\, dx.$$

Puisque t est réel, les quantités $(it+1)$ et $(it-1)$ ne peuvent être nulles et on peut utiliser la primitive de l'exponentielle complexe ;

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(it+1)x}}{it+1} \right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(it-1)x}}{it-1} \right]_0^{+\infty}.$$

Il reste à voir que :
$$\left|e^{(it+1)x}\right| = \left|e^{itx}\right| e^x = e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0,$$
et même chose en $+\infty$. Ainsi :
$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{it+1} - \frac{1}{it-1}\right) = -\frac{1}{(it-1)(it+1)} = \frac{1}{1+t^2}.$$

(b) De façon générale, on sait que si la fonction caractéristique Φ de la variable aléatoire X est $\mathcal{C}^\infty$ en 0, alors X admet des moments de tout ordre et on a la relation :
$$\forall n \geq 0 \qquad \Phi^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}[X^n].$$
Dans notre cas précis, puisque $\Phi(t) = 1/(1+t^2)$, Φ est clairement $\mathcal{C}^\infty$ et même développable en série entière en 0, avec :
$$\forall |t| < 1 \qquad \Phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}.$$
Et le lien entre coefficients du développement en série entière et dérivées successives à l'origine assure que :
$$\forall n \geq 0 \qquad \Phi^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si n est impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} n! & \text{si n est pair} \end{cases}$$
En rapprochant les deux formules obtenues pour $\Phi^{(n)}(0)$, on retrouve bien la nullité des moments d'ordres impairs et pour ceux d'ordre pair :
$$(-1)^n (2n)! = i^{2n}\mathbb{E}[X^{2n}] \Leftrightarrow \mathbb{E}[X^{2n}] = (2n)!$$

6. La fonction caractéristique $\Phi : t \mapsto 1/(1+t^2)$ est intégrable donc la formule d'inversion s'applique :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixt}}{1+t^2}\,dt \Leftrightarrow e^{-|x|} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixt}}{1+t^2}\,dt.$$

7. On considère une variable aléatoire Y qui suit une loi de Cauchy, c'est-à-dire que Y est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de densité :
$$g(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$
La fonction caractéristique de Y est par définition :
$$\Psi(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ity}}{\pi(1+y^2)}\,dy,$$
et de la question précédente on déduit :
$$\Psi(t) = e^{-|-t|} = e^{-|t|} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Bibliographie

[1] Françoise Boschet. *Exercices d'analyse : calcul intégral*. Masson, 1997.

[2] Christian Bourdarias. *Intégration et applications*. Format électronique, http ://www.lama.univ-savoie.fr/sitelama/Membres/pages_web/BOURDARIAS/, 2001.

[3] Pierre Del Moral. *Intégration, probabilités et statistiques*. Format électronique, http ://math1.unice.fr/ delmoral/master.html, 2004.

[4] Francine Delmer. *Les séries*. Dunod, 1995.

[5] Dominique Foata et Aimé Fuchs. *Calcul des probabilités*. Dunod, 1998.

[6] Jean Guégand, Jean-Louis Roque et Christian Lebœuf. *Cours d'analyse*. Ellipses, 1981.

[7] Dominique Liret et François Martinais. *Analyse 1ère année*. Dunod, 2003.

[8] Ernst Hairer et Gerhard Wanner. *L'analyse au fil de l'histoire*. Springer, 2000.

[9] Marc Briane et Gilles Pagès. *Théorie de l'intégration*. Vuibert, 2004.

[10] Andrey Kolmogorov et Sergei Fomine. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Ellipses , Mir, 3ème edition, 1994.

[11] Jean-François Le Gall. *Cours d'intégration et probabilités*. Format électronique, http ://www.dma.ens.fr/edition/NotesCours/index.html, 2003.

[12] Léonard Gallardo. *Cours de calcul intégral*. Université de Bretagne Occidentale, 1994.

[13] Bernard Gostiaux. *Cours de mathématiques spéciales. Tome 2 : topologie, analyse réelle*. PUF, 1993.

[14] Bernard Gostiaux. *Cours de mathématiques spéciales. Tome 3 : analyse fonctionnelle et calcul différentiel*. PUF, 1993.

[15] André Gramain. *Intégration*. Hermann, 1994.

[16] Jacques Harthong. *Cours d'analyse mathématique*. Format électronique, http ://moire4.u-strasbg.fr/bouquins/analyse/tabmat2.htm, 2001.

[17] El Haj Laamri. *Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions*. Dunod, 2001.

[18] François Laudenbach. *Calcul différentiel et intégral*. Editions de l'Ecole polytechnique, 2000.

[19] Bernard Petit. *Cours d' intégration*. Université de Bretagne Occidentale, 1998.

[20] Jacques Pichon. *Intégrale de Riemann, intégrale généralisée*. Ed. Marketing, 1990.

[21] Charles Suquet. *Intégration, analyse de Fourier, probabilités*. Format électronique, http ://www-gat.univ-lille1.fr/ suquet/, 2003.