Université de Rennes 2
Master de Statistiques

Année 2006/2007
Second Semestre

Processus markoviens de sauts

Arnaud Guyader

Table des matières

1 Cours **1**
1.1 Généralités 1
1.2 Processus de Poisson 8
1.3 Distribution asymptotique 19
1.4 Processus de vie et de mort 25
1.4.1 Modèle général 25
1.4.2 Files $M/M/1$ 28
1.4.3 Files $M/M/s$ 33

2 Exercices **39**

A Annales **63**

Chapitre 1

Cours

Introduction

Une chaîne de Markov en temps continu est un processus aléatoire $(X_t)_{t\geq 0}$ dont l'évolution future est indépendante du passé sachant l'état présent. Par rapport aux chaînes de Markov en temps discret $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la différence se situe dans le fait que la chaîne peut changer d'état à n'importe quel moment de $T = [0, +\infty[$ et non uniquement à des instants entiers. Lorsque le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ prend ses valeurs dans un espace d'états E au plus dénombrable, typiquement E fini ou $E = \mathbb{N}$, on parle encore de processus markovien de sauts.

1.1 Généralités

Les processus stochastiques servent à rendre compte de phénomènes dépendant à la fois du temps et du hasard. On considère donc un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une fonction

$$X : \left\{ \begin{array}{cl} \mathbb{R}^+ \times \Omega & \to E \\ (t, \omega) & \mapsto X(t, \omega) \end{array} \right.$$

représentant l'état du système étudié : $X(t, \omega)$, plus souvent noté $X_t(\omega)$, est donc l'état du système à la date t pour une réalisation particulière ω.

Exemples.

- Une machine est ou bien en bon état de fonctionnement, état 1, ou bien en panne, état 0. Lorsqu'elle est en panne, on appelle un réparateur, qui met un temps aléatoire à la réparer. Dans ce cas $E = \{0, 1\}$ est un espace d'états fini. Voir figure 1.1 en haut à gauche.
- On observe les arrivées à un péage d'autoroutes à partir d'un instant initial $t = 0$. Dans ce cas l'espace d'états est $E = \mathbb{N}$ et chaque trajectoire est croissante. Voir figure 1.1 en haut à droite.
- On étudie l'évolution d'une population au cours du temps : celle-ci peut augmenter (naissance) ou diminuer (décès). Ici encore l'espace d'états est $E = \mathbb{N}$. Voir figure 1.1 en bas à gauche, où on a représenté l'évolution pour deux populations différentes, donc deux trajectoires $(X_t(\omega_1))_{0\leq t\leq T}$ et $(X_t(\omega_2))_{0\leq t\leq T}$.
- Une puce se déplace par sauts, tous de même amplitude, sur une droite, avec choix de la direction au hasard et à des instants aléatoires. On s'intéresse à sa trajectoire au cours du temps. Dans ce cas on peut considérer comme espace d'états $E = \mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs. Voir figure 1.1 en bas à droite.

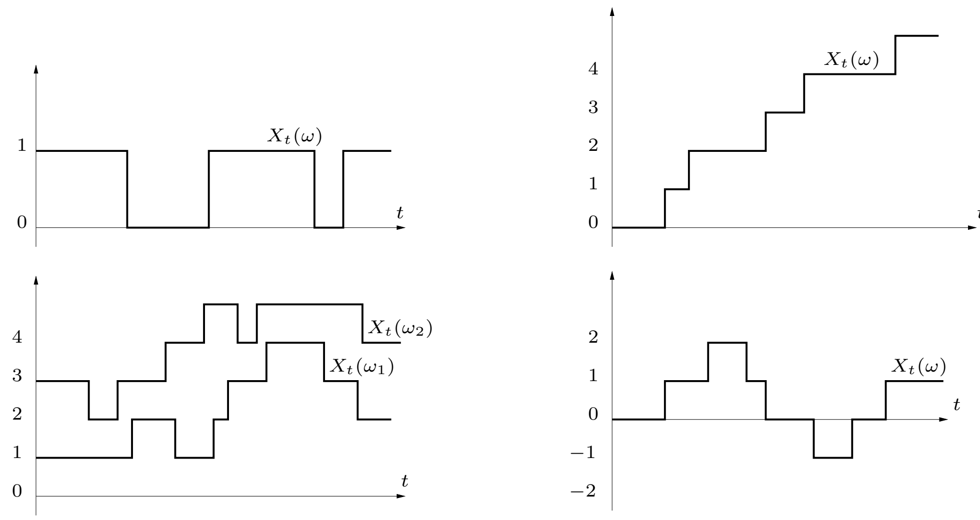

Figure 1.1 – Exemples de trajectoires de processus aléatoires.

Dans ces situations, on s'intéressera surtout à la convergence en loi du processus $(X_t)_{t\geq 0}$, c'est-à-dire qu'on veut savoir s'il existe une loi de probabilité $\pi = [\pi_0, \pi_1, \ldots]$ sur E telle que :

$$\forall i \in E \qquad \mathbb{P}(X_t = i) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \pi_i$$

Si c'est le cas, on dira que π est la loi d'équilibre du système. Néanmoins, de façon plus générale, il faut toujours avoir en tête les deux points de vue :

- trajectoriel : si ω est fixé, on étudie une trajectoire particulière $(X_t(\omega))_{t\geq 0}$ du système. Penser par exemple à l'évolution du nombre de personnes dans une file d'attente au cours du temps, ou à la trajectoire d'une particule évoluant dans l'espace E.
- temporel : si la date t est fixée, l'état du système est une variable aléatoire $X_t(\omega)$ à valeurs dans E. On peut alors par exemple s'intéresser à la loi de cette variable aléatoire. Penser par exemple à la loi du nombre de personnes dans une file d'attente au bout d'une heure.

On s'intéresse ici à un cas particulier très classique de processus stochastiques : ceux qui, d'une part, sont à valeurs dans un espace d'états au plus dénombrable E et, d'autre part, possèdent la propriété de Markov : l'évolution future est indépendante du passé sachant l'état présent.

Définition 1.1 (Chaîne de Markov en temps continu)
Le processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov en temps continu si :

$$\forall\ 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t \qquad \mathbb{P}(X_t = x | X_{t_0} = x_0, \ldots, X_{t_n} = x_n) = \mathbb{P}(X_t = x | X_{t_n} = x_n).$$

Notation. Dans la suite, afin de fixer les idées, on suppose que $E = \mathbb{N}$. Dans ce cas, la loi de la variable aléatoire X_t est donnée par le vecteur ligne (infini) de probabilité :

$$p(t) = [p_0(t), p_1(t), \ldots] = [\mathbb{P}(X_t = 0), \mathbb{P}(X_t = 1), \ldots].$$

Les probabilités de transition $p(t, t')$ sont les matrices :

$$p_{ij}(t, t') = \mathbb{P}(X_{t'} = j | X_t = i).$$

En général la distribution initiale du processus $\mu = p(0)$ est donnée. La loi à tout instant est alors complètement déterminée par :

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad p_j(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i(0)p_{ij}(0,t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu_i p_{ij}(0,t).$$

Dans de nombreux modèles, les transitions entre deux instants t et t' ne dépendent pas des dates t et t', mais seulement du temps écoulé entre ces deux dates, c'est-à-dire de $(t'-t)$. C'est ce qu'on appelle l'homogénéité (temporelle) de la chaîne.

Définition 1.2 (Chaîne de Markov homogène)
La chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ est homogène si les probabilités de transition $p(t,t')$ ne dépendent que de $(t'-t)$. On note alors :

$$p_{ij}(t) = p_{ij}(0,t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i).$$

Convention : dans toute la suite, on ne considérera que des processus homogènes.

On a bien sûr pour tout entier i et tout réel positif t :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} p_{ij}(t) = 1.$$

Par ailleurs, connaissant les probabilités de transition du système pour des durées t et t', on peut en déduire les probabilités de transition du système sur une durée $(t+t')$.

Théorème 1.1 (Equations de Chapman-Kolmogorov)
Les transitions de probabilités satisfont les équations suivantes, dites de Chapman-Kolmogorov : pour tout couple d'entiers $(i,)j$, pour tous réels positifs t et t' :

$$p_{ij}(t+t') = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{ik}(t)p_{kj}(t').$$

Preuve. Il suffit de remarquer que :

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X_t = k\},$$

qui est une partition de l'espace d'états. De fait, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$p_{ij}(t+t') = \mathbb{P}(X_{t+t'} = j | X_0 = i) = \frac{\mathbb{P}(X_{t+t'} = j, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(X_{t+t'} = j, X_t = k, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)},$$

et en reconditionnant :

$$p_{ij}(t+t') = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{t+t'} = j | X_t = k, X_0 = i)\mathbb{P}(X_t = k | X_0 = i).$$

Or la propriété de Markov assure que :

$$\mathbb{P}(X_{t+t'} = j | X_t = k, X_0 = i) = \mathbb{P}(X_{t+t'} = j | X_t = k) = p_{kj}(t'),$$

la dernière égalité venant de l'homogénéité de la chaîne. D'où finalement :

$$p_{ij}(t+t') = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{kj}(t')p_{ik}(t).$$

■

Notation. Il est alors naturel d'introduire les matrices (infinies) de transition $P(t)$ définies par :

$$P(t) = [p_{ij}(t)]_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$$

Les équations de Chapman-Kolmogorov se résument alors comme suit : pour tous réels positifs t et t' :

$$P(t+t') = P(t)P(t').$$

On peut donc voir une chaîne de Markov en temps continu comme une famille de matrices de transition $(P(t))_{t\geq 0}$ satisfaisant l'équation ci-dessus.

Néanmoins, il convient d'ajouter une hypothèse de régularité, à savoir :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2 \qquad p_{ij}(t) \xrightarrow[t\to 0]{} \delta_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{array}\right. ,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{t\to 0} P(t) = I,$$

où I est la matrice identité. Ceci signifie que les trajectoires sont continues à droite en $t=0$, autrement dit il n'y pas de saut instantané à l'origine. Comme le processus est homogène, c'est aussi dire que les trajectoires du processus sont continues à droite en tout point $t\geq 0$.

On parle alors de processus de Markov standard. On démontre que cette condition implique, pour tout couple (i,j), l'aspect $\mathcal{C}^1$ des fonctions $p_{ij}(t)$, c'est-à-dire de la matrice de transition $P(t)$. Pour dériver la matrice P en $t=0$, il suffit de dériver terme à terme ses coefficients $p_{ij}(t)$ en $t=0$. C'est ainsi qu'on définit le générateur infinitésimal, ou matrice de sauts, qui va jouer un rôle crucial dans la suite de l'étude.

Définition 1.3 (Générateur infinitésimal)
La matrice A, définie par :

$$A = P'(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{P(t)-I}{t},$$

est appelée générateur infinitésimal, ou matrice de sauts, de la chaîne de Markov en temps continu.

Interprétation. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{lll} a_{ij} & = \lim_{t\to 0^+} \frac{p_{ij}(t)}{t} & \text{si } i\neq j \\ a_{ii} & = \lim_{t\to 0^+} \frac{p_{ii}(t)-1}{t} & \text{sinon} \end{array}\right.$$

Et on peut écrire les développements limités à l'ordre 1 :

$$p_{ij}(t) = a_{ij}t + o(t).$$

Si la chaîne est dans l'état i initialement, la probabilité qu'elle soit dans l'état j à l'instant t est environ $a_{ij}t$, avec t "petit". Le nombre a_{ij} est alors appelé taux de transition instantané de l'état i vers l'état j. De même, on a :

$$1 - p_{ii}(t) = -a_{ii}t + o(t).$$

Si la chaîne est dans l'état i initialement, la probabilité qu'elle l'ait quitté à l'instant t est environ $-a_{ii}t$. Le coefficient positif $-a_{ii}$ est le taux instantané de départ de l'état i.

Par ailleurs, pour tout i fixé et pour tout $t \geq 0$, la somme des $p_{ij}(t)$ fait 1. Avec les développements limités ci-dessus, on a donc formellement :

$$1 = \sum_j p_{ij}(t) = 1 + \left(-a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij}\right) t + o(t)$$

Il s'ensuit que : :

$$\forall i \in \mathbb{N} \qquad -a_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij}.$$

En d'autres termes, la somme de chaque ligne de A est **nulle**. Résultat à ne pas confondre avec celui concernant les matrices de transition $P(t)$, pour lesquelles la somme sur chaque ligne vaut 1. Concrètement, avec l'interprétation donnée ci-dessus des a_{ij}, c'est simplement dire que la somme des taux de transition de l'état i vers l'ensemble des autres états j est égale au taux de départ de l'état i. La relation précédente n'est bien sûr valable que si la série $\sum_{j \neq i} a_{ij}$ est convergente, ce que nous supposons dans la suite.

Cas Particulier : Si pour un indice i, on a $\sum_{j \neq i} a_{ij} = 0$, donc aussi $a_{ii} = 0$, cela signifie que si on arrive dans l'état i, on ne le quitte plus : on dit alors que l'état i est absorbant.

Reprenons maintenant la forme matricielle de Chapman-Kolmogorov, avec $t' = h$, et dérivons par rapport à h :

$$P(t+h) = P(t)P(h) \Rightarrow P'(t+h) = P(t)P'(h).$$

En $h = 0$, ceci donne : $P'(t) = P(t)A$. Puisqu'on peut inverser les rôles de t et h, on a de façon générale :

$$\forall t \geq 0 \qquad P'(t) = AP(t) = P(t)A.$$

Ceci se traduit pour les probabilités de transition par :

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{ik} p_{kj}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{ik}(t) a_{kj}.$$

Supposons une minute que $P(t)$ ne soit pas matricielle, mais scalaire : la fonction $P(t)$ solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} p(0) & = 1 \\ p'(t) & = ap(t) \end{cases}$$

est tout simplement la fonction exponentielle :

$$p(t) = e^{at}.$$

Il en va de même pour le système différentiel ci-dessus. Il convient simplement de définir l'exponentielle d'une matrice carrée.

Définition 1.4 (Exponentielle de matrice)
La série $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$ est convergente dans l'espace des matrices. Sa somme est appelée exponentielle de la matrice A :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

L'existence de l'exponentielle d'une matrice ne pose aucun problème lorsque celle-ci est de taille finie. On peut aussi la justifier lorsque A est de taille infinie, du moins sous certaines conditions qui seront vérifiées dans les situations qui vont nous intéresser par la suite.

Propriétés 1.1

- *Si A est diagonale, à coefficients diagonaux $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$, alors e^A est diagonale, à coefficients diagonaux $e^{\lambda_0}, e^{\lambda_1}, \ldots$*
- *Si A est diagonalisable, sous la forme $A = Q\Delta Q^{-1}$, alors $e^A = Qe^{\Delta}Q^{-1}$.*
- *Si A et B sont deux matrices telles que $AB = BA$, alors : $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.*

Preuve.

- Si A est diagonale, à coefficients diagonaux $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$, alors pour tout n, A^n est diagonale, de coefficients diagonaux $\lambda_0^n, \lambda_1^n, \ldots$ Ainsi pour tout $N \geq 0$, $\sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!}$ est une matrice diagonale, de coefficients diagonaux $\sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda_0^n}{n!}, \sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda_1^n}{n!}, \ldots$ et on reconnaît des sommes partielles de séries exponentielles :
$$\forall i \in E \qquad \sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda_i^n}{n!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} e^{\lambda_i}.$$
Ainsi e^A est diagonale, à coefficients diagonaux $e^{\lambda_0}, e^{\lambda_1}, \ldots$
- Si A est diagonalisable, sous la forme $A = Q\Delta Q^{-1}$, alors pour tout n, on a :
$$A^n = Q\Delta^n Q^{-1},$$
d'où il vient :
$$\sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!} = Q\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\Delta^n}{n!}\right)Q^{-1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} Qe^{\Delta}Q^{-1},$$
c'est-à-dire :
$$e^A = Qe^{\Delta}Q^{-1}.$$
- Si A et B commutent, le résultat se prouve de la même façon que pour l'exponentielle de nombres réels ou complexes :
$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{B^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}\right).$$
Mais puisque A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = (A+B)^n,$$
ce qui donne dans l'expression d'origine :
$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{B^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(A+B)^n}{n!}.$$
Il reste alors à faire tendre N vers l'infini : le membre de gauche tend vers $e^A e^B$ tandis que celui de droite tend vers e^{A+B}, d'où l'égalité. Et puisque $A + B = B + A$, la preuve est finie.

$\blacksquare$

Exemple. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Grâce à trois méthodes différentes :

1. En calculant directement les puissances successives A^n ;
2. En diagonalisant A ;
3. En remarquant que $A = U - 2I$, où U est la matrice uniquement composée de 1,

montrer qu'on obtient pour son exponentielle :

$$e^A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + e^{-2} & 1 - e^{-2} \\ 1 - e^{-2} & 1 + e^{-2} \end{bmatrix}.$$

Remarquons maintenant que si les matrices de transition $P(t)$ sont définies pour tout réel t par :

$$P(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!},$$

on a $P(0) = I$ et par dérivation terme à terme d'une série normalement convergente :

$$P'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} = A \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) = AP(t),$$

mais aussi :

$$P'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) A = P(t)A,$$

c'est-à-dire qu'on a obtenu une solution de notre système d'équations différentielles avec condition initiale.

Proposition 1.1 (Solution du système différentiel)
L'unique solution du système différentiel avec condition initiale

$$\begin{cases} P(0) & = I \\ P'(t) & = AP(t) = P(t)A \end{cases}$$

est $P(t) = e^{tA}$.

Preuve. Il reste à prouver que $P(t) = e^{tA}$ est la seule solution du système différentiel avec condition initiale. Or si $M(t)$ est une autre solution, considérons $F(t) = M(t)e^{-tA}$: c'est une fonction matricielle dérivable par rapport à t en tant que produit de fonctions matricielles dérivables. Pour tout $t \geq 0$, la dérivée s'obtient comme dans le cas scalaire :

$$F'(t) = M'(t)e^{-tA} + M(t)(e^{-tA})' = M(t)Ae^{-tA} + M(t)(-A)e^{-tA} = 0,$$

c'est-à-dire que $F(t)$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc :

$$F(t) = F(0) = M(0)e^0 = M(0) \times I = M(0),$$

or la condition initiale du système différentiel impose $M(0) = I$, donc :

$$\forall t \geq 0 \qquad M(t)e^{-tA} = I \;\Rightarrow\; M(t) = e^{tA},$$

la dernière égalité venant du fait que pour toute matrice B, la matrice e^B est inversible, d'inverse e^{-B}, puisque B et $-B$ commutant, on peut appliquer la formule :

$$e^B \times e^{-B} = e^{B-B} = e^0 = I.$$

■

Si on s'intéresse à la loi de X_t, toujours notée en vecteur ligne $p(t) = [\mathbb{P}(X_t = 0), \mathbb{P}(X_t = 1), \dots]$, on en déduit aussitôt le résultat suivant.

Corollaire 1.1 (Loi de X_t)
La loi à la date t de la chaîne de Markov en temps continu $(X_t)_{t\geq 0}$, de loi initiale μ et de générateur infinitésimal A, est donnée par :

$$p(t) = \mu e^{tA}.$$

En particulier, on a à tout instant t : $p'(t) = p(t)A$.

Exemple. Le fonctionnement d'une machine est modélisé par un processus de sauts à 2 états, 0 (panne) ou 1 (bon état de fonctionnement), de générateur :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Supposons qu'à l'instant initial la machine est en bon état de fonctionnement, c'est-à-dire que :

$$\mu = [\mathbb{P}(X_0 = 0), \mathbb{P}(X_0 = 1)] = [0, 1],$$

alors à l'instant t, la loi du processus $p(t) = [\mathbb{P}(X_t = 0), \mathbb{P}(X_t = 1)]$ donne la probabilité que la machine soit en panne ou bon état de fonctionnement et vaut, en remplaçant A par tA dans l'exemple ci-dessus :

$$p(t) = \mu e^{tA} = [0, 1]\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 + e^{-2t} & 1 - e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} & 1 + e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}[1 - e^{-2t}, 1 + e^{-2t}].$$

On a donc convergence à vitesse exponentielle de la loi du processus vers l'équiprobabilité entre les 2 états : la machine est initialement en bon état de marche, mais si on l'observe au bout d'un certain temps, elle a autant de chances d'être en panne qu'en bon état. Ceci pouvait se voir directement sur le générateur A : le taux de transition vers l'autre état est égal au taux de sur-place.

Ainsi, résoudre le système différentiel $p'(t) = p(t)A$ revient à chercher l'exponentielle de la matrice A, de taille éventuellement infinie. Ceci est impossible dans le cas général. C'est faisable lorsque l'espace d'états E est fini et pas trop grand (quelques centaines d'états) ou, dans le cas infini, lorsque la matrice A est très simple. C'est le cas de l'exemple que nous allons étudier maintenant : le processus de Poisson.

1.2 Processus de Poisson

On a vu qu'une chaîne de Markov en temps continu est complètement définie à partir de son générateur infinitésimal A et de la distribution initiale $p(0)$.

Définition 1.5 (Processus de Poisson)
Un processus de Poisson est une chaîne de Markov en temps continu $(N_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *de générateur infinitésimal* A *(cf. figure 1.2) :*

$$\begin{cases} a_{ii} & = -\lambda \\ a_{i,i+1} & = \lambda \\ a_{ij} & = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On dit alors que le processus est de densité, ou de taux, λ.

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ & -\lambda & \lambda & & \\ & & -\lambda & \lambda & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

FIGURE 1.2 – Générateur infinitésimal d'un processus de Poisson.

Remarques.
- Concernant la condition initiale, on supposera généralement que $N_0 = 0$, c'est-à-dire :

$$p(0) = \delta_0 = [1, 0, \dots].$$

- On note ce processus $(N_t)_{t\geq 0}$ plutôt que $(X_t)_{t\geq 0}$, car N_t correspond souvent au nombre d'événements qui sont survenus entre l'instant 0 et l'instant t, par exemple le nombre de voitures arrivant à un péage, le nombre d'appels à un central téléphonique, les émissions de particules radioactives. C'est pourquoi on l'appelle aussi processus de comptage.
- L'un des intérêts de ce processus est qu'on peut explicitement calculer de nombreuses quantités le concernant.

On représente schématiquement ce processus par le graphe de transition de la figure 1.3. Ce graphe de transition se déduit directement du générateur infinitésimal A. C'est une notion très classique pour l'étude des processus de sauts, nous y reviendrons plus loin.

FIGURE 1.3 – Processus de Poisson.

Avec des notations évidentes, on a donc : $A = \lambda U - \lambda I$. Puisque I et U commutent, on a :

$$e^{At} = e^{-\lambda t I} e^{\lambda t U},$$

mais il est clair que $e^{-\lambda t I} = e^{-\lambda t} I$, donc :

$$e^{At} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t U} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} U^n.$$

D'où les fonctions probabilités de transition :

$$p_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} (U^n)_{ij}.$$

Or U a des puissances successives très simples : les coefficients non nuls sont tous au-dessus de la diagonale, donc :

$$p_{ij}(t) = 0 \qquad \forall j < i,$$

et pour $j \geq i$, la seule matrice U^n pour laquelle le terme (i,j) est non nul est U^{j-i}. Ceci donne :

$$p_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} \qquad \forall j \geq i.$$

Interprétation. Supposons toujours que $N_0 = 0$. N_t représente le nombre d'événements survenus entre l'instant initial 0 et l'instant t, par exemple le nombre de clients arrivés dans une file d'attente. Les calculs précédents montrent que pour tout $j \geq 0$:

$$\mathbb{P}(N_t = j) = p_{0j}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!},$$

c'est-à-dire que, à t fixé, la variable aléatoire N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt. Ceci explique pourquoi on l'appelle processus de Poisson.

Proposition 1.2 (Loi de N_t)
Si $N_0 = 0$, alors pour tout $t \geq 0$, $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, c'est-à-dire avec les notations de la section précédente :

$$\forall t \geq 0 \qquad p(t) = \mathcal{P}(\lambda t).$$

En particulier, le nombre moyen d'événements entre 0 et t est proportionnel à t :

$$E[N_t] = \lambda t.$$

Exemple. On considère un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ de taux $\lambda = 2$. La variable aléatoire N_t représente par exemple le nombre d'appels à un central téléphonique entre les dates 0 et t. Au bout de 1 unité de temps, ce nombre d'appels est N_1 et suit donc une loi de Poisson de paramètre 2, représentée figure 1.4 à gauche. Au bout de 10 unités de temps, le nombre d'appels est N_{10} et suit donc une loi de Poisson de paramètre 20, représentée figure 1.4 à droite.

Remarque. Le diagramme en bâtons de droite rappelle la distribution en cloche typique d'une loi normale, ce qu'on justifie facilement comme suit : si deux variables $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\beta)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\alpha + \beta)$. Or, au bout de n unités de temps, $N_n \sim \mathcal{P}(2n)$ et on peut voir $N_n = X_1 + \cdots + X_n$ comme la somme de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d., pour faire court) suivant une loi de Poisson de paramètre 2. Le théorème de la limite centrale dit alors que la loi de N_n "ressemble" à celle d'une loi normale de moyenne $\mathbb{E}[N_n] = n\mathbb{E}[X_1] = 2n$ et de variance $\mathrm{Var}(N_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = 2n$. Ceci explique la forme en cloche. Pour autant, puisque $\mathbb{E}[N_n]$ et $\mathrm{Var}(N_n)$ tendent vers l'infini, on n'a pas stricto sensu convergence en loi de N_n lorsque n tend vers l'infini.

Soit $j \geq 0$ fixé. On s'intéresse donc maintenant à la convergence en loi du processus. Si on fait tendre le temps t vers l'infini, on a :

$$p_j(t) = \mathbb{P}(N_t = j) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0,$$

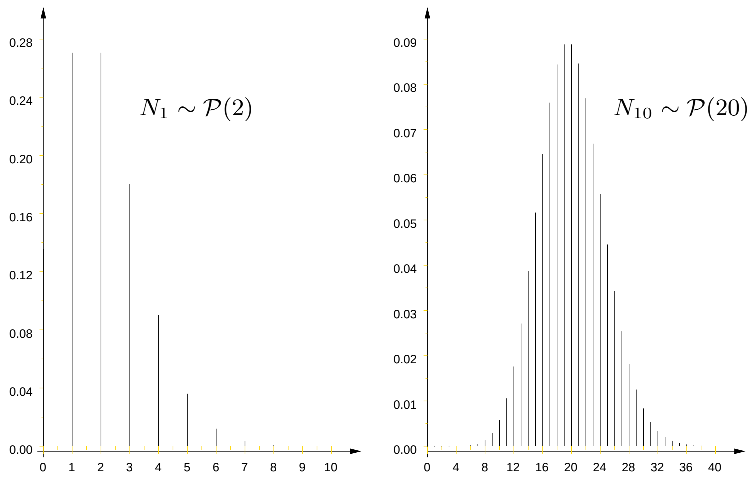

FIGURE 1.4 – Distributions des nombres d'appels au bout de 1 et de 10 unités de temps.

puisque l'exponentielle l'emporte sur la puissance. Autrement dit il n'y a pas convergence en loi du processus $(N_t)_{t\geq 0}$. Si on repense à la file d'attente, ce n'est pas étonnant : au fur et à mesure que le temps s'écoule, il y a eu de plus en plus de clients à arriver, ceux-ci s'accumulent et leur nombre $N(t)$ tend vers l'infini. Pour qu'il y ait convergence en loi, il faudrait qu'un serveur permette d'évacuer les clients au fur et à mesure. Nous y reviendrons lors de l'étude des processus de vie et de mort.

Nous pouvons préciser ce qui se passe. Le nombre d'événements entre deux instants t_1 et t_2 est $N(t_2) - N(t_1)$. Puisque le processus est homogène, ce nombre suit la même loi que $N(t_2 - t_1)$, c'est-à-dire une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_2 - t_1)$. En particulier, le nombre d'événements entre deux unités de temps suit une loi de Poisson de paramètre λ. Il y a donc en moyenne λ arrivées par unité de temps. Ceci permet de préciser à quelle vitesse le nombre d'arrivées tend vers l'infini.

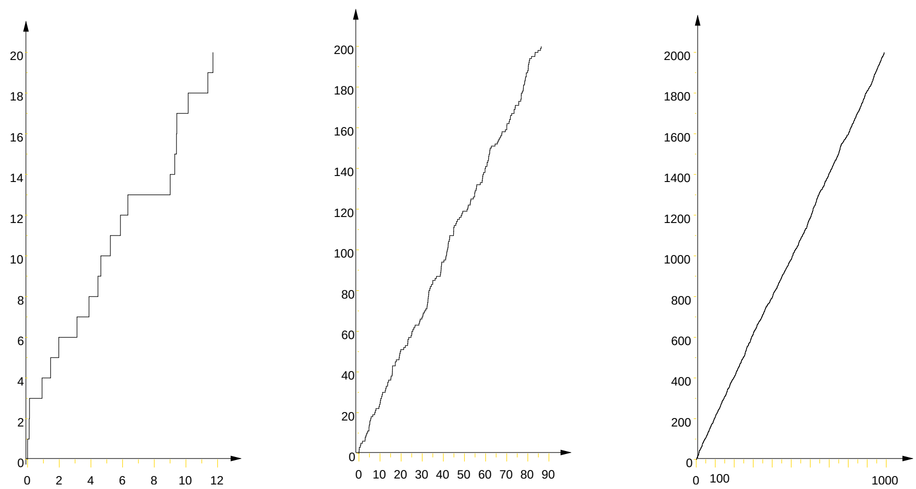

FIGURE 1.5 – Illustration du comportement asymptotique de N_t.

Proposition 1.3 (Comportement asymptotique de N_t)
Si $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ, alors :

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} \lambda.$$

Preuve. Supposons tout d'abord que $t = n$ est un entier. Notons $X_1 = (N_1 - N_0)$ le nombre d'arrivées dans l'intervalle $[0,1]$, $X_2 = (N_2 - N_1)$ le nombre d'arrivées dans l'intervalle $[1,2]$, ..., $X_n = (N_n - N_{n-1})$ le nombre d'arrivées dans l'intervalle $[n-1,n]$. On peut alors écrire (comme on l'a déjà fait ci-dessus) :

$$\frac{N_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n},$$

avec les variables aléatoires X_i i.i.d. de loi de Poisson de paramètre λ : on dit aussi que le processus de Poisson est à accroissements indépendants. La loi forte des grands nombres assure alors que :

$$\frac{N_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1] = \lambda.$$

Dans le cas général, si t n'est pas entier, en notant $\lfloor t\rfloor$ sa partie entière et $\lceil t\rceil$ sa partie entière plus un, on peut utiliser la croissance du processus $(N_t)_{t\geq 0}$ pour écrire que :

$$\frac{\lfloor t\rfloor}{t}\frac{N_{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor} \leq \frac{N_t}{t} \leq \frac{\lceil t\rceil}{t}\frac{N_{\lceil t\rceil}}{\lceil t\rceil}.$$

Or par le point précédent, on a d'une part les convergences presque sûres :

$$\frac{N_{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor} \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} \lambda \qquad \text{et} \qquad \frac{N_{\lceil t\rceil}}{\lceil t\rceil} \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} \lambda,$$

et d'autre part :

$$\frac{\lfloor t\rfloor}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\lceil t\rceil}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1.$$

On en déduit le résultat annoncé.

■

Remarque. Grosso modo, ce résultat dit que le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ va vers plus l'infini à la vitesse λt. Si on reprend $\lambda = 2$, on a représenté figure 1.5 trois trajectoires de processus de Poisson sur des intervalles de temps d'une dizaine, d'une centaine et d'un millier d'unités de temps. On a aussi représenté figure 1.6 la convergence presque sûre de N_t/t vers $\lambda = 2$.

On va maintenant s'intéresser aux durées d'inter-arrivées entre deux clients dans la file d'attente. Supposons toujours que $N_0 = 0$ et appelons T la date aléatoire d'arrivée du premier client.

Proposition 1.4 (Distribution de T)
La date d'arrivée T du premier client est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre λ : $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Plus généralement, si on observe la file à un instant t_0, la date d'arrivée T du prochain client suit une loi exponentielle de paramètre λ translatée de t_0, c'est-à-dire :

$$\forall t \geq t_0 \qquad \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Preuve. On a pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(N_t > 0) = 1 - \mathbb{P}(N_t = 0).$$

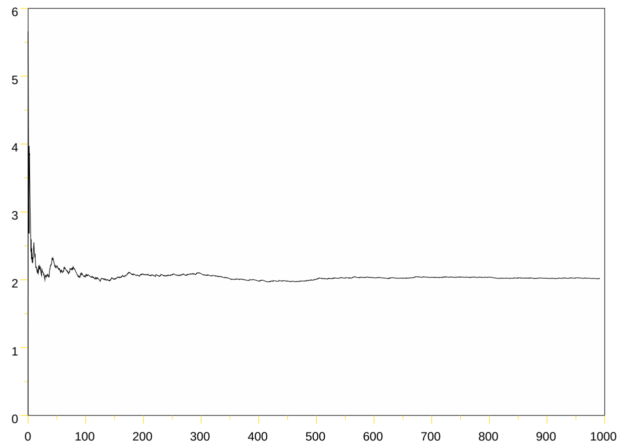

Figure 1.6 – Illustration de la convergence presque sûre de N_t/t vers $\lambda = 2$.

Or $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, donc :

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Ainsi T a la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ, i.e. $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$. De façon plus générale, plaçons-nous à l'instant t_0 : le nombre de clients dans le service est $N_{t_0} = i$. Appelons T l'instant d'arrivée du prochain client, alors :

$$\mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(N_t - N_{t_0} > 0 | N_{t_0} = i) = 1 - \mathbb{P}(N_t - N_{t_0} = 0 | N_{t_0} = i).$$

Mais puisque le processus est markovien, on sait que :

$$\mathbb{P}(N_t - N_{t_0} = 0 | N_{t_0} = i) = \mathbb{P}(N_{t-t_0} = 0 | N_0 = i) = p_{ii}(t - t_0) = e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Ceci donne bien le résultat annoncé.

■

Remarques.

– Si $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 2$, la date d'arrivée T du premier client suit donc une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$, dont la densité est représentée figure 1.7.
– On a donc $E[T] = \frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire qu'en moyenne un client arrive toutes les $\frac{1}{\lambda}$ unités de temps. Ceci est à mettre en parallèle avec le résultat vu auparavant sur la loi de N_1 : sur une unité de temps, il arrive en moyenne λ clients.
– Le résultat précédent a ceci de notable : quel que soit l'instant auquel on commence à observer la file d'attente (i.e. la date à laquelle on met le chronomètre en marche), l'instant du prochain événement suit une loi exponentielle de paramètre λ. Ceci est lié à la propriété dite "d'absence de mémoire" ou "de non-vieillissement" de la loi exponentielle.

Proposition 1.5 (Absence de mémoire)
Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors pour tous nombres positifs t_0 et t :

$$\mathbb{P}(X > t_0 + t | X > t_0) = \mathbb{P}(X > t).$$

Réciproquement, les lois exponentielles sont sur $\mathbb{R}^+$ les seules lois continues à vérifier cette propriété.

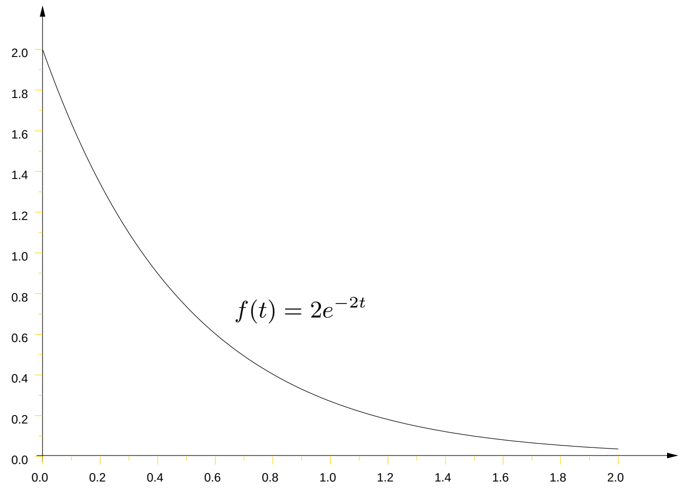

FIGURE 1.7 – Densité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

Preuve. Notons F la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ, c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \lambda e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u)\, du = (1 - e^{-\lambda t})\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t),$$

d'où l'on déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty]}(t).$$

Donc quels que soient t_0 et t positifs, on a :

$$\mathbb{P}(X > t_0 + t | X > t_0) = \frac{\mathbb{P}(\{X > t_0 + t\} \cap \{X > t_0\})}{\mathbb{P}(X > t_0)} = \frac{\mathbb{P}(X > t_0 + t)}{\mathbb{P}(X > t_0)},$$

c'est-à-dire avec la formule ci-dessus :

$$\mathbb{P}(X > t_0 + t | X > t_0) = \frac{e^{-\lambda(t+t_0)}}{e^{-\lambda t_0}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t).$$

Réciproquement, soit X une variable aléatoire positive et continue, c'est-à-dire de fonction de répartition F continue, vérifiant cette propriété. Par les mêmes calculs que ci-dessus, ceci signifie que pour tous les nombres positifs t_0 et t, on a :

$$1 - F(t_0 + t) = (1 - F(t_0))(1 - F(t)),$$

ou encore, en notant $G(t) = 1 - F(t) = \mathbb{P}(X > t)$ la fonction de survie de X :

$$G(t_0 + t) = G(t_0)G(t).$$

Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$G\left(\frac{1}{n}\right) = P\left(X > \frac{1}{n}\right) > 0,$$

d'où on déduit que :

$$G(1) = G\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \left(G\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n > 0.$$

Donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\mathbb{P}(X > 1) = G(1) = e^{-\lambda}$. En raisonnant comme on vient de faire, on voit que pour tout couple d'entiers positifs p et q, on a :

$$G\left(\frac{p}{q}\right) = G(1)^{\frac{p}{q}} = e^{-\lambda\frac{p}{q}},$$

c'est-à-dire que pour tout rationnel r positif, on a $G(r) = e^{-\lambda r}$. Mais puisque F est supposée continue, il en va de même pour $G = 1-F$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, pour x réel positif arbitraire, il suffit alors de considérer une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ de rationnels positifs de limite x pour avoir :

$$G(x) = \lim_{n\to+\infty} G(r_n) = \lim_{n\to+\infty} e^{-\lambda r_n} = e^{-\lambda x}.$$

Ainsi, pour tout x positif, on a obtenu $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. C'est exactement dire que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

■

Revenons à nos poissons : considérons la file vide à l'instant initial et notons $T_1, \dots, T_n$ les instants successifs d'arrivée des n premiers clients. D'après ce qui vient d'être dit, les durées inter-arrivées $I_1 = T_1, I_2 = T_2 - T_1, \dots, I_{100} = T_{100} - T_{99}$ suivent donc des lois exponentielles de paramètre λ. Par la propriété de Markov, ces variables sont de plus indépendantes.

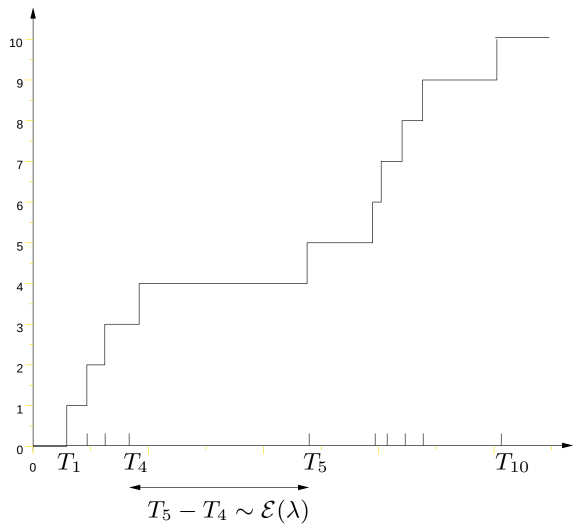

FIGURE 1.8 – Les durées inter-arrivées sont des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Simulation. Pour simuler un processus de Poisson d'intensité λ, il suffit donc de simuler des variables aléatoires i.i.d. $I_1, \dots, I_n$ suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Les dates d'arrivées des n premiers clients sont alors : $T_1 = I_1, T_2 = I_1+I_2, \dots, T_n = I_1+\dots+I_n$ (voir figure 1.8).

On peut alors préciser la loi de la date d'arrivée du n-ème client.

Proposition 1.6 (Date du n-ème événement)
Soit T_n la date du n-ème événement d'un processus de Poisson d'intensité λ. La variable aléatoire T_n suit une loi Gamma de paramètres (n, λ), de densité :

$$f_{T_n}(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t).$$

On note ceci : $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Remarque. On a représenté figure 1.9 les densités des lois $\Gamma(3, 2)$ (à gauche) et $\Gamma(20, 2)$ (à droite). Lorsque n devient grand, on retrouve pour la densité de la loi $\Gamma(n, \lambda)$ une forme de courbe en cloche $\mathcal{N}(n/\lambda, n/\lambda^2)$ puisqu'on peut considérer qu'elle est issue de la somme de variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. C'est donc le théorème de la limite centrale qui intervient à nouveau ici.

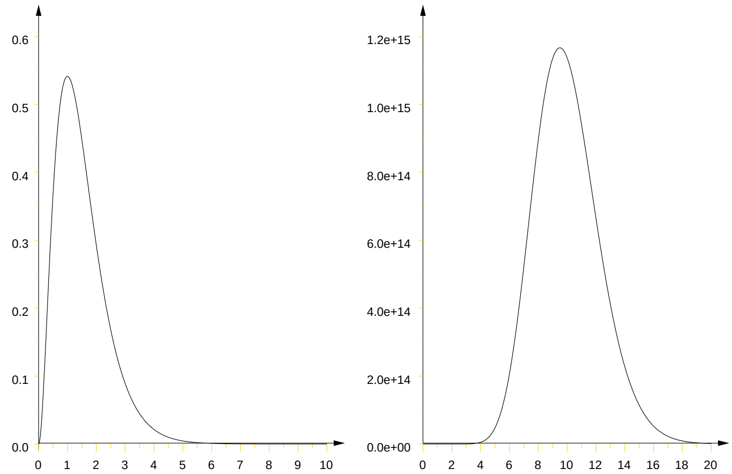

Figure 1.9 – Densités des lois $\Gamma(3, 2)$, à gauche, et $\Gamma(20, 2)$, à droite.

Rappel : fonction génératrice des moments
Soit X une variable aléatoire, telle que la fonction g_X définie par :

$$g_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{uX}\right],$$

soit définie sur un voisinage de 0. g_X est alors appelée fonction génératrice des moments de X et on montre qu'elle caractérise complètement la loi de X. En d'autres termes, si X et Y sont deux variables aléatoires telles que $g_X = g_Y$ sur un voisinage de 0, alors X et Y ont même loi.

Preuve. Avec les notations précédentes pour les durées inter-arrivées, on a :

$$S_n = I_1 + \cdots + I_n,$$

où les $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont des variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ. La fonction génératrice des moments de T_n est donc :

$$\mathbb{E}\left[e^{uS_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{u(I_1+\cdots+I_n)}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{uI_k}\right],$$

mais puisque les $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont d'une part indépendantes et d'autre part identiquement distribuées, on peut écrire :

$$\mathbb{E}\left[e^{uS_n}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{uI_k}\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{uI_1}\right]\right)^n.$$

Or si I_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ, sa fonction génératrice des moments est définie sur $]-\infty, \lambda[$ par :

$$\mathbb{E}\left[e^{uI_1}\right] = \int_0^{+\infty} e^{ut}\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \frac{\lambda}{\lambda+u},$$

d'où l'on déduit que :

$$\mathbb{E}\left[e^{uS_n}\right] = \left(\frac{\lambda}{\lambda-u}\right)^n.$$

Par ailleurs, si on considère une variable aléatoire $T \sim \Gamma(n, \lambda)$, sa fonction génératrice des moments est :

$$\mathbb{E}\left[e^{uT}\right] = \int_0^{+\infty} e^{ut}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda t}\,dt,$$

définie elle aussi sur $]-\infty, \lambda[$. On effectue le changement de variable $x = (\lambda - u)t$, ce qui donne :

$$\mathbb{E}\left[e^{uT}\right] = \left(\frac{\lambda}{\lambda-u}\right)^n \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}\,dx.$$

Et une récurrence triviale montre que cette dernière intégrale vaut 1, d'où :

$$\mathbb{E}\left[e^{uT}\right] = \left(\frac{\lambda}{\lambda-u}\right)^n,$$

et la boucle est bouclée, grâce à la propriété de caractérisation des fonctions génératrices. Notons qu'on aurait aussi pu démontrer ce résultat en faisant une récurrence sur n.

■

On peut maintenant essayer de généraliser l'idée du processus de Poisson en considérant une matrice de sauts A définie pour tout $n \geq 0$ par :

$$\begin{cases} a_{nn} &= -\lambda_n \\ a_{n,n+1} &= \lambda_n \\ a_{ij} &= 0 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

Ceci revient à dire que le taux de transition de n vers $(n+1)$ dépend de l'état n. On suppose toujours que l'état initial du système est $N_0 = 0$.

Pour simuler un tel processus, on considère à nouveau les dates d'arrivées des clients T_1, ..., T_n, etc. Cette fois, les durées inter-arrivées $I_1 = T_1$, $I_2 = T_2 - T_1$, etc. sont toujours indépendantes, mais ne suivent pas la même loi : I_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ_1, I_2 suit une loi exponentielle de paramètre λ_2 et ainsi de suite. Comme précédemment, on a alors pour la date d'arrivée du n-ème client :

$$T_n = I_1 + \cdots + I_n.$$

Même si on ne peut expliciter aussi facilement la loi de T_n, cette généralisation ne pose pas, a priori, de problème de simulation. Néanmoins, si on n'y prend garde, il risque de nous arriver des broutilles...

Exemple. On prend pour taux de transition :

$$\forall n \geq 0 \qquad \lambda_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

La trajectoire d'une telle chaîne est donnée figure 1.10. On constate que le nombre de clients explose en temps fini ! Ceci n'est pas dû à une quelconque particularité de la trajectoire simulée :

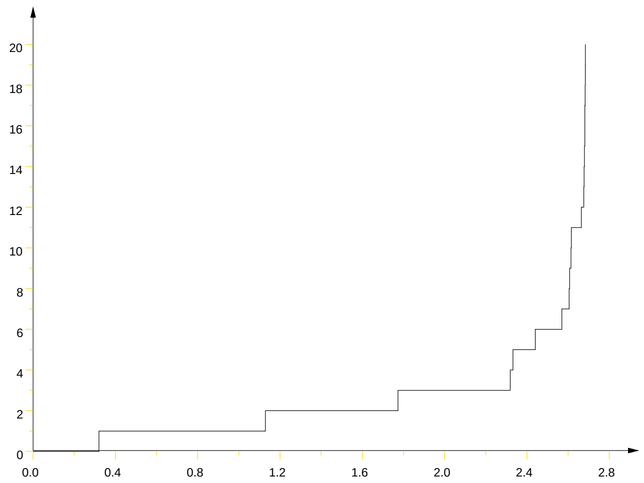

FIGURE 1.10 – Phénomène d'explosion en temps fini.

elles ont toutes le même aspect, seule la date d'explosion varie d'une simulation à l'autre. En d'autres termes, il existe une variable aléatoire presque sûrement finie T_∞ telle que :

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} T_\infty.$$

Ceci signifie que le processus de comptage des clients $(N_t)_{t\geq 0}$ n'est pas défini pour $t > T_\infty$. On voit que cela fait une grosse différence avec le processus de Poisson étudié auparavant...

Explication. Pour comprendre ce qui se passe, on peut raisonner en moyenne. En effet, en moyenne, le premier client arrive à la date $\frac{1}{\lambda_0}$, le second à la date $\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1}$, ..., le n-ème à la date :

$$\mathbb{E}[T_n] = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right),$$

avec par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[T_n] = 3.$$

Ainsi, en moyenne, le nombre de clients arrivés explose en 3 unités de temps.

Intuitivement, pour éviter ces situations pathologiques, il faut donc que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\lambda_n}$ soit divergente. On peut en effet prouver que c'est **la** condition nécessaire et suffisante pour que, presque sûrement, le système n'explose pas en temps fini. Dans la plupart des applications, celle-ci est vérifiée et il n'y a donc pas trop de soucis à se faire.

Remarque. Une hypothèse plus forte est de supposer que tous les taux λ_n sont majorés par une même constante C. Cette hypothèse, bien que plus restrictive, est largement suffisante en pratique. Du point de vue de la matrice de sauts, elle signifie que tous les coefficients de A sont en valeur absolue plus petits que C. De façon générale, si on considère un processus de Markov à temps continu $(X_t)_{t\geq 0}$ de matrice de sauts A vérifiant cette condition, on peut montrer qu'on évite tout phénomène d'explosion en temps fini : c'est donc l'hypothèse que nous ferons dans toute la suite de ce cours. Notons que celle-ci est automatiquement vérifiée lorsque l'espace d'états est fini.

Convention : Dans toute la suite, on ne considère que des processus dont la matrice de sauts A a des coefficients bornés.

1.3 Distribution asymptotique

La situation précédente des processus de Poisson est atypique en ce sens qu'on peut tout calculer (loi p_t à l'instant t, comportement asymptotique, etc.). Ceci est dû bien sûr à la simplicité de sa matrice de sauts, qui rend le calcul d'exponentielle facile. Dans le cas général, lorsqu'on se donne un générateur infinitésimal A, ce calcul d'exponentielle n'est pas aussi simple et on n'a donc plus accès à la loi du processus à tout instant.

Néanmoins, l'étude en temps long de $(X_t)_{t\geq 0}$ est souvent suffisante pour comprendre le comportement du processus. On se pose donc les questions : a-t-on convergence de $(p_t)_{t\geq 0}$ vers une loi limite π lorsque le temps t tend vers l'infini ? A-t-on un résultat de type loi des grands nombres ?

On commence par un résultat qui permet de comprendre le lien entre générateur infinitésimal et communication entre états. Considérons par exemple que le processus est initialement dans l'état i. Deux questions se posent : que va-t-il se passer ? dans combien de temps ?

Proposition 1.7 (Temps de séjour dans un état)
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov en temps continu, de générateur infinitésimal A. Le temps de séjour dans l'état i suit une loi exponentielle de paramètre $-a_{ii} = \sum_{j\neq i} a_{ij}$. De plus, lorsqu'il quitte l'état i, le processus se retrouve dans l'état j_0 avec probabilité :

$$\frac{a_{ij_0}}{\sum_{j\neq i} a_{ij}} = -\frac{a_{ij_0}}{a_{ii}}.$$

Preuve (heuristique). Supposons qu'au moment d'observation, le processus est dans l'état i. Sachant ceci, puisque le processus est markovien, tout ce qui s'est passé auparavant n'a aucune incidence sur le futur. C'est une autre façon de dire que le processus a la propriété d'absence de mémoire. Si on note T la durée qu'il reste dans l'état i, puisque T est une variable continue, on sait alors d'après la Proposition 1.5 que T suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ pour un certain paramètre $\lambda \geq 0$. On a donc le développement limité au voisinage de 0 :

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + o(t).$$

Mais, par définition du taux de départ de l'état i, on sait aussi que :

$$\mathbb{P}(T > t) = 1 + a_{ii}t + o(t),$$

ce qui donne bien $\lambda = -a_{ii}$. Supposons qu'on quitte l'état i dans l'intervalle $[t, t+h]$ et que ce soit la seule transition sur cet intervalle de temps, alors la probabilité d'avoir rejoint l'état j_0 et non un autre est égale au rapport :

$$\frac{p_{ij_0}(h)}{1 - p_{ii}(h)} = \frac{a_{ij_0}h + o(h)}{-a_{ii}h + o(h)} \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{a_{ij_0}}{a_{ii}}.$$

■

Remarque. Ce résultat généralise donc celui vu pour le processus de Poisson. Pour ce dernier, il n'y avait qu'une transition possible et celle-ci se faisait au bout d'un temps exponentiel de paramètre λ.

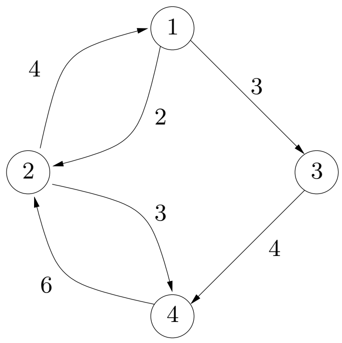

Figure 1.11 – Graphe de transition associé au générateur A.

Exemple. On considère un processus de Markov sur un espace à 4 états $E = \{1, 2, 3, 4\}$, de générateur infinitésimal :

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Alors, si on est initialement dans l'état 1, on le quitte au bout d'un temps qui suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(5)$ et on va vers l'état 2 avec probabilité 2/5, vers l'état 3 avec probabilité 3/5. Supposons qu'on aille dans l'état 3 : on va y rester pour une durée aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(4)$, pour entrer alors nécessairement dans l'état 4, etc.

Ainsi de l'état i, on a une probabilité non nulle d'aller vers tout état j tel que $a_{ij} > 0$. Ceci justifie la représentation du processus sous forme de graphe.

Graphe des transitions instantanées
On représente les transitions possibles d'une chaîne de Markov en temps continu grâce à un graphe de transition. C'est à partir du générateur infinitésimal que se construit ce graphe. Il y a une flèche entre i et j si $a_{ij} > 0$, autrement dit si, quittant l'état i, on a une probabilité non nulle de sauter vers l'état j. La flèche entre i et j sera éventuellement étiquetée a_{ij}.

Exemples.
- Le graphe de transition pour l'exemple précédent est donné figure 1.11.
- Le graphe de transition pour le processus de Poisson est donné figure 1.12.

Définition 1.6 (Etats communiquants, irréductibilité)
On dit que i communique avec j et on note $i \to j$ *s'il existe une suite d'indices* $i_0 = i, i_1, \ldots, i_n = j$ *telle que :*

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\} \qquad a_{i_k, i_{k+1}} > 0.$$

Autrement dit, sur le graphe de transition, on peut aller de i à j en un certain nombre d'étapes. Si tous les états communiquent entre eux, on dit que le processus est irréductible.

Remarques.
- La communication entre états est une relation transitive : si $i \to j$ et $j \to k$, alors $i \to k$.
- Si i ne communique pas avec j, on note $i \nrightarrow j$.
- Dire que le processus est irréductible signifie que le graphe de transition est fortement connexe, c'est-à-dire qu'on peut aller de tout sommet à tout autre en un certain nombre d'étapes et en

FIGURE 1.12 – Graphe de transition pour le processus de Poisson d'intensité λ.

suivant le sens des flèches. Si l'espace d'états n'est pas trop grand, cette notion d'irréductibilité se vérifie donc d'un coup d'œil !

Exemples.
- Sur l'exemple ci-dessus, la figure 1.11 montre clairement que tous les états communiquent entre eux. Le processus est donc irréductible.
- Pour le processus de Poisson, on voit que $i \to j$ si et seulement si $j > i$. Le processus de Poisson n'est donc pas irréductible.

Théorème 1.2 (Limite des probabilités de transition)
Si la chaîne de Markov à temps continu $(X_t)_{t\geq 0}$ est irréductible, alors il existe une unique limite $\pi = [\pi_o, \pi_1, \dots]$ telle que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \qquad p_{ij}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \pi_j$$

De plus, soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, ou positive, alors on a :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(X_t)\,dt \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} \sum_{j\in E} f(j)\pi_j$$

Remarques.
- π est donc un vecteur ligne de la taille de l'espace d'états, mais pour l'instant on n'a pas dit que la limite π est un vecteur de probabilité ! Si c'est un vecteur de probabilité, on dira que c'est la loi stationnaire du processus $(X_t)_{t\geq 0}$. On précisera ce point un peu plus loin.
- Le résultat précédent a ceci de remarquable : la limite π_j de $p_{ij}(t)$ est indépendante de i, c'est-à-dire qu'on oublie la position initiale i du processus.
- Si π est une probabilité, la seconde partie du théorème peut être vue comme une loi des grands nombres. Supposons que chaque unité de temps qu'on passe dans l'état j nous coûte $f(j)$ euros. En moyenne, par unité de temps, combien paie-t-on ? Tout simplement la moyenne des tarifs $f(j)$ pour la loi π.

Exemples
- Pour autant, on peut avoir des chaînes non irréductibles pour lesquelles on a une limite π. Si on repense au processus de Poisson, on a vu que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \qquad p_{ij}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

  Donc on a bien une limite $\pi_j = 0$ indépendante de la condition initiale i.
- Le processus de générateur :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

  associé au graphe de la figure 1.13, montre que si la chaîne n'est pas irréductible, les quantités $\lim_{t\to+\infty} p_{ij}(t)$ peuvent ne pas être indépendantes du point de départ i de la chaîne. En effet, si on part de l'état 1, on le quittera au bout d'un temps exponentiel $\mathcal{E}(2)$, avec autant de chances d'aller vers l'état 2 que vers l'état 3. Une fois ceci fait, on ne bouge plus. De même, si on part de l'un des états 2 ou 3, on y reste pour toujours. Ainsi on a la convergence :

$$P(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mais la matrice limite n'a pas toutes ses lignes identiques, donc on n'a pas un résultat aussi fort que dans le théorème précédent. Le problème vient des états 2 et 3 : ils sont dits absorbants, puisqu'une fois qu'on y est, on y reste.

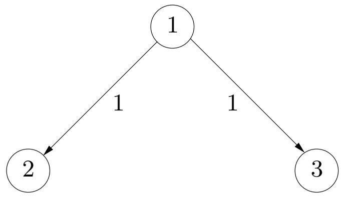

Figure 1.13 – Un exemple de chaîne non irréductible.

Convention : dans la suite, sauf précision contraire, on ne considérera que des processus irréductibles, ce qui assure donc existence et unicité d'une limite π.

Définition 1.7 (Loi stationnaire)
Le vecteur de probabilité $\pi = [\pi_o, \pi_1, \ldots]$ est appelé loi stationnaire, ou loi d'équilibre, du processus si :

$$\forall t \geq 0 \qquad \pi P(t) = \pi.$$

En particulier, si la loi initiale du processus est $\mu = \pi$, la loi du processus à tout instant est encore π. On dit alors qu'on est à l'équilibre.

On a vu que, dans le cas irréductible, on a convergence de la fonction matricielle $t \mapsto P(t)$:

$$P(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \Pi,$$

où Π est la matrice dont toutes les lignes sont égales à un certain vecteur ligne π. Supposons par ailleurs que le processus admet une loi stationnaire $v = [v_0, v_1, \ldots]$, alors on a :

$$vP(t) = v \xrightarrow[t\to+\infty]{} v\Pi = \pi,$$

la dernière égalité venant de ce que v est un vecteur de probabilité. Ainsi, lorsqu'un processus irréductible admet une loi stationnaire, celle-ci est la limite des probabilités de transition. C'est pourquoi on a adopté la même notation dans le théorème et dans la définition ci-dessus. Résumons ce qu'on vient de montrer.

Proposition 1.8 (Loi stationnaire et convergence en loi)
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus irréductible. Alors, s'il admet une loi stationnaire π, celle-ci est unique. De plus, pour toute loi initiale μ de X_0, on a convergence de la loi de X_t vers π :

$$\mu P(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \pi.$$

Soyons pragmatiques : pour savoir si un processus admet une loi stationnaire, on ne va pas chercher un vecteur π tel que $\pi P(t) = \pi$ pour tout $t \geq 0$, pour la simple et bonne raison qu'il est déjà difficile en général de calculer $P(t)$. Le processus étant souvent défini par sa matrice de sauts A, on va donc donner une façon de trouver π à partir de celle-ci. En effet, passant à la limite en t dans l'équation $P'(t) = AP(t)$, on obtient :

$$P'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} A\Pi = 0,$$

puisque les lignes de A somment à 0. De l'équation $P'(t) = P(t)A$, on déduit en passant à la limite que $\Pi A = 0$, c'est-à-dire que le vecteur π est solution du système d'équations :

$$\pi A = 0.$$

Le vecteur $\pi = 0$ est toujours solution de ce système d'équations. Pour s'assurer qu'on a bien une loi stationnaire, il faut rajouter la condition que c'est un vecteur de probabilité.

Proposition 1.9 (Loi stationnaire et matrice de sauts)
Le processus admet pour loi stationnaire π si et seulement si π est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \pi A & = 0 \\ \sum_{j\in E} \pi_j & = 1 \end{cases}$$

Preuve. On a montré le résultat dans un sens, il suffit maintenant de vérifier la réciproque. Supposons donc que le vecteur de probabilités π vérifie $\pi A = 0$, alors pour tout entier $n > 0$, on a aussi $\pi A^n = 0$, donc pour tout $t \geq 0$:

$$0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \pi A^n \;\Leftrightarrow\; \pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right) = \pi,$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \geq 0 \qquad \pi = \pi e^{tA} = \pi P(t),$$

donc π est bien la loi stationnaire du processus.

■

Remarque. Le système d'équations $\pi A = 0$ s'interprète comme suit : à l'équilibre, le taux de départ d'un état est égal au taux d'entrée dans cet état.

Il faut maintenant préciser le lien entre la nature des états d'un processus et l'existence d'une loi stationnaire. Un état est dit transitoire, ou transient, si une fois qu'on l'a quitté, on n'est pas certain d'y revenir. Si on est certain d'y revenir, l'état est dit récurrent. Un état récurrent est dit récurrent positif si, de plus, le temps moyen de retour est fini. Si un état récurrent est tel que le temps moyen de retour est infini, il est dit récurrent nul. On comprendra mieux ces notions lors de l'étude des processus de vie et de mort. Pour l'instant, il importe surtout de retenir que tous les états d'une chaîne irréductible sont pareils.

Proposition 1.10 (Nature des états d'une chaîne irréductible)
Tous les états d'une chaîne irréductible $(X_t)_{t\geq 0}$ sont de la même nature : ou bien tous transitoires, ou bien tous récurrents nuls, ou bien tous récurrents positifs. On dit alors que le processus est transitoire, ou récurrent nul, ou récurrent positif.

Et la situation confortable est celle où tous les états sont récurrents positifs.

Théorème 1.3 (Distribution asymptotique)
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov à temps continu irréductible, alors il existe une unique loi stationnaire π si et seulement si tous les états sont récurrents positifs.

Remarques.
- Pour savoir si on est dans la situation ci-dessus, le plus commode est en général de résoudre le système d'équations $\pi A = 0$ et de voir s'il admet une solution non nulle.
- Si la seule solution est le vecteur nul, on est dans le cas transitoire ou récurrent nul. Malgré tout, le théorème 1.2 s'applique, avec $\pi = 0$ dans les formules limites.

Cas particulier important ! Si l'espace d'états est fini, tout se passe paisiblement.

Proposition 1.11 (Espace d'états fini)
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov à temps continu irréductible sur un espace d'états fini, alors il existe une unique loi stationnaire π.

Exemple. On revient à l'exemple vu ci-dessus, de générateur infinitésimal :

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

On a vu sur le graphe de transition que le processus est irréductible. Par le résultat ci-dessus, on a donc existence et unicité de la probabilité stationnaire π. On la trouve en résolvant :

$$\begin{cases} [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4]A & = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 & = 1 \end{cases}$$

et quelques calculs aboutissent à la loi suivante sur les quatre états :

$$\pi = \left[\frac{8}{33}, \frac{10}{33}, \frac{6}{33}, \frac{9}{33}\right].$$

Si on veut par exemple connaître la proportion du temps passé dans l'état 1 par une trajectoire du processus, il suffit alors d'appliquer la loi des grands nombres donnée précédemment en prenant pour f l'indicatrice de l'état 1, c'est-à-dire qu'à l'instant t :

$$f(X_t) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_t = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Leftrightarrow f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On sait alors que :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(X_t)\,dt \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} \sum_{j\in E} f(j)\pi_j.$$

L'intégrale de gauche représente exactement la proportion du temps passé dans l'état 1 sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et le terme de droite vaut tout simplement π_1, c'est-à-dire $8/33$.

Remarque. Cette interprétation du vecteur limite π d'un processus irréductible (qu'il soit transitoire, récurrent nul ou récurrent positif) se généralise à un espace d'états quelconque. La proportion du temps passé dans l'état i tend vers π_i lorsque le temps croît vers l'infini. En particulier, si le processus est transitoire ou récurrent nul, la proportion de temps passé dans chaque état tend vers zéro.

1.4 Processus de vie et de mort

Les processus de vie et de mort peuvent servir à modéliser l'évolution d'une population au cours du temps, le nombre de clients dans une file d'attente, etc. Après les avoir définis, on cherche à quelle condition un tel processus admet une loi stationnaire. On verra enfin leur application aux files d'attente markoviennes.

1.4.1 Modèle général

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \end{bmatrix}$$

FIGURE 1.14 – Matrice de sauts d'un processus de vie et de mort.

Définition 1.8 (Processus de vie et de mort)
On appelle processus de vie et de mort toute chaîne de Markov en temps continu à valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont le générateur infinitésimal A est de la forme :

$$a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow j \in \{i-1, i, i+1\}.$$

Autrement dit, les transitions à partir de l'état i ne peuvent se faire que vers l'état $(i-1)$, en cas de décès, ou vers l'état $(i+1)$, en cas de naissance. Par rapport aux chaînes de vie et de mort en temps discret, la différence réside dans le fait qu'une naissance ou un décès peut arriver à n'importe quel moment, et non uniquement à des instants entiers.

Notation. On note $\lambda_i = a_{i,i+1}$ les taux de naissance et, pour $i > 0$, $\mu_i = a_{i,i-1}$ les taux de décès. On suppose toutes ces quantités strictement positives. La matrice de transition est donnée figure 1.14, le graphe de transition figure 1.15.

D'après ce qui a été vu Proposition 1.7, le temps de séjour dans l'état i suit une loi exponentielle de paramètre $(\lambda_i + \mu_i)$. De plus, avec probabilité $\mu_i/(\lambda_i + \mu_i)$, cette transition est un décès ; avec probabilité $\lambda_i/(\lambda_i + \mu_i)$, c'est une naissance. Ce résultat n'est pas étonnant si on repense au processus de Poisson : si on n'avait que des naissances, ce temps de séjour suivrait une loi $\mathcal{E}(\lambda_i)$. Si on n'avait que des décès, il suivrait une loi $\mathcal{E}(\mu_i)$. Ici les deux peuvent se produire, le temps de séjour est donc le minimum d'une loi $\mathcal{E}(\lambda_i)$ et d'une loi $\mathcal{E}(\mu_i)$, les deux variables étant indépendantes entre elles.

On veut savoir si un tel processus admet une distribution stationnaire π. Puisque les λ_i et les μ_i sont tous strictement positifs, tous les états communiquent entre eux et la chaîne est irréductible. On résout donc le système d'équation $\pi A = 0$, ce qui donne :

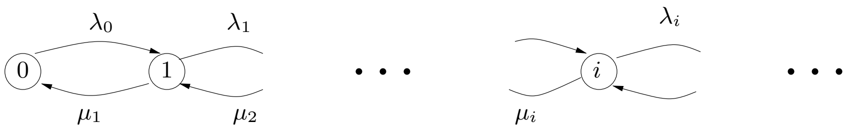

Figure 1.15 – Graphe de transition d'un processus de vie et de mort.

$$\begin{cases} \lambda_0\pi_0 - \mu_1\pi_1 & = 0 \\ \lambda_{i-1}\pi_{i-1} - (\lambda_i+\mu_i)\pi_i + \mu_{i+1}\pi_{i+1} & = 0 \qquad \forall i > 0 \end{cases}$$

D'où il vient :

$$\pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}}{\mu_1\dots\mu_n}\pi_0 = \pi_0\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}.$$

En écrivant qu'on doit avoir de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\pi_n = 1,$$

l'existence d'une loi stationnaire dépend de :

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}},$$

avec la convention usuelle qu'un produit vide $\prod_{j=1}^{0}$ vaut 1.

Bilan des courses : si la série $\sum_{n\geq 0}\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}$ est convergente, alors il y a une distribution stationnaire. Sinon, on a $\pi_0 = 0$, d'où de proche en proche $\pi_n = 0$ pour tout n : il n'y a pas de loi stationnaire. Dans ce cas, le processus est transitoire ou récurrent nul.

Proposition 1.12 (CNS de récurrence positive)
Le processus de naissance et de mort est récurrent positif si et seulement si la série

$$\sum_{n\geq 0}\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}$$

est convergente. Dans ce cas, la loi stationnaire π *est donnée par :*

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}} \qquad \textit{et} \qquad \pi_n = \pi_0\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}.$$

Remarque. Intuitivement, pour qu'on ait une loi stationnaire, il faut empêcher le processus de partir à l'infini : ceci est possible si les μ_n sont plus grands que les λ_n, ce que traduit la convergence de la série.

Rappelons que le processus est récurrent nul si la probabilité de revenir en un état vaut 1, mais que le temps moyen de retour en cet état est infini. Le processus est transitoire si la probabilité de retour en un état est strictement inférieure à 1. La chaîne étant irréductible, tous les états sont de même nature et il suffit donc de s'intéresser à l'état 0.

Un processus partant de l'état 0 va passer dans l'état 1 au bout d'un temps exponentiel de paramètre λ_0. Ainsi le processus est récurrent si la probabilité p_1 de revenir en 0 partant de l'état 1 est égale à 1. Pour calculer p_1, on va établir une relation générale sur p_n, probabilité de retour en 0 partant de l'état $n > 0$. En notant $T_0 = 0, T_1, \dots, T_k, \dots$ les instants où le processus change d'état, p_n s'écrit :

$$p_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 0}\{X_{T_k} = 0\}|X_{T_0} = n\right).$$

En conditionnant par rapport à X_{T_1}, on obtient :

$$\begin{aligned} p_n = \; & \mathbb{P}\left(\textstyle\bigcup_{k\geq 1}\{X_{T_k} = 0\}|X_{T_1} = n-1, X_{T_0} = n\right)\mathbb{P}(X_{T_1} = n-1|X_{T_0} = n) + \dots \\ & \dots \mathbb{P}\left(\textstyle\bigcup_{k\geq 1}\{X_{T_k} = 0\}|X_{T_1} = n+1, X_{T_0} = n\right)\mathbb{P}(X_{T_1} = n+1|X_{T_0} = n). \end{aligned}$$

Mais vu les taux de transition du processus, on sait que :

$$\mathbb{P}(X_{T_1} = n-1|X_{T_0} = n) = \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_{T_1} = n+1|X_{T_0} = n) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n}.$$

D'autre part, le processus étant markovien et homogène, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1}\{X_{T_k} = 0\}|X_{T_1} = n-1, X_{T_0} = n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1}\{X_{T_k} = 0\}|X_{T_1} = n-1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 0}\{X_{T_k} = 0\}|X_{T_0} = n-1\right) \\ &= p_{n-1}, \end{aligned}$$

et de la même façon :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1}\{X_{T_k} = 0\}|X_{T_1} = n+1, X_{T_0} = n\right) = p_{n+1}.$$

On a ainsi abouti à une équation de récurrence linéaire d'ordre 2 sur les p_n :

$$\forall n > 0 \qquad p_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n}p_{n+1} + \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n}p_{n-1},$$

laquelle s'écrit encore :

$$p_n - p_{n+1} = \frac{\mu_n}{\lambda_n}(p_{n-1} - p_n),$$

ou encore, en raisonnant de proche en proche :

$$p_{n-1} - p_n = \frac{\mu_{n-1}}{\lambda_{n-1}}(p_{n-2} - p_{n-1}) = \frac{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}(p_0 - p_1) = \frac{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}(1 - p_1),$$

puisque par définition $p_0 = 1$. On écrit de la sorte $(p_{k-1} - p_k)$ pour k variant de 1 à n, on somme le tout et il vient :

$$1 - p_n = (1 - p_1)\left(1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}\right).$$

Puisque $0 \leq 1 - p_n \leq 1$ pour tout n, il est clair que si la série :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}$$

est divergente, on a nécessairement $p_1 = 1$ et par suite $p_n = 1$ pour tout n. Le processus est alors récurrent. Sinon, le processus est transitoire.

Proposition 1.13 (CNS de récurrence)
Le processus est récurrent si et seulement si la série :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mu_1 \dots \mu_n}{\lambda_1 \dots \lambda_n}$$

est divergente. Sinon, il est transitoire.

On peut retrouver la différence entre récurrent positif et récurrent nul en calculant le temps moyen de retour à l'état 0. Soit donc e_n le temps moyen de passage de l'état n à l'état $(n-1)$. Si e_1 est fini, alors le processus est récurrent positif, sinon il est récurrent nul. On obtient cette fois l'équation :

$$e_n = \frac{1}{\lambda_n + \mu_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n}\left(\frac{1}{\lambda_n} + e_n + e_{n+1}\right),$$

car lorsqu'on part de l'état n :
- ou bien on rentre dans l'état $(n-1)$, ce qui prend un temps moyen $1/\mu_n$ et arrive avec probabilité $\mu_n/(\lambda_n + \mu_n)$;
- ou bien on rentre dans l'état $(n+1)$, ce qui arrive avec probabilité $\lambda_n/(\lambda_n+\mu_n)$, prend un temps moyen $1/\lambda_n$, et il faudra en plus en moyenne le temps (e_n+e_{n+1}) pour arriver dans l'état $(n-1)$.

On en déduit :

$$\frac{\lambda_1 \dots \lambda_n}{\mu_1 \dots \mu_n} e_{n+1} = e_1 - \frac{2}{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} + \dots + \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n}\right).$$

Le membre de gauche est toujours supérieur ou égal à 0. Il s'ensuit que si la série :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n}$$

est divergente, alors nécessairement e_1 doit être infini : on retrouve bien le résultat de la proposition.

Remarque. On en déduit que si la série $\sum_{n\geq 0}\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}$ est divergente, mais la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\mu_1\dots\mu_n}{\lambda_1\dots\lambda_n}$ est convergente, alors le processus est récurrent nul.

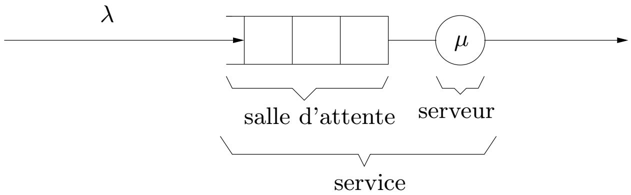

Figure 1.16 – Représentation schématique d'une file $M/M/1$.

1.4.2 Files $M/M/1$

On note encore N_t le nombre de clients dans le service à la date t, c'est-à-dire dans le serveur et dans la salle d'attente (de capacité infinie). Sa loi est le vecteur ligne :

$$p(t) = [\mathbb{P}(N_t = 0), \mathbb{P}(N_t = 1), \dots].$$

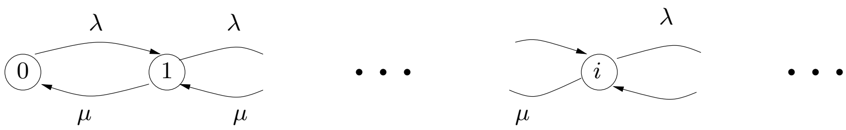

Figure 1.17 – Graphe de transition d'une file $M/M/1$.

Cette file correspond au cas le plus simple de processus de naissance et de mort puisqu'on suppose les taux de décès et de naissance constants (voir figures 1.16 et 1.17) :

$$\begin{cases} \lambda_i & = \lambda \\ \mu_i & = \mu \end{cases}$$

Autrement dit :
– les arrivées se font selon un processus de Poisson d'intensité λ, c'est-à-dire que les durées inter-arrivées sont indépendantes et suivent toutes la même loi exponentielle de paramètre λ ;
– les durées de services sont indépendantes et suivent toutes la même loi exponentielle de paramètre μ.

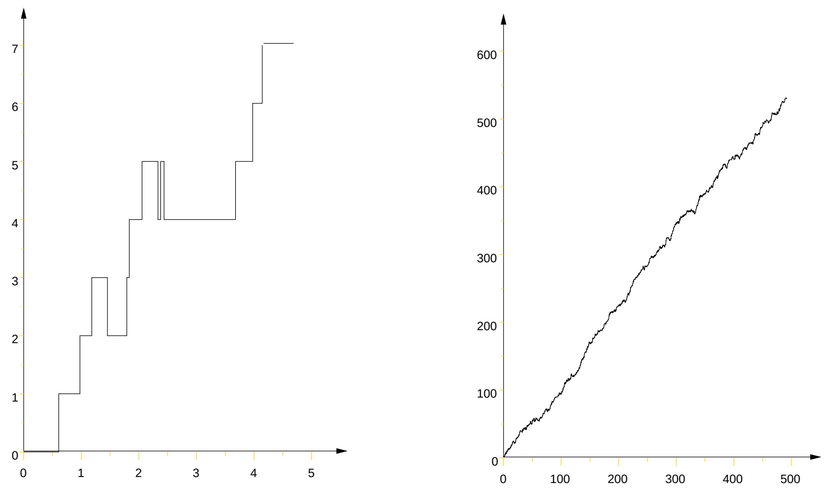

Figure 1.18 – Simulation d'une file $M/M/1$ transiente ($\lambda = 2 > \mu = 1$).

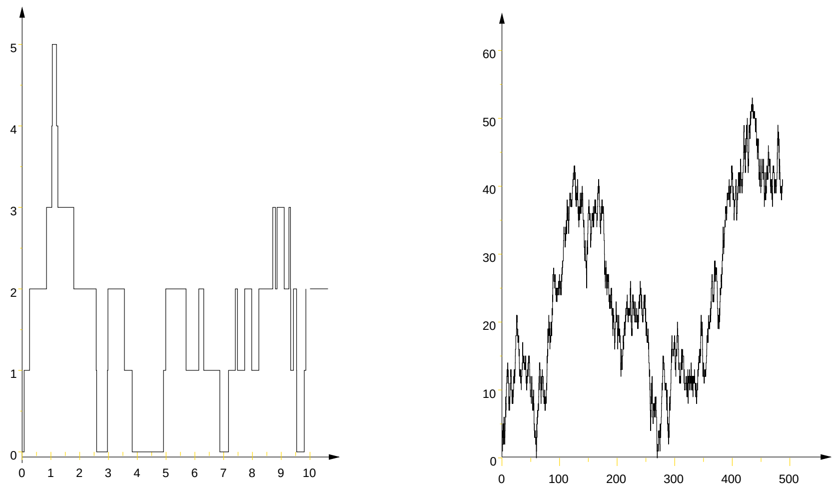

FIGURE 1.19 – Simulation d'une file $M/M/1$ récurrente nulle ($\lambda = \mu = 2$).

On a vu que pour déterminer la nature du processus $(N_t)_{t\geq 0}$, il suffit de préciser les natures des séries :

$$\sum_{n\geq 0}\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n,$$

et :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\mu_1\dots\mu_{n-1}}{\lambda_1\dots\lambda_{n-1}} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n,$$

donc la réponse est claire :

- Si $\lambda > \mu$: on est dans le cas transitoire : le nombre de clients en attente tend presque sûrement vers l'infini. Ceci n'a rien d'étonnant : il arrive en moyenne λ clients par unité de temps, tandis que le serveur ne peut traiter qu'en moyenne μ clients par unités de temps. Il y a donc accumulation des clients non servis en salle d'attente.
- Si $\lambda = \mu$: on est dans le cas récurrent nul : la file se vide régulièrement, mais le temps moyen entre deux retours à 0 est infini et il n'y a pas de convergence en loi du nombre de clients dans le service.
- Si $\lambda < \mu$: le processus est récurrent positif, tout se passe bien. C'est l'hypothèse que nous ferons dans la suite.

Illustration. On a exhibé les trois comportements possibles d'une file $M/M/1$ par simulations :

- Cas transitoire : pour $\lambda = 2$ et $\mu = 1$, la figure 1.18 montre le nombre de clients dans le service en temps court et en temps long. Avec le temps long apparaît très clairement l'effet moyen : il arrive en moyenne 2 personnes par unité de temps dans le service, or le serveur ne peut en servir qu'une en moyenne, donc il s'en accumule 1 par unité de temps et N_t ressemble à t lorsque t tend vers l'infini.
- Cas récurrent nul : pour $\lambda = \mu = 2$, la figure 1.19 montre le nombre de clients dans le service en temps court et en temps long. La file se vide régulièrement (probabilité de retour en 0 égale à 1), mais le nombre de clients dans le service peut devenir très grand, d'où des temps de retour de plus en plus longs (espérance du temps de retour en 0 infinie).
- Cas récurrent positif : pour $\lambda = 2$ et $\mu = 3$, la file se vide régulièrement, avec temps de retour moyens en 0 finis.

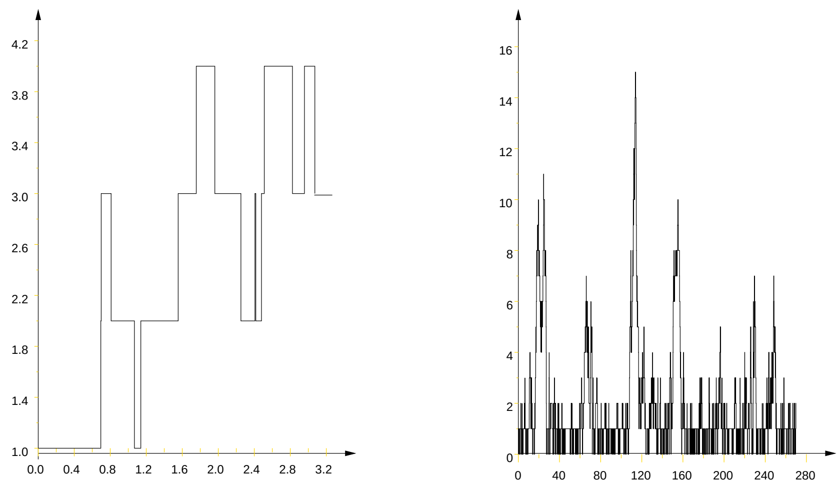

FIGURE 1.20 – Simulation d'une file $M/M/1$ récurrente positive ($\lambda = 2 < \mu = 3$).

Proposition 1.14 (Comportement de la file)
Si $\rho = \lambda/\mu < 1$, le processus est récurrent positif et il y a convergence en loi de $(p(t))_{t\geq 0}$ vers la loi $\pi = [\pi_0, \pi_1, \ldots]$ comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad p_n(t) = \mathbb{P}(N_t = n) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \pi_n = (1-\rho)\rho^n.$$

Remarques.
- On a représenté figure 1.21 la loi stationnaire π pour $\lambda = 2$ et $\mu = 3$, c'est-à-dire $\rho = \frac{2}{3}$.
- En général, on dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$, si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, avec :

  $$\forall n \geq 1 \qquad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

  On a alors $\mathbb{E}[X] = 1/p$ et $\mathrm{var}(X) = (1-p)/p^2$. Ici, on a une loi géométrique décalée, puisqu'elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et non dans $\mathbb{N}^*$. En d'autres termes, Y suit une loi géométrique décalée de paramètre p si $X = Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p.

Ainsi, en régime stationnaire, la probabilité de trouver n clients dans le serveur est π_n. En gros, l'expression **régime stationnaire** signifie qu'on a attendu assez longtemps pour oublier la situation initiale (file vide par exemple). On a donc convergence en loi de $(N_t)_{t\geq 0}$ vers une variable aléatoire N de loi π. Si on veut un modèle qui soit à l'équilibre dès le début, il suffit de considérer $p_0 = \pi$ et, par définition même de la loi stationnaire, on a alors pour tout $t \geq 0$:

$$p(t) = \pi.$$

Lorsque le régime stationnaire n'est pas encore "atteint", on dit qu'on est en régime transitoire.

Convention. Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons que $\lambda < \mu$ et qu'on est en régime stationnaire. On s'intéresse alors à différentes quantités classiques dans la théorie des files d'attente.

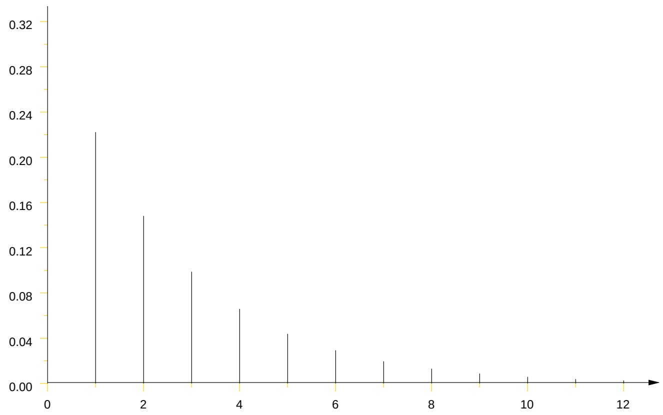

FIGURE 1.21 – Loi stationnaire d'une file $M/M/1$ pour $\rho = \frac{2}{3}$.

Corollaire 1.2 (Nombre moyen de clients)
En régime stationnaire, le nombre moyen de clients dans la file est :

$$\mathbb{E}[N] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

Preuve. On a vu ci-dessus que $N + 1 \sim \mathcal{G}(1 - \rho)$, donc d'après le rappel sur l'espérance d'une loi géométrique :

$$\mathbb{E}[N+1] = \frac{1}{1-\rho} \Rightarrow \mathbb{E}[N] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

■

On retrouve bien le fait que, si λ tend vers μ, le nombre moyen de clients dans le serveur tend vers l'infini. Par ailleurs, en régime stationnaire, la probabilité que le serveur soit occupé est celle qu'il y ait au moins un client dans le système, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(N > 0) = 1 - \pi_0 = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Le paramètre $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ s'interprète donc comme le taux d'occupation, ou d'activité, du serveur.

On suppose toujours être à l'équilibre, un client arrive : quel est le temps moyen nécessaire pour que son cas soit traité ? Ceci inclut : l'attente éventuelle dans la salle d'attente, plus la durée de son service. Nous notons T cette variable aléatoire.

Proposition 1.15 (Temps de séjour T)
En régime stationnaire, le temps T passé par un client dans le système, appelé temps de séjour, suit une loi exponentielle de paramètre $(\mu - \lambda)$:

$$T \sim \mathcal{E}(\mu - \lambda).$$

Preuve. Notons N le nombre de clients dans le système à l'arrivée de notre client (celui-ci n'est pas compté). Puisqu'on est en régime stationnaire, N suit la loi π. On calcule la densité f de T par la méthode de conditionnement :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(t|n)\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(t|n)\pi_n.$$

S'il y a $n \geq 0$ client(s) déjà présent(s), la durée nécessaire pour que ces n clients plus le nôtre soient traités est la somme de $(n+1)$ lois exponentielles indépendantes de paramètre μ : c'est une loi $\Gamma(n+1,\mu)$. Sa densité est :

$$f(t|n) = \frac{\mu^n t^n}{n!}\mu e^{-\mu t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

On a donc pour tout $t \geq 0$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mu^n t^n}{n!}\mu e^{-\mu t}(1-\frac{\lambda}{\mu})\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = e^{-\mu t}(\mu-\lambda)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}.$$

Ainsi $T \sim \mathcal{E}(\mu-\lambda)$.

■

On voit en particulier que $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\mu-\lambda}$. Le nombre moyen de clients dans le système, noté $\mathbb{E}[N]$, est donc égal au produit du taux des entrées par le temps moyen de séjour. Ceci est vérifié pour de nombreuses files d'attente et connu sous le nom de formule de Little.

Proposition 1.16 (Formule de Little)
En régime stationnaire, le nombre moyen de clients dans le système est égal au produit du taux des entrées par le temps moyen de séjour :

$$\mathbb{E}[N] = \lambda\mathbb{E}[T].$$

Ce résultat est en fait vrai dès que le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est ergodique, c'est-à-dire qu'il converge en loi vers une distribution stationnaire π indépendante des conditions initiales. Les arrivées n'ont pas besoin d'être poissoniennes ; il faut alors remplacer λ par $\bar{\lambda}$, nombre moyen d'entrées dans le système par unité de temps.

1.4.3 Files $M/M/s$

La seule différence par rapport au modèle précédent vient de ce qu'il y a plusieurs serveurs identiques : si un client arrive et trouve l'un des s serveurs libre, il est servi tout de suite, sinon il attend que l'un d'entre eux se libère (voir figure 1.22). C'est encore un processus de naissance et de mort, avec $\lambda_n = \lambda$ pour tout n, mais un taux de décès variable, à savoir :

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \forall n \in \{1,\dots s\} \\ s\mu & \forall n \geq s \end{cases}$$

Le graphe de transition est représenté figure 1.23.

La condition d'équilibre du système est la convergence de la série de terme général $r_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n}$. Pour $n \geq s$, ce terme général se réécrit :

$$r_n = \frac{s^s}{s!}\frac{\lambda^n}{(s\mu)^n},$$

série géométrique qui est convergente si et seulement si $\lambda < s\mu$.

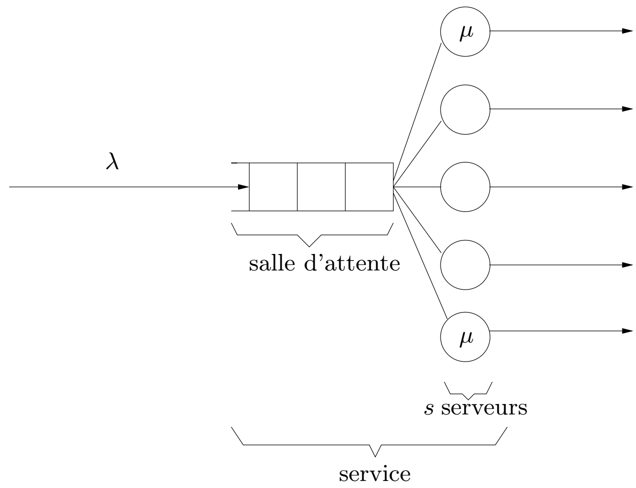

Figure 1.22 – Représentation schématique d'une file $M/M/s$.

Proposition 1.17 (Condition de stabilité)
La file d'attente $M/M/s$ correspond à un processus récurrent positif si et seulement si $\lambda < s\mu$.

Ceci n'a rien d'étonnant : tout se passe un peu comme si on avait un seul serveur qui peut traiter en moyenne au plus $s\mu$ clients par unité de temps. Pour que ça ne s'accumule pas en salle d'attente, il faut donc que le flux de λ arrivées par unité de temps soit inférieur à ce débit $s\mu$. Nous supposons donc cette condition vérifiée dans la suite.

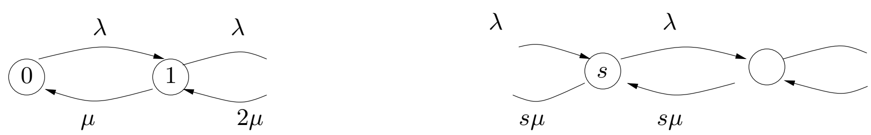

Figure 1.23 – Graphe de transition d'une file $M/M/s$.

La distribution stationnaire (π_n) est alors égale à :

$$\pi_n = \frac{r_n}{\sum_{n=0}^{+\infty} r_n},$$

avec pour constante de normalisation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n = \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{\lambda^s}{s!\mu^s} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{s\mu}}.$$

On peut exprimer les π_n en fonction de π_0 :

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\pi_0 & \forall n \in \{0, \dots s\} \\ \frac{\lambda^n}{s!s^{n-s}\mu^n}\pi_0 & \forall n \geq s \end{cases}$$

ou, mieux, en fonction de π_s :

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{s!}{n!}(\lambda/\mu)^{n-s}\pi_s & \forall n \in \{0, \dots s\} \\ (\lambda/(s\mu))^{n-s}\pi_s & \forall n \geq s \end{cases}$$

Remarque. En pratique, le plus simple est souvent de tout exprimer en fonction de π_s, comme on vient de le faire. On calcule alors π_s en fonction des données λ et μ pour que la somme des π_n fasse 1.

On suppose donc être en régime stationnaire. Le résultat suivant est dû à Erlang (1917) et lui servait à dimensionner les réseaux téléphoniques.

Proposition 1.18 (Formule d'Erlang 2)
En régime stationnaire, la probabilité que tous les serveurs soient occupés est :

$$\mathbb{P}(N \geq s) = \frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\pi_s$$

Preuve. On a tout simplement :

$$\mathbb{P}(N \geq s) = \sum_{n=s}^{+\infty} \pi_n = \pi_s \sum_{n=s}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s},$$

et on reconnaît une série géométrique :

$$\mathbb{P}(N \geq s) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{s\mu}}\pi_s = \frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\pi_s.$$

■

Remarque. On voit l'utilité de cette formule dans les applications : le but est que le nombre s de serveurs mis en place soit suffisant pour que la probabilité de saturation du réseau, i.e. la quantité $\mathbb{P}(N \geq s)$, soit très faible.

On peut aussi calculer le nombre moyen de serveurs occupés et le nombre moyen de clients dans le système.

Proposition 1.19 (Valeurs moyennes)
Lorsque le système est en régime stationnaire, on a :
- *Nombre moyen de serveurs occupés :* $\frac{\lambda}{\mu}$.
- *Nombre moyen de clients dans le système :* $\mathbb{E}[N] = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{s\lambda\mu}{(s\mu-\lambda)^2}\pi_s$.

Preuve. Il y a entre 0 et s serveurs occupés. Notons $\bar{n}$ le nombre moyen de serveurs occupés, on peut écrire :

$$\bar{n} = 1\pi_1 + \cdots + s\pi_s + s(\pi_{s+1} + \dots) = \sum_{n=0}^{s} \frac{ns!}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-s}\pi_s + s\sum_{n=s+1}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}\pi_s,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu}\left(\sum_{n=0}^{s-1}\frac{s!}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-s}\pi_s + \sum_{n=s}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}\pi_s\right),$$

et on reconnaît entre parenthèses la somme des π_n :

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu}\sum_{n=0}^{+\infty}\pi_n = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire est $\mathbb{E}[N]$ et vaut :

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{+\infty} n\pi_n = \bar{n} + \sum_{n=s}^{+\infty}(n-s)\pi_n,$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}[N] = \frac{\lambda}{\mu} + \pi_s \sum_{n=s}^{+\infty}(n-s)\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} = \frac{\lambda}{\mu} + \pi_s \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n},$$

or on rappelle que :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2},$$

d'où pour notre calcul :

$$\mathbb{E}[N] = \frac{\lambda}{\mu} + \pi_s \frac{\frac{\lambda}{s\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2} = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda s\mu}{(s\mu-\lambda)^2}\pi_s,$$

et la messe est dite.

■

On appelle temps d'attente, noté W comme "Waiting time" dans la langue de W. Shakespeare et George W. Bush [1], le temps qu'un nouveau client arrivant dans le système attend avant d'être servi. Si l'un des s serveurs est libre à son arrivée, ce temps d'attente est bien sûr nul.

Proposition 1.20 (Temps d'attente)
En régime stationnaire, la loi du temps d'attente W d'un nouveau client arrivant dans le système est un mélange :
- *de la masse de Dirac en 0, avec probabilité $1 - \frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\pi_s$,*
- *de la loi exponentielle $\mathcal{E}(s\mu-\lambda)$, avec probabilité $\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\pi_s$.*

Preuve. La probabilité que le nouveau client n'attende pas est celle que l'un des s serveurs soit libre. Ceci arrive avec probabilité :

$$p = 1 - \mathbb{P}(N \geq s),$$

et on peut appliquer la formule d'Erlang 2 :

$$p = 1 - \frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\pi_s.$$

Maintenant, si le nouveau client arrive et qu'il y a un nombre n (supérieur ou égal à s) de clients déjà présents, son temps d'attente W est la somme de $(n-s+1)$ exponentielles indépendantes de paramètre $s\mu$: c'est une loi $\Gamma(n-s+1, s\mu)$. Un calcul identique à celui fait dans la preuve de la Proposition 1.15 donne alors :

$$f(w|N \geq s) = \frac{\sum_{n=s}^{+\infty} f(w|n)\pi_n}{\mathbb{P}(N \geq s)},$$

avec :

$$f(w|n) = \frac{(s\mu)^{n-s}w^{n-s}}{(n-s)!} s\mu e^{-s\mu w}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(w),$$

1. mais tout de même plus celle de William Shakespeare...

et on obtient :

$$f(w|N \geq s) = \frac{s\mu\pi_s e^{-(s\mu-\lambda)w}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(w)}{\mathbb{P}(N \geq s)},$$

or la formule d'Erlang 2 assure que :

$$\mathbb{P}(N \geq s) = \frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\pi_s,$$

il s'ensuit que :

$$f(w|N \geq s) = (s\mu - \lambda)e^{-(s\mu-\lambda)w}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(w).$$

Autrement dit, sachant que $N \geq s$:

$$W \sim \mathcal{E}(s\mu - \lambda).$$

■

Corollaire 1.3 (Temps d'attente et de séjour moyens)
En régime stationnaire, le temps d'attente moyen est :

$$\mathbb{E}[W] = \frac{s\mu}{(s\mu - \lambda)^2}\pi_s,$$

et le temps de séjour moyen est :

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\mu} + \mathbb{E}[W] = \frac{1}{\mu} + \frac{s\mu}{(s\mu - \lambda)^2}\pi_s.$$

Preuve. Une loi exponentielle de paramètre α a pour moyenne $1/\alpha$, donc d'après la proposition précédente :

$$\mathbb{E}[W] = 0 \cdot \left(1 - \frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\pi_s\right) + \frac{1}{s\mu - \lambda} \cdot \frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\pi_s = \frac{s\mu}{(s\mu - \lambda)^2}\pi_s.$$

Le temps de séjour T est égal à la somme du temps d'attente et du temps de service. Ce dernier suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$, de moyenne $1/\mu$, donc :

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\mu} + \mathbb{E}[W] = \frac{1}{\mu} + \frac{s\mu}{(s\mu - \lambda)^2}\pi_s.$$

■

Remarque. On retrouve donc pour la file $M/M/s$ la formule de Little :

$$\mathbb{E}[N] = \lambda\mathbb{E}[T].$$

Chapitre 2

Exercices

Exercice 2.1 (Consultation de copies)
Des étudiants arrivent au bureau d'un enseignant pour consulter leur copie, suivant un processus de Poisson de taux 3 par heure. L'enseignant était censé être là à 8h, mais n'est arrivé qu'à 10h.

1. Quelle est la probabilité qu'aucun étudiant ne soit venu entre 8h et 10h ?
2. Si un étudiant est venu durant ces deux heures et qu'il a trouvé porte close, il est aussitôt reparti. A partir de 10h, quelle est la distribution du temps que doit attendre l'enseignant avant de voir arriver un étudiant ?

Exercice 2.2 (Probabilités conditionnelles)
Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de taux 2.

1. Calculer les probabilités conditionnelles suivantes : $\mathbb{P}(N_3 = 4|N_1 = 1)$, $\mathbb{P}(N_1 = 1|N_3 = 4)$.
2. Notons T_n la date d'arrivée du client n. Déterminer : $\mathbb{E}[T_{12}]$, $\mathbb{E}[T_{12}|N_2 = 5]$, $\mathbb{E}[N_5|N_2 = 5]$.

Exercice 2.3 (Arrivées à un guichet)
Des clients arrivent au guichet d'une banque selon un processus de Poisson de densité 10 par heure. Sachant que deux clients sont arrivés durant les 5 premières minutes, calculer la probabilité que :

1. Les deux soient en fait arrivés durant les deux premières minutes.
2. Au moins un soit arrivé durant les deux premières minutes.

Corrigé
Des clients arrivent au guichet d'une banque selon un processus de Poisson de densité 10 par heure.

1. Avec les notations habituelles, on veut donc calculer $\mathbb{P}(N_{1/30} = 2|N_{1/12} = 2)$. Ceci peut se faire par la formule de Bayes :
$$\mathbb{P}(N_{1/30} = 2|N_{1/12} = 2) = \frac{\mathbb{P}(N_{1/12} = 2|N_{1/30} = 2)\mathbb{P}(N_{1/30} = 2)}{\mathbb{P}(N_{1/12} = 2)},$$
ce qui s'écrit encore :
$$\mathbb{P}(N_{1/30} = 2|N_{1/12} = 2) = \frac{\mathbb{P}(N_{1/12-1/30} = 0)\mathbb{P}(N_{1/30} = 2)}{\mathbb{P}(N_{1/12} = 2)} = \frac{\mathbb{P}(N_{1/20} = 0)\mathbb{P}(N_{1/30} = 2)}{\mathbb{P}(N_{1/12} = 2)},$$
et il reste à invoquer le fait que $N_t \sim \mathcal{P}(10t)$ pour obtenir :
$$\mathbb{P}(N_{1/30} = 2|N_{1/12} = 2) = \frac{4}{25}.$$

On remarque que la probabilité que les deux clients arrivés durant les 5 premières minutes soient en fait arrivés durant les 2 premières minutes est égale à $(2/5)^2$. Ceci est dû à une propriété des processus de Poisson [1] : si on sait que le nombre d'événements d'un processus de Poisson sur l'intervalle de temps $[0, T]$ est égal à n, alors les dates d'occurrences de ces n événements sont en fait indépendamment et uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, T]$.

2. On cherche cette fois $\mathbb{P}(N_{1/30} \geq 1 | N_{1/12} = 2)$, ce qui s'écrit encore :

$$\mathbb{P}(N_{1/30} \geq 1 | N_{1/12} = 2) = 1 - \mathbb{P}(N_{1/30} = 0 | N_{1/12} = 2).$$

Or par le même calcul qu'avant, on trouve :

$$\mathbb{P}(N_{1/30} = 0 | N_{1/12} = 2) = \frac{\mathbb{P}(N_{1/20} = 2)\mathbb{P}(N_{1/30} = 0)}{\mathbb{P}(N_{1/12} = 2)} = \cdots = \frac{9}{25}.$$

On pouvait le trouver directement via la remarque précédente : la probabilité qu'aucun événement n'arrive durant les 2 premières minutes sachant qu'il en arrive deux durant les 5 premières minutes est égale à la probabilité qu'aucun des deux points tirés au hasard indépendamment et uniformément dans le segment $[0, 5]$ ne tombe entre 0 et 2 : c'est bien sûr $3/5 \times 3/5 = 9/25$. Finalement on a :

$$\mathbb{P}(N_{1/30} \geq 1 | N_{1/12} = 2) = \frac{16}{25}.$$

Exercice 2.4 (Truismes)

Le trafic automobile sur une route corse suit un processus de Poisson de taux 6 voitures par minute. Un cochon sauvage sort de la forêt et essaye de traverser la route. S'il y a une voiture à passer dans les cinq secondes qui suivent, c'est la collision.

1. Calculer la probabilité de collision.
2. Quelle est la probabilité de collision si le cochon ne met que 2 secondes à traverser ?

Corrigé

1. Soit $t = 0$ la date à laquelle le cochon commence à traverser la route. Le nombre de voitures à passer à cet endroit à partir de $t = 0$ suit une loi de Poisson de paramètre 6. Notons $N_{1/12}$ le nombre de voitures à être passées jusqu'à la cinquième seconde : il y a collision si et seulement si $N_{1/12} \geq 1$. Ou encore, en notant T la date de passage de la première voiture, si et seulement si $T \leq 1/12$. Or on sait que T suit une loi exponentielle de paramètre 6, donc la probabilité de collision s'écrit :

$$p = \mathbb{P}\left(T \leq 1/12\right) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.39.$$

2. De la même façon, si le cochon ne met que 2 secondes à traverser, on a comme probabilité de collision :

$$p = 1 - e^{-\frac{1}{5}} \approx 0.18.$$

Exercice 2.5 (Standard téléphonique)

Le nombre d'appels par heure à un standard téléphonique suit un processus de Poisson de taux 4.

1. non exposée dans le cours, on ne peut pas tout faire...

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait strictement moins de deux appels la première heure ?
2. Supposons qu'il y a 6 appels la première heure, quelle est la probabilité qu'il y en ait strictement moins de deux la deuxième heure ?
3. L'opérateur fait une pause après avoir répondu à dix appels. Quelle est la durée moyenne séparant deux pauses ?
4. Trois quarts des appels sont dus à des hommes, un quart à des femmes, ceci indépendamment de l'heure de l'appel. Calculer la probabilité qu'en une heure il y ait exactement 2 hommes et 3 femmes à appeler le standard.

Corrigé
Le nombre d'appels par heure à un standard téléphonique suit un processus de Poisson de taux 4.

1. Le nombre d'appels au bout d'une heure suit une loi exponentielle de paramètre 4. La probabilité qu'il y ait strictement moins de 2 appels au bout d'une heure est celle qu'il y en ait 0 ou 1 :
$$p = e^{-4}\frac{4^0}{0!} + e^{-4}\frac{4^1}{1!} = 5e^{-4}.$$
2. Le fait qu'il y ait eu 6 appels la première heure ne change rien à la probabilité qu'il y en ait strictement moins de deux la deuxième heure : c'est toujours $p = 5e^{-4}$.
3. Le temps nécessaire (en heures) pour avoir 10 appels est T_{10}, somme de 10 exponentielles indépendantes de paramètre 4 : c'est donc une loi $\Gamma(10, 4)$. Sa moyenne est tout simplement :
$$d = \mathbb{E}[T_{10}] = \frac{10}{4} = 2\text{h}30.$$
4. Soit p la probabilité cherchée. Avec des notations évidentes, on peut décomposer p comme suit :
$$p = \mathbb{P}(2H, 3F|N_1 = 5)\mathbb{P}(N_1 = 5).$$
Le second terme est la probabilité qu'il y ait exactement 5 appels en 1 heure, c'est donc :
$$\mathbb{P}(N_1 = 5) = e^{-4}\frac{4^5}{5!}.$$
Le premier terme est la probabilité que sur 5 appels, 2 soient dus à des hommes et 3 à des femmes. Or, sur 5 appels, le nombre d'appels dus à des hommes suit une loi binômiale $\mathcal{B}(5, 3/4)$. Ceci donne :
$$\mathbb{P}(2H, 3F|N_1 = 5) = C_5^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$
Au total, la probabilité cherchée est donc :
$$p = \frac{3}{4}e^{-4}.$$

Exercice 2.6 (Entrées dans un magasin)
On suppose que les arrivées dans un magasin se font selon un processus de Poisson de taux 40 clients par heure. Ce magasin ouvre à 9h et ferme à 19h.

1. Quelle est la loi du nombre de clients sur la journée ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucun client n'arrive entre 9h et 9h15.

3. Calculer la probabilité qu'aucun client n'arrive entre 9h et 9h15 sachant qu'il en est arrivé 3 entre 9h et 9h30.
4. Calculer le nombre moyen de clients qui sont entrés dans le magasin jusqu'à 11h sachant qu'il en est arrivé 3 jusqu'à 9h30.
5. Un cadeau est offert par le magasin tous les 13 clients (c'est-à-dire au 13^e client, au 26^e, etc.). Donner la loi de la durée espaçant deux cadeaux.

Corrigé
Le corrigé est donné en Annexe (examen du 16 mars 2006).

Exercice 2.7 (Durée de vie)
La durée de vie d'une radio suit une loi exponentielle de moyenne 5 ans. Si j'achète une radio qui a 5 ans, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore deux ans plus tard ?

Exercice 2.8 (Exponentielles de matrices)
On considère les matrices suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour chacune, préciser si c'est l'exponentielle d'un générateur infinitésimal A, et si oui préciser lequel.

Corrigé
La matrice P est tout simplement l'exponentielle de la matrice nulle, puisqu'elle est diagonale et que $1 = e^0$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Pour la matrice Q, on remarque qu'elle n'est pas inversible, donc ça ne peut pas être l'exponentielle d'une matrice : en effet, si on avait $Q = \exp(A)$, alors Q serait inversible d'inverse $\exp(-A)$. Ceci découle du produit d'exponentielles pour des matrices qui commutent (ce qui est bien le cas avec A et $-A$) :

$$\exp(A)\exp(-A) = \exp(A - A) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour la matrice R, supposons que ce soit l'exponentielle d'un générateur infinitésimal A. On aurait donc $R = \exp(A)$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} -a & a \\ b & -b \end{bmatrix},$$

avec a et b des réels positifs ou nuls. Le polynôme caractéristique de A vaut donc :

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \lambda(\lambda + (a + b)).$$

Donc de deux choses l'une : ou bien $a + b > 0$, auquel cas A est diagonalisable, de valeurs propres 0 et $(a + b)$. Mais alors d'après ce qu'on a vu en cours, $\exp(A)$ est également diagonalisable, de valeurs propres $e^0 = 1$ et e^{a+b}. Or R a pour valeurs propres 1 et -1 donc c'est impossible. Ou bien $a + b = 0$, i.e. $a = b = 0$, mais alors A est la matrice nulle et $\exp(A) = I_2 \neq R$. Bref, R n'est pas l'exponentielle d'un générateur infinitésimal.

Exercice 2.9 (Poisson à toutes les sauces)

1. Des clients arrivent dans un magasin selon un processus de Poisson d'intensité 30 par heure. Quelle est la probabilité que le temps entre deux arrivées successives soit :
   (a) Plus de 2 minutes ?
   (b) Moins de 4 minutes ?
   (c) Entre 1 et 3 minutes ?
2. Des malades arrivent chez un médecin suivant un processus de Poisson de taux 6 par heure. Le médecin ne reçoit pas de malade tant qu'il n'y a pas 3 malades dans la salle d'attente.
   (a) Quelle est la loi de la durée écoulée jusqu'au moment où le premier malade est reçu par le médecin ? Quelle est sa moyenne ?
   (b) Quelle est la probabilité que personne ne soit reçu pas le médecin en 30 minutes ?
3. Sur une route à sens unique, l'écoulement des voitures peut être décrit par un processus de Poisson de paramètre 10 par minute. Un piéton qui veut traverser la route a besoin d'un intervalle d'au moins 4 secondes.
   (a) Calculer la probabilité pour que le piéton doive attendre.
   (b) Calculer la durée moyenne des intervalles qui lui permettent de traverser la route, c'est-à-dire :
   $$\mathbb{E}[T|T>4]=\frac{\mathbb{E}[T\mathbb{1}_{\{T>4\}}]}{\mathbb{P}(T>4)},$$
   en notant T l'intervalle de temps entre deux passages de voitures.

Corrigé

Le corrigé est donné en Annexe (examen du 29 mars 2007).

Exercice 2.10 (Somme géométrique d'exponentielles)

Soit $T_1, T_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ. Soit N une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(N=n)=p(1-p)^{n-1}.$$

On considère la variable aléatoire $T = T_1 + \cdots + T_N$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Donner la densité de T sachant $N = n$, notée $f(T = t|N = n)$.
2. Justifier le fait que la densité f_T de T s'écrit :
$$f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty} f(t|n)\mathbb{P}(N=n).$$
3. En déduire que T suit une loi exponentielle de paramètre λp.

Corrigé

Soit $T_1, T_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ. Soit N une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(N=n)=p(1-p)^{n-1}.$$

On considère la variable aléatoire $T = T_1 + \cdots + T_N$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. La somme de n variables aléatoires exponentielles indépendantes $T_1, \ldots, T_n$ est une variable aléatoire de loi $\Gamma(n, \lambda)$. Sa densité est :
$$f(t|n) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t).$$
2. Considérant le couple aléatoire (T, N), $f(t)$ peut être vue comme la densité marginale de T. On peut donc écrire :
$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(t,n) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(t|n)\mathbb{P}(N = n).$$
3. On en déduit la densité de T :
$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda t} p(1-p)^{n-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t).$$
On sort ce qui ne bouge pas et on change $(n-1)$ en n :
$$f(t) = p\lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{((1-p)\lambda t)^n}{n!} = (\lambda p)e^{-(\lambda p)t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t),$$
c'est-à-dire que T suit une loi exponentielle de paramètre λp.

Exercice 2.11 (Minimum d'exponentielles)

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Soit $Y = \min(X_1, X_2)$ le minimum de ces deux variables. Montrer que Y suit une loi exponentielle de paramètre $(\lambda_1 + \lambda_2)$ (on pourra utiliser les fonctions de répartition).
2. Montrer que la probabilité que $Y = X_1$ vaut $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ (on pourra calculer $\mathbb{P}(X_1 < X_2)$ en conditionnant par rapport à X_2).
3. Deux guichets sont ouverts à une banque : le temps de service au premier (respectivement second) guichet suit une loi exponentielle de moyenne 20 (respectivement 30) minutes. Benjamin et Kevin sont convoqués à la banque pour s'expliquer sur leurs découverts respectifs : Benjamin choisit le guichet 1, Kevin le 2. Quelle est la probabilité que Benjamin sorte le premier ?
4. En moyenne, combien de temps faut-il pour que les deux soient sortis ?

Corrigé

1. Notons F_Y la fonction de répartition de Y, alors :
$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) \leq y) = 1 - P(\min(X_1, X_2) > y),$$
ce qui s'écrit encore :
$$F_Y(y) = 1 - \mathbb{P}\left(\{X_1 > y\} \cap \{X_2 > y\}\right).$$
Or X_1 et X_2 sont indépendantes :
$$F_Y(y) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > y)\mathbb{P}(X_2 > y) = 1 - e^{-\lambda_1 y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)e^{-\lambda_2 y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y),$$
c'est-à-dire que $Y \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

2. On a :
$$\mathbb{P}(Y = X_1) = \mathbb{P}(X_1 < X_2) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 < X_2 | X_2 = x) f_{X_2}(x)\, dx,$$
c'est-à-dire :
$$\mathbb{P}(Y = X_1) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 < x | X_2 = x) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\, dx.$$
Mais puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, le premier terme dans l'intégrale est simplement :
$$\mathbb{P}(X_1 < x | X_2 = x) = \mathbb{P}(X_1 < x) = 1 - e^{-\lambda_1 x},$$
d'où l'on déduit :
$$\mathbb{P}(Y = X_1) = \int_0^{+\infty} \left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} - \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \right) dx = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$
Finalement on a bien :
$$\mathbb{P}(Y = X_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$
3. Rappelons qu'une exponentielle de moyenne 20 a pour paramètre 1/20. La probabilité que Benjamin sorte le premier est donc tout simplement :
$$p = \frac{1/20}{1/20 + 1/30} = \frac{3}{5}.$$
4. Soit X_b, respectivement X_k, le temps nécessaire pour que Benjamin, respectivement Kevin, sorte de la banque. On cherche donc à calculer $\mathbb{E}[\max(X_b, X_k)]$. Il suffit de remarquer que :
$$\max(X_b, X_k) = X_b + X_k - \min(X_b, X_k),$$
d'où par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}[\max(X_b, X_k)] = \mathbb{E}[X_b] + \mathbb{E}[X_k] - \mathbb{E}[\min(X_b, X_k)] = 20 + 30 - \frac{1}{1/20 + 1/30} = 38 \text{ min}.$$

Exercice 2.12 (The Birds)

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y qui suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs α et β. Soit $Z = X + Y$ leur somme. Montrer que Z suit une loi de Poisson de paramètre $(\alpha + \beta)$.
2. On considère deux processus de Poisson indépendants $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t)_{t\geq 0}$ de taux respectifs λ et μ. Soit $(S_t)_{t\geq 0}$ le processus somme, c'est-à-dire qu'à tout instant t, on a $S_t = N_t + M_t$. A l'instant t, quelle est la loi de S_t ?
3. Que peut-on dire du processus $(S_t)_{t\geq 0}$?
4. Dans le film d'Alfred Hitchcock, des corbeaux et des goélands se posent autour de la maison. Ils arrivent suivant des processus de Poisson indépendants de taux 3, respectivement 4, par minute. Soit T la date d'arrivée du premier oiseau. Quelle est la loi de T ?
5. Quelle est la probabilité que ce premier oiseau soit un goéland ?

Corrigé

1. La variable aléatoire Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$ en tant que somme de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit donc $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors :
$$\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(X + Y = n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n}\{X = k, Y = n - k\}\right) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X = k, Y = n - k).$$
Or X et Y sont indépendantes, donc :
$$\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n-k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\beta}\frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha^k \beta^{n-k},$$
et on reconnaît la formule du binôme :
$$\mathbb{P}(Z = n) = e^{-(\alpha+\beta)}\frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}.$$
C'est-à-dire que Z suit une loi de Poisson de paramètre $(\alpha + \beta)$. Ce résultat se généralise d'ailleurs sans problème : si les $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ sont indépendantes, alors leur somme S suit encore une loi de Poisson :
$$S \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n).$$
2. A l'instant t, $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ et $M_t \sim \mathcal{P}(\mu t)$, avec N_t et M_t indépendantes, donc d'après la question précédente $S_t \sim \mathcal{P}((\lambda + \mu)t)$.
3. Le processus $(S_t)_{t\geq 0}$ est donc un processus de Poisson de taux $(\lambda + \mu)$.
4. On sait par la théorie des processus de Poisson que la date d'arrivée du premier corbeau, respectivement goéland, suit une loi exponentielle de paramètre 3, respectivement 4. On s'intéresse donc au minimum de deux exponentielles indépendantes : il suffit d'appliquer l'exercice précédent pour en déduire que $T \sim \mathcal{E}(7)$. Une autre façon d'arriver à ce résultat est d'appliquer la question précédente : on s'intéresse au processus $(S_t)_{t\geq 0}$ qui dénombre à la fois les corbeaux et les goélands : c'est un processus de Poisson de taux 7, donc la date d'arrivée du premier oiseau suit une loi exponentielle de paramètre 7.
5. Pour déterminer la probabilité que ce premier oiseau soit un goéland, il suffit à nouveau d'appliquer l'exercice précédent :
$$p = \frac{4}{3+4} = \frac{4}{7}.$$

Exercice 2.13 (Urgences)
Des malades arrivent à l'hôpital selon un processus de Poisson d'intensité 12 par heure. La loi des durées des consultations est exponentielle, de moyenne 10 minutes.

1. Combien de médecins au minimum faut-il pour éviter l'engorgement ?
2. On décide d'affecter 3 médecins aux consultations. Quel sera le temps d'attente moyen d'un malade en régime stationnaire ?
3. Combien y aura-t-il de malades en attente en moyenne ?
4. Combien de médecins seront inoccupés en moyenne ?

Exercice 2.14 (La poste)

1. Il y a dans une poste deux files d'attente identiques et totalement séparées : ce sont deux files de type $M/M/1$. Pour chacune d'elles, les arrivées sont séparées par des temps exponentiels de paramètre λ, les temps de service sont exponentiels de paramètre μ (on suppose $\lambda < \mu$). Toutes les variables aléatoires du système sont indépendantes.

(a) Combien de clients en moyenne y a-t-il dans la poste en régime stationnaire ?

(b) Quel est le temps d'attente moyen d'un client arrivant en régime stationnaire ?

2. On décide de fusionner les deux files pour en faire une seule file à deux serveurs. Les clients continuent à arriver à la poste au même rythme (2λ en moyenne par unité de temps). Le temps de service de chaque client est encore exponentiel de paramètre μ.

   (a) Combien de clients en moyenne y a-t-il dans la poste en régime stationnaire ?

   (b) Quel est le temps d'attente moyen d'un client arrivant en régime stationnaire ?

3. Le fonctionnement a-t-il été amélioré :

   (a) du point de vue de la poste ?

   (b) du point de vue des clients ?

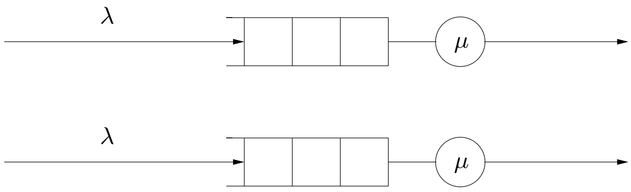

FIGURE 2.1 – Deux files d'attente $M/M/1$ séparées.

Corrigé

1. (a) Le nombre moyen de clients dans la poste en régime stationnaire est égal à deux fois le nombre moyen de clients pour une file $M/M/1$ classique (cf. figure 2.1). On a donc d'après la formule du cours : :

$$\mathbb{E}[N_1] = \frac{2\lambda}{\mu - \lambda}.$$

   (b) Le temps d'attente moyen d'un client arrivant en régime stationnaire, noté $\mathbb{E}[W_1]$, est le temps d'attente moyen pour une file $M/M/1$ classique. C'est encore le temps moyen de séjour (formule vue en cours) moins le temps moyen de service (qui suit une loi exponentielle de paramètre μ). Ainsi :

$$\mathbb{E}[W_1] = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

2. (a) On a donc une file de type $M/M/2$, avec paramètres 2λ et μ (voir figure 2.2). Puisque $\lambda < \mu$, on a aussi $2\lambda < 2\mu$ et le processus est bien récurrent positif. On commence par déterminer la loi stationnaire π, ce qui donne après calculs :

$$\begin{cases} \pi_0 & = \frac{1}{2}(\mu/\lambda)^2 \pi_2 \\ \pi_1 & = (\mu/\lambda)\pi_2 \\ \pi_n & = (\lambda/\mu)^{n-2}\pi_2 \qquad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

   avec :

$$\pi_2 = \frac{2\lambda^2(\mu - \lambda)}{\mu^2(\mu + \lambda)}.$$

   Si N_2 désigne le nombre moyen de clients dans la poste en régime stationnaire, on a donc :

$$\mathbb{E}[N_2] = \sum_{n=0}^{+\infty} n\pi_n = \pi_1 + \pi_2 \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-2},$$

ce qui s'écrit encore :

$$\mathbb{E}[N_2] = \frac{\mu}{\lambda}\pi_2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}.$$

Et il suffit de remarquer que :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

pour obtenir finalement :

$$\mathbb{E}[N_2] = \frac{2\mu\lambda}{(\mu+\lambda)(\mu-\lambda)}.$$

(b) Pour le temps d'attente moyen $\mathbb{E}[W_2]$ d'un client arrivant en régime stationnaire, on peut appliquer directement la formule générale déjà vue en cours :

$$\mathbb{E}[W_2] = \frac{s\mu}{(s\mu-\lambda)^2}\pi_s,$$

ce qui donne ici :

$$\mathbb{E}[W_2] = \frac{2\mu}{(2\mu-2\lambda)^2}\pi_2 = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu+\lambda)(\mu-\lambda)}.$$

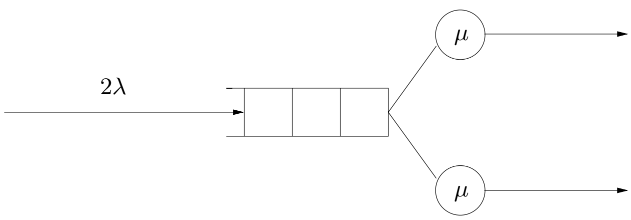

FIGURE 2.2 – Une file d'attente $M/M/2$.

3. (a) Du point de vue du client, puisque le temps de service est le même dans les deux cas (loi exponentielle de paramètre μ), il suffit de comparer les temps d'attente. Or, puisque :

$$\frac{\lambda}{\mu+\lambda} < 1,$$

il est clair que :

$$\mathbb{E}[W_2] = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu+\lambda)(\mu-\lambda)} < \mathbb{E}[W_1] = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)},$$

donc le second système est préférable au premier du point de vue du client.

(b) Du point de vue de la poste, quel est le critère ? Si c'est l'encombrement du bureau, alors il suffit de comparer les nombres moyens de clients dans les deux cas. Or, puisque :

$$\frac{\mu}{\mu+\lambda} < 1,$$

il est clair que :

$$\mathbb{E}[N_2] = \frac{2\mu\lambda}{(\mu+\lambda)(\mu-\lambda)} < \mathbb{E}[N_1] = \frac{2\lambda}{\mu-\lambda},$$

donc moins d'encombrement avec le second système. Si on aborde la question d'un point de vue Medef, on sera soucieux du taux d'activité des employés pour chacun des systèmes. Le taux d'activité est la proportion du temps pendant laquelle le guichetier est occupé. Pour le premier système, les deux files étant identiques, il est clair que ce taux est le même pour les deux employés. C'est celui d'une file $M/M/1$ classique, c'est-à-dire :

$$\rho_1 = 1 - \pi_0 = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Pour le second système, c'est un peu plus siouxe : lorsqu'il n'y a aucun client, les deux employés sont inactifs (proportion π_0 du temps) ; lorsqu'il y a un client, seul l'un des deux employés est inactif (proportion π_1 du temps). Au total, le taux d'activité de chaque employé est donc :

$$\rho_2 = 1 - \left(\pi_0 + \frac{\pi_1}{2}\right),$$

et après calculs, on obtient :

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu} = \rho_1,$$

et le taux d'activité est donc le même dans les deux cas. Ainsi on a tout intérêt à adopter le second système : c'est du reste celui qu'on voit généralement à la poste, dans les gares, aéroports...

Exercice 2.15 (File avec découragement)

On considère un système d'attente du type $M/M/1$. Les clients se présentent devant la file selon un processus de Poisson d'intensité λ. Les temps de service sont exponentiels de paramètre μ. On fait l'hypothèse supplémentaire suivante : un client qui arrive devant la file choisit de rester ou non en fonction du nombre de clients déjà présents dans le système. Si ce nombre est n, il choisit de rester avec la probabilité q_n ou de quitter instantanément avec la probabilité $(1 - q_n)$. On suppose que $(q_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante et on note q sa limite. On note N_t le nombre de clients présents dans le système à l'instant t.

1. Montrer que $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de vie et de mort et préciser ses taux de transition.
2. A quelle condition ce processus est-il récurrent positif ?
3. On suppose que :

$$\forall n \geq 0 \qquad q_n = \frac{1}{n+1}$$

   (a) Déterminer la loi stationnaire.
   (b) Quel est le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'un client arrivant dans le système en régime stationnaire reste dans le système ?
   (d) Quel est le temps passé par ce client dans le système s'il a décidé de rester et si n clients sont déjà présents quand il arrive ?
   (e) En déduire le temps moyen passé par un client dans le système en régime stationnaire.
4. N est un entier strictement positif fixé. On suppose que :

$$q_n = \begin{cases} \frac{1-\frac{n}{N}}{n+1} & \forall n \in \{0, \dots, N\} \\ 0 & \forall n \geq N \end{cases}$$

   (a) Déterminer la loi stationnaire.
   (b) Quel est le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire ?

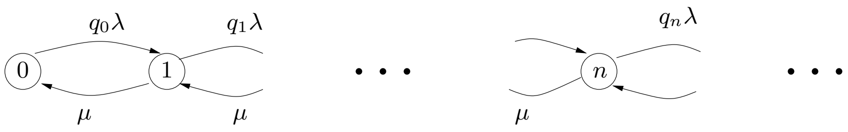

Figure 2.3 – Graphe de transition du processus de découragement.

(c) Que devient ce nombre quand λ tend vers 0 ? vers l'infini ?

Corrigé

1. C'est un processus de vie et de mort de taux (voir figure 2.3) :

$$\begin{cases} \lambda_n &= q_n\lambda \quad \forall n \geq 0 \\ \mu_n &= \mu \quad\quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

2. D'après la théorie générale des processus de naissance et de mort, ce processus est récurrent positif si et seulement si la série :

$$\sum_{n\geq 1} q_0 \dots q_{n-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

est convergente.

3. On suppose que :

$$\forall n \geq 0 \qquad q_n = \frac{1}{n+1}$$

(a) Pour la loi stationnaire, on a pour tout $n \geq 1$:

$$\pi_n = q_0 \dots q_{n-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0.$$

Puisqu'on doit avoir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = 1,$$

on en déduit que $\pi_0 = e^{-\lambda/\mu}$ et par suite :

$$\forall n \geq 0 \qquad \pi_n = \frac{e^{-\lambda/\mu}}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n,$$

c'est-à-dire que la loi stationnaire est la loi de Poisson de paramètre λ/μ.

(b) Le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire, noté $\mathbb{E}[N]$, est donc l'espérance d'une loi de Poisson :

$$\mathbb{E}[N] = \frac{\lambda}{\mu}.$$

(c) La probabilité qu'un client arrivant dans le système en régime stationnaire reste dans le système se calcule en conditionnant par rapport au nombre de clients qu'il trouve dans le système à son arrivée. Notons $\mathbb{P}(R)$ la probabilité qu'il reste et $\mathbb{P}(R|N=n)$ la probabilité qu'il reste s'il y a déjà n clients à son arrivée :

$$\mathbb{P}(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(R|N=n)\pi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{e^{-\lambda/\mu}}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\mathbb{P}(R) = e^{-\lambda/\mu}\frac{\mu}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} = e^{-\lambda/\mu}\frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda/\mu}-1),$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(R) = \frac{\mu}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda/\mu}\right).$$

(d) Le temps passé par ce client dans le système s'il a décidé de rester et si n clients sont déjà présents quand il arrive est la somme de $(n+1)$ exponentielles de paramètre μ. En moyenne, ceci fait :

$$\mathbb{E}[T|N=n] = \frac{n+1}{\mu}.$$

(e) Le temps moyen passé par un client dans le système en régime stationnaire s'obtient alors en conditionnant :

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}[T|N=n]\pi_n = \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\pi_n = \frac{1}{\mu}(\mathbb{E}[N]+1),$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right).$$

4. N est un entier strictement positif fixé. On suppose que

$$q_n = \begin{cases} \frac{1-\frac{n}{N}}{n+1} & \forall n \in \{0,\dots,N\} \\ 0 & \forall n \geq N \end{cases}$$

(a) La loi stationnaire s'obtient comme d'habitude en exprimant les π_n en fonction de π_0. Après quelques simplifications, on obtient pour tout $n \in \{0,\dots,N\}$:

$$\pi_n = C_N^n\left(\frac{\lambda}{N\mu}\right)^n\pi_0,$$

et bien sûr $\pi_n = 0$ pour $n > N$. On doit donc avoir :

$$1 = \sum_{n=0}^{N} C_N^n\left(\frac{\lambda}{N\mu}\right)^n\pi_0 = \left(1+\frac{\lambda}{N\mu}\right)^N\pi_0 = \left(\frac{\lambda+N\mu}{N\mu}\right)^N\pi_0,$$

c'est-à-dire que pour tout $n \in \{0,\dots,N\}$:

$$\pi_n = C_N^n\left(\frac{\lambda}{\lambda+N\mu}\right)^n\left(\frac{N\mu}{\lambda+N\mu}\right)^{N-n},$$

ce qui signifie que la loi stationnaire est une loi binômiale $\mathcal{B}(N, \frac{\lambda}{\lambda+N\mu})$.

(b) Le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire est donc l'espérance de cette loi binômiale :

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{B}\left(N, \frac{\lambda}{\lambda+N\mu}\right)\right] = \frac{N\lambda}{\lambda+N\mu}.$$

(c) Quand λ tend vers 0, ce nombre moyen tend vers 0. Quand λ tend vers l'infini, ce nombre moyen tend vers N.

Exercice 2.16 (Réseau téléphonique)
On considère une file de type $M/M/3$: processus d'arrivées poissonien de taux 2 par minute, durées de services exponentielles de moyenne 1 minute, 3 serveurs. On suppose de plus qu'il n'y a pas de salle d'attente, c'est-à-dire que si un client arrive et que les 3 serveurs sont occupés, il repart aussitôt.

1. Donner le générateur infinitésimal et le graphe de transition.
2. Déterminer la loi stationnaire π.
3. Quelle est la probabilité qu'un client soit rejeté ?
4. Quel est le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire ?
5. Quel est le temps moyen de séjour d'un client entrant effectivement dans le système ? En déduire la formule de Little.
6. On généralise le modèle précédent en considérant une file $M/M/s$ à s serveurs, taux d'arrivées λ et taux de service μ, toujours sans salle d'attente. On note $\rho = \lambda/\mu$. Montrer que la probabilité qu'un client soit rejeté est :
$$\frac{\rho^s}{s! \sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!}}.$$

Corrigé
Le corrigé est donné en Annexe (sujet du 16 mars 2006).

Exercice 2.17 (Station service)
Des clients arrivent à une station service à une seule pompe à un taux de 20 voitures par heure. Si un client arrive et trouve deux voitures dans la station (une en train d'être servie et une en attente de l'être), il poursuit sa route à la recherche d'une nouvelle station. On suppose que le temps de service est exponentiel de moyenne 6 minutes.

1. Déterminer la distribution stationnaire du nombre de voitures dans la station. On se place dans toute la suite en régime stationnaire.
2. Quel est le temps moyen de séjour ?
3. Quel est le temps moyen d'attente ?
4. Vérifier la formule de Little sur cet exemple.

Exercice 2.18 (File $M/M/\infty$)
Une file $M/M/\infty$ est l'extension (un peu irréaliste) d'une file $M/M/s$ avec une infinité de serveurs identiques. Les arrivées sont poissoniennes de taux λ et le temps de service de chaque serveur exponentiel de paramètre μ. Chaque client qui arrive dans le serveur se dirige vers l'un des serveurs libres.

1. Modéliser ceci par un processus de naissance et de mort dont on précisera les taux de naissance λ_n et de mort μ_n. Dessiner le graphe de transition.
2. Montrer que la loi stationnaire π est une loi de Poisson.
3. Déterminer le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire.
4. Vérifier la formule de Little.

Corrigé
Le corrigé est donné en annexe, sujet de mai 2005.

Exercice 2.19 (File $M/M/1$ versus file $M/M/2$)
On se pose la question suivante : est-il préférable d'avoir un poste de travail ayant deux processeurs ou un seul processeur travaillant deux fois plus vite ?

1. Considérons une file de type $M/M/2$, taux d'arrivée $\lambda = 1$ requête par seconde et taux de service $\mu = 2$ requêtes exécutées par seconde. Calculer le temps de séjour moyen dans le système.
2. Considérons une file de type $M/M/1$, taux d'arrivée $\lambda = 1$ requête par seconde et taux de service $2\mu = 4$ requêtes exécutées par seconde. Calculer le temps de séjour moyen dans le système.
3. Comparer les résultats obtenus et conclure.
4. Généralisation : montrer que le résultat est toujours vrai dès qu'on suppose $\lambda < \mu$.

Corrigé
Le corrigé est donné en annexe, sujet de mai 2005.

Exercice 2.20 (File à un puis deux serveurs)
On considère une file de type $M/M/1$ avec un taux de 2 arrivées par minute et des durées de service de moyenne 30 secondes.

1. La file a tendance à saturer. Est-ce que ceci vous étonne ? Pour remédier à ce problème, on propose la solution suivante : dès qu'il y a 3 personnes dans le serveur, c'est-à-dire dès qu'arrive une deuxième personne dans la salle d'attente, on met en fonctionnement un second serveur identique au premier.
2. Modéliser ceci par un processus de naissance et de mort dont on précisera les taux de naissance λ_n et de mort μ_n. Dessiner le graphe de transition.
3. Déterminer la loi stationnaire π.
4. Déterminer le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire.
5. Généraliser avec mise en fonctionnement du second serveur dès que le nombre de personnes en attente est égal à s.

Corrigé
Le corrigé est donné en annexe, sujet de mai 2005.

Exercice 2.21 (Salle d'attente limitée)
On part d'une file d'attente de type $M/M/1$: processus d'arrivées poissonien de taux $\lambda > 0$, durées de services exponentielles de paramètre $\mu > 0$, un seul serveur. On suppose de plus que la salle d'attente a une capacité limitée à 3 places. S'il y a déjà 3 personnes dans la salle d'attente lorsqu'un nouveau client arrive, celui-ci passe son chemin.

1. Donner le graphe de transition.
2. Sans calculs, justifier pourquoi ce processus admet une unique distribution stationnaire π.
3. On suppose dans un premier temps que $\lambda = \mu$.
   (a) Calculer la loi stationnaire π.
   (b) Déterminer le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire.
   (c) Quel est le temps moyen de séjour d'un nouveau client, sachant qu'il trouve un nombre $n < 4$ de clients dans le système à son arrivée ?
   (d) En déduire le temps moyen de séjour d'un client dans le système.
   (e) Vérifier la formule de Little.

4. On suppose maintenant que $\lambda \neq \mu$. Répondre aux mêmes questions que dans le cas $\lambda = \mu$.

Corrigé
Le corrigé est donné en Annexe (sujet du 16 mars 2006).

Exercice 2.22 (The Barber)
On considère un salon de coiffure où se trouvent deux coiffeurs ayant chacun un poste de travail. Dans ce salon, il y a en plus une place pour l'attente éventuelle. Les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux 5 par heure. Si un client arrive et que le salon est plein, il repart aussitôt. On suppose que la durée d'une coupe est exponentielle de moyenne 30 minutes.

1. Donner le générateur infinitésimal et le graphe de transition.
2. Déterminer la loi stationnaire π.
3. Quel est le nombre moyen de clients dans le salon en régime stationnaire ?
4. Quel est le taux moyen d'entrée dans le système en régime stationnaire ?
5. Rappeler la formule de Little. En déduire le temps moyen de séjour dans le salon.

Corrigé
Le corrigé est donné en Annexe (sujet du 29 mars 2007).

Exercice 2.23 (File $M/M/\infty/\infty/N$)
On considère un système dont le nombre de clients potentiels est égal à 3. Chacun des clients, lorsqu'il n'est pas déjà dans le système, y entre au bout d'un temps exponentiel de paramètre λ, indépendamment des autres. Les durées des services des clients sont indépendantes exponentielles de paramètre μ. Le système a par ailleurs une salle d'attente et un nombre de serveurs illimités, de sorte que tout client entrant dans le système est servi aussitôt. Le graphe de transition associé est donné figure 2.4.

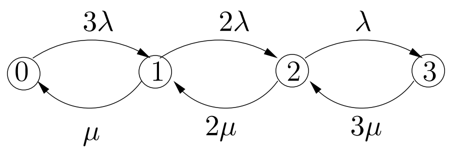

Figure 2.4 – Graphe de transition du système à nombre limité de clients.

1. Justifier les nombres 3λ et 2μ du graphe de transition.
2. Déterminer la loi stationnaire π. On pourra poser $r = \frac{\lambda}{\mu}$ pour simplifier les formules.
3. Quel est le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire ?
4. On considère le même système, mais avec N clients potentiels au lieu de 3.
   (a) Donner le graphe de transition.
   (b) Montrer que la loi stationnaire est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(N, \frac{r}{1+r}\right)$.
   (c) En déduire le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire.

Corrigé
Le corrigé est donné en Annexe (sujet du 29 mars 2007).

Exercice 2.24 (Simulation d'une file d'attente)
On veut simuler une file $M/M/1$. Il arrive en moyenne λ clients par minute. Le serveur peut servir en moyenne μ clients par minute.

1. Pour $\lambda = 2$ et $\mu = 3$, simuler les dates d'arrivée et de départ des 100 premiers clients. Construire un graphe représentant le nombre de personnes dans le système jusqu'à l'arrivée du cinquantième.
2. Avec les mêmes valeurs des paramètres, donner la distribution empirique du nombre de clients dans le système à l'arrivée du cinquantième, celui-ci n'étant pas compté. Retrouver une loi géométrique décalée.
3. Si $\lambda = 3$ et $\mu = 2$, exhiber graphiquement le comportement transient du processus : le nombre de clients dans le système tend presque sûrement vers l'infini.
4. Si $\lambda = 2$ et $\mu = 2$, retrouver le comportement récurrent nul du processus.
5. Le processus d'arrivée est toujours poissonien avec $\lambda = 2$. Par contre, on suppose que la loi du service est déterministe : un client est servi en exactement 20 secondes. A-t-on toujours convergence en loi vers une loi géométrique décalée ? Sinon, donner le diagramme en bâtons de la loi empirique obtenue.
6. Retrouver le cas transient si $\lambda = 3$ et en supposant qu'un client est servi en exactement 30 secondes.
7. Retrouver le cas récurrent nul si $\lambda = 2$ et en supposant qu'un client est servi en exactement 30 secondes.

Corrigé
Les simulations sont effectuées à l'aide du logiciel R. Seules les deux premières questions nécessitent un peu de travail, le reste consiste en des variations.

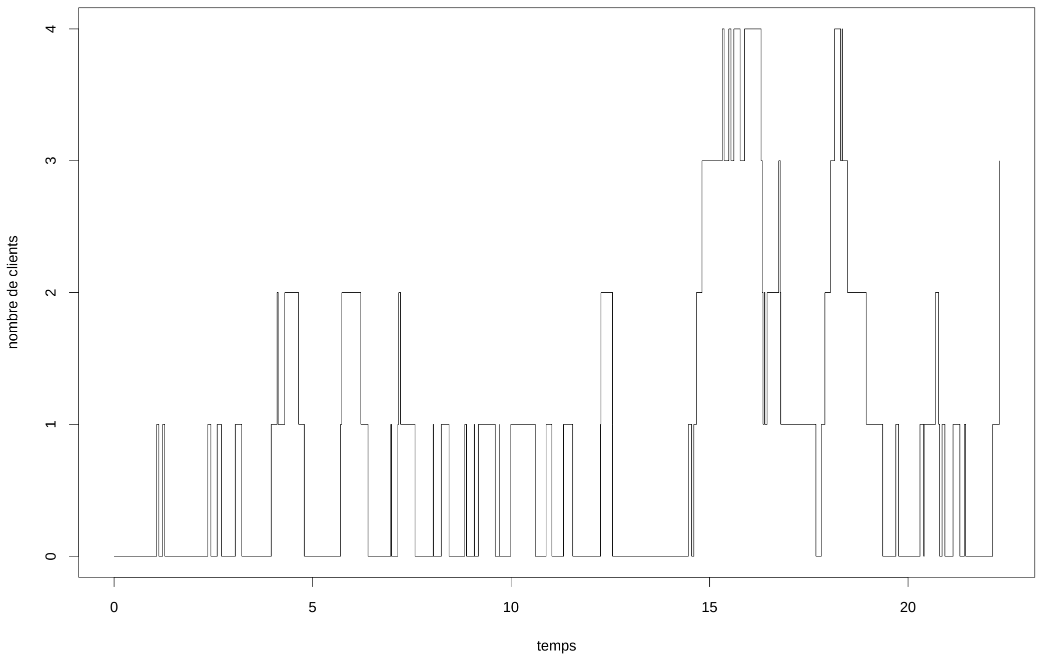

FIGURE 2.5 – Simulation de la file d'attente jusqu'à l'arrivée du cinquantième client.

1. Le résultat est représenté figure 2.5. Attention ! Pour les Anglo-Saxons, une loi exponentielle de paramètre l est une loi exponentielle de moyenne l, ce qui est l'inverse de notre convention.

```
l=2 # il arrive en moyenne l clients par minute.
m=3 # le serveur peut servir en moyenne m clients par minute.
n0=100 # on s’intéresse aux n0 premiers clients.
I=rexp(n0,l) # simulation des durées inter-arrivées.
A=cumsum(I) # dates des arrivées des clients.
D=rexp(n0,m) # simulation des durées de service des clients.
S=numeric(n0); S[1]=A[1]+D[1]; # S=dates de sortie des clients.
for (i in 1:(n0-1)){S[i+1]=max(S[i],A[i+1])+D[i+1]}
E=c(A,S) # vecteur des arrivées et sorties, qu’il faut remettre en ordre...
ordre=order(E)
E=E[ordre] # c’est fait.
es=c(rep(1,n0),rep(-1,n0))
es=es[ordre]
nbc=cumsum(es) # nombre de clients dans le service à chaque arrivée/sortie.
E=c(0,E)
indn0=which(E==A[n0/2])
E=E[1:indn0] # on ne s’intéresse qu’aux n0/2 premiers clients.
nbc=c(0,nbc)
nbc=nbc[1:indn0]
plot(E,nbc,type=’s’,xlab=’temps’,ylab=’nombre de clients’)
```

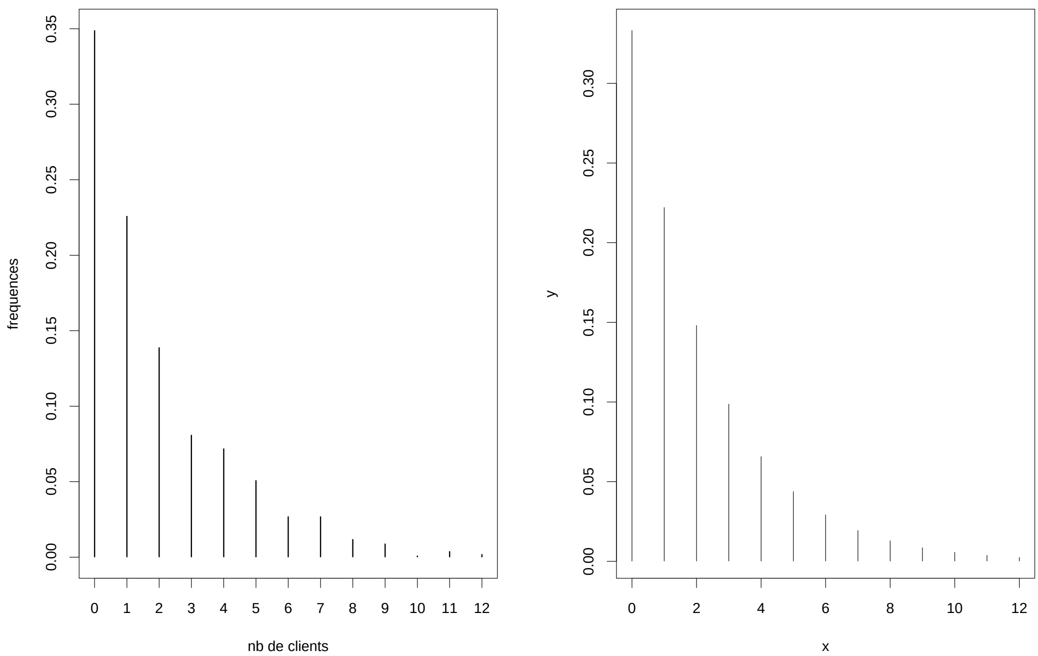

FIGURE 2.6 – Diagramme en bâtons du nombre de clients dans le service à l’arrivée du cinquantième (à gauche) et distribution stationnaire théorique (à droite).

2. Le résultat est représenté figure 2.6 : à gauche le diagramme en bâtons obtenu par simulations, à droite la distribution d’équilibre théorique $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots]$ (dite “géométrique décalée”) vue en cours :

$$\pi_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n,$$

c'est-à-dire dans notre cas :

$$\pi_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

```
nc=function(l,m,n0){ # calcul du nb de clients à l'arrivée du client n0.
  I=rexp(n0,l) # simulation des inter-arrivées.
  D=rexp(n0-1,m) # simulation des durées de service.
  A=cumsum(I) # dates des arrivées.
  S=numeric(n0-1); S[1]=A[1]+D[1];
  for (i in 1:(n0-2)){S[i+1]=max(S[i],A[i+1])+D[i+1]}
  C=sort(c(S,A[n0]))
  res=n0-which(C==A[n0])
  return(res)
}

l=2
m=3
n0=50
ns=1000
var=numeric(ns)
for (i in 1:ns){var[i]=nc(l,m,n0)}
mm=matrix(1:2,nrow=1,ncol=2)
layout(mm)
plot(table(var)/ns,type='h',xlab='nb de clients',ylab='frequences')
x=0:max(var)
y=dgeom(x,1-l/m)
plot(x,y,type='h')
```

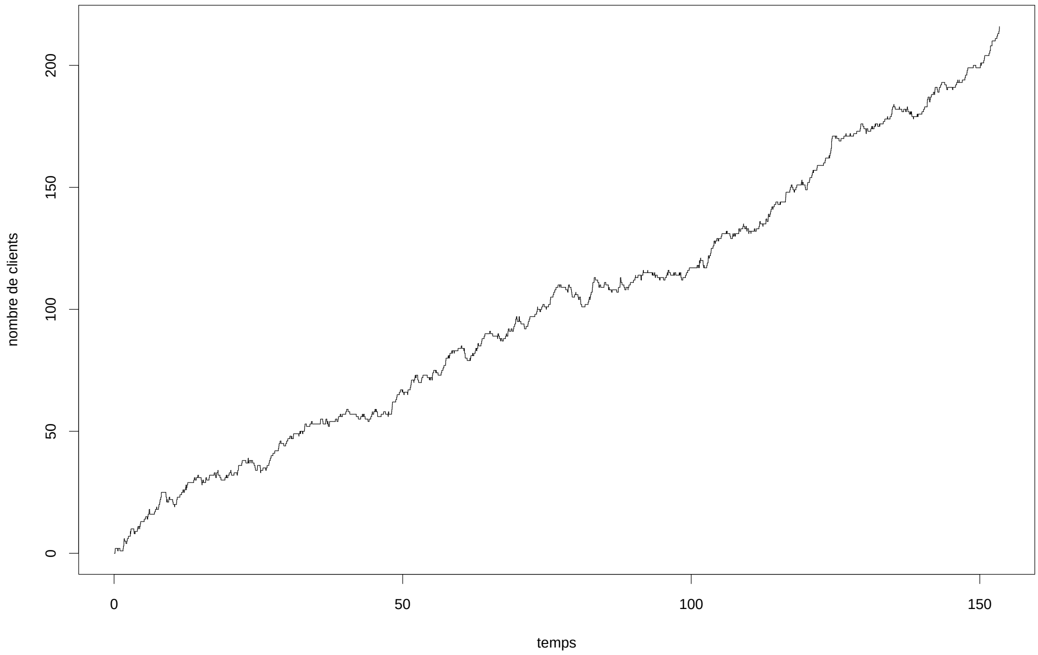

FIGURE 2.7 – Simulation de la file d'attente dans le cas transient ($\lambda = 3$, $\mu = 2$).

3. Le résultat est représenté figure 2.7. Le programme est le même qu'en première question, seuls les paramètres changent.

```
l=3
m=2
n0=1000
I=rexp(n0,l)
A=cumsum(I)
D=rexp(n0,m)
S=numeric(n0); S[1]=A[1]+D[1];
for (i in 1:(n0-1)){S[i+1]=max(S[i],A[i+1])+D[i+1]}
E=c(A,S)
ordre=order(E)
E=E[ordre]
es=c(rep(1,n0),rep(-1,n0))
es=es[ordre]
nbc=cumsum(es)
E=c(0,E)
indn0=which(E==A[n0/2])
E=E[1:indn0]
nbc=c(0,nbc)
nbc=nbc[1:indn0]
plot(E,nbc,type='s',xlab='temps',ylab='nombre de clients')
```

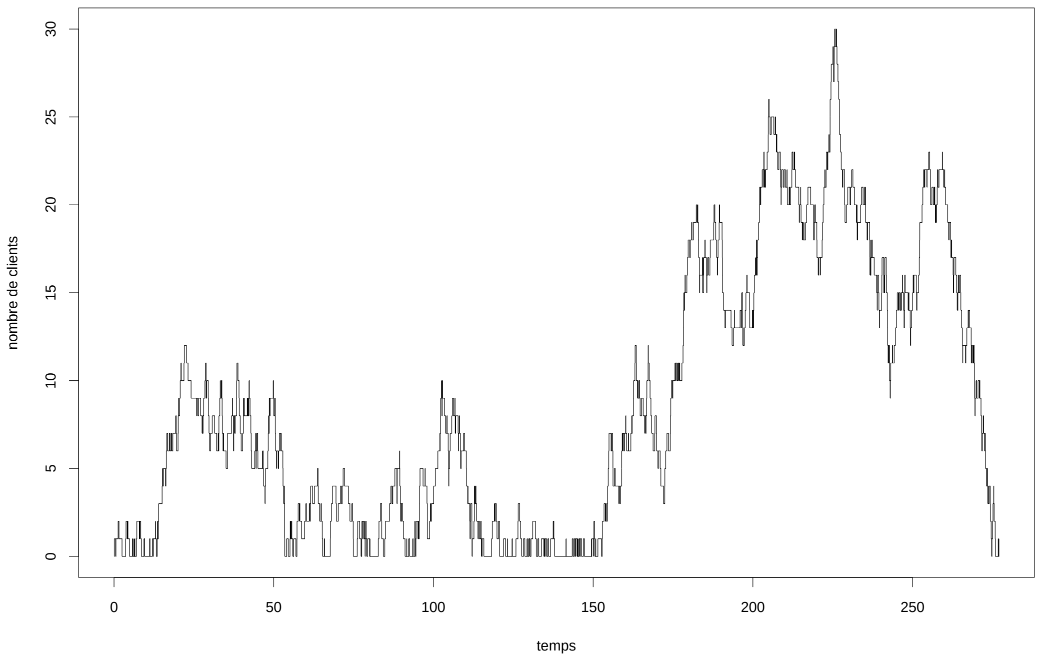

FIGURE 2.8 – Simulation de la file d'attente dans le cas récurrent nul ($\lambda = \mu = 2$).

4. Le résultat est représenté figure 2.8.

```
l=2
m=2
```

```
n0=1000
I=rexp(n0,l)
A=cumsum(I)
D=rexp(n0,m)
S=numeric(n0); S[1]=A[1]+D[1];
for (i in 1:(n0-1)){S[i+1]=max(S[i],A[i+1])+D[i+1]}
E=c(A,S)
ordre=order(E)
E=E[ordre]
es=c(rep(1,n0),rep(-1,n0))
es=es[ordre]
nbc=cumsum(es)
E=c(0,E)
indn0=which(E==A[n0/2])
E=E[1:indn0]
nbc=c(0,nbc)
nbc=nbc[1:indn0]
plot(E,nbc,type='s',xlab='temps',ylab='nombre de clients')
```

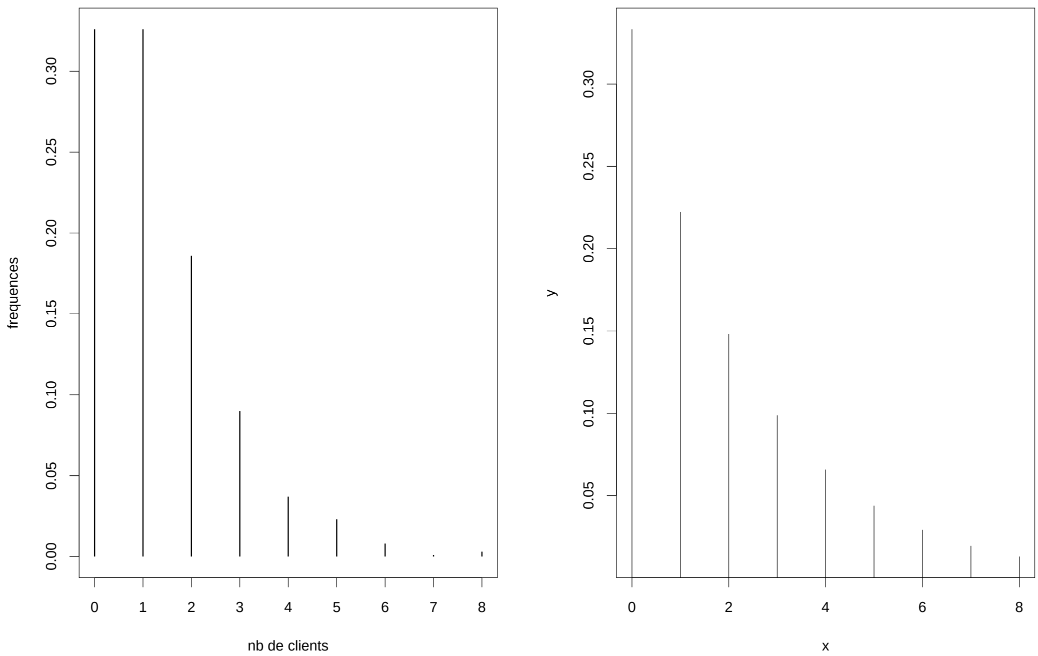

FIGURE 2.9 – Comparaison de la loi limite à une loi géométrique décalée.

5. La file d'attente n'est plus markovienne, puisque les durées de service ne sont plus exponentielles. On a ce qu'on appelle une file $M/G/1$, c'est-à-dire :
   - le processus des arrivées est Markovien ;
   - les durées de service suivent une loi Générale (i.e. non exponentielle) ;
   - il y a 1 seul serveur.

   Dans ce cas, la condition de convergence vers une loi d'équilibre ressemble à celle d'une file $M/M/1$: il suffit de s'assurer que la durée moyenne de service est plus courte que la durée moyenne entre deux arrivées. C'est bien le cas ici puisque 20 secondes $< \frac{1}{\lambda} = 30$ secondes. Par contre, la loi limite obtenue n'est plus la même que pour la file $M/M/1$ ayant les mêmes valeurs moyennes, comme en atteste la figure 2.9.

```
l=2
m=3
n0=100
I=rexp(n0,l)
A=cumsum(I)
D=rep(1/m,n0)
S=numeric(n0); S[1]=A[1]+D[1];
for (i in 1:(n0-1)){S[i+1]=max(S[i],A[i+1])+D[i+1]}
E=c(A,S)
ordre=order(E)
E=E[ordre]
es=c(rep(1,n0),rep(-1,n0))
es=es[ordre]
nbc=cumsum(es)
E=c(0,E)
indn0=which(E==A[n0/2])
E=E[1:indn0]
nbc=c(0,nbc)
nbc=nbc[1:indn0]
plot(E,nbc,type='s',xlab='temps',ylab='nombre de clients')
```

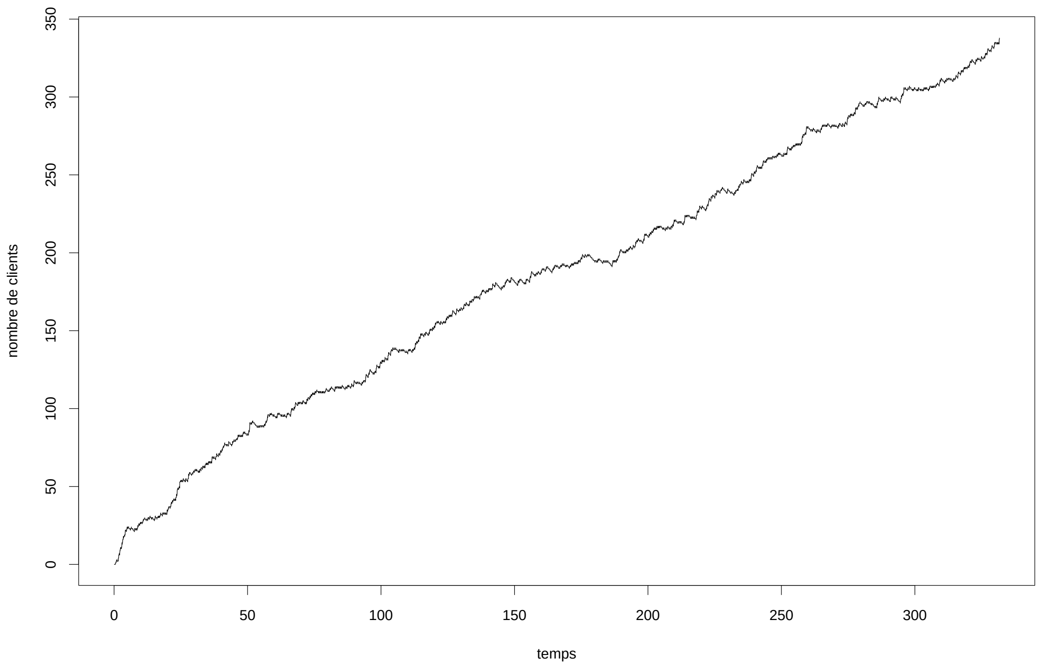

Figure 2.10 – Simulation d'une file d'attente $M/G/1$ dans le cas transitoire.

6. Dans le cas transient, le graphe obtenu en temps long ressemble à celui obtenu dans le cas d'une file $M/M/1$ ayant les mêmes paramètres moyens (voir figure 2.10).

```
l=3
m=2
```

```
n0=1000
I=rexp(n0,l)
A=cumsum(I)
D=rep(1/m,n0)
S=numeric(n0); S[1]=A[1]+D[1];
for (i in 1:(n0-1)){S[i+1]=max(S[i],A[i+1])+D[i+1]}
E=c(A,S)
ordre=order(E)
E=E[ordre]
es=c(rep(1,n0),rep(-1,n0))
es=es[ordre]
nbc=cumsum(es)
E=c(0,E)
indn0=which(E==A[n0])
E=E[1:indn0]
nbc=c(0,nbc)
nbc=nbc[1:indn0]
plot(E,nbc,type='s',xlab='temps',ylab='nombre de clients')
```

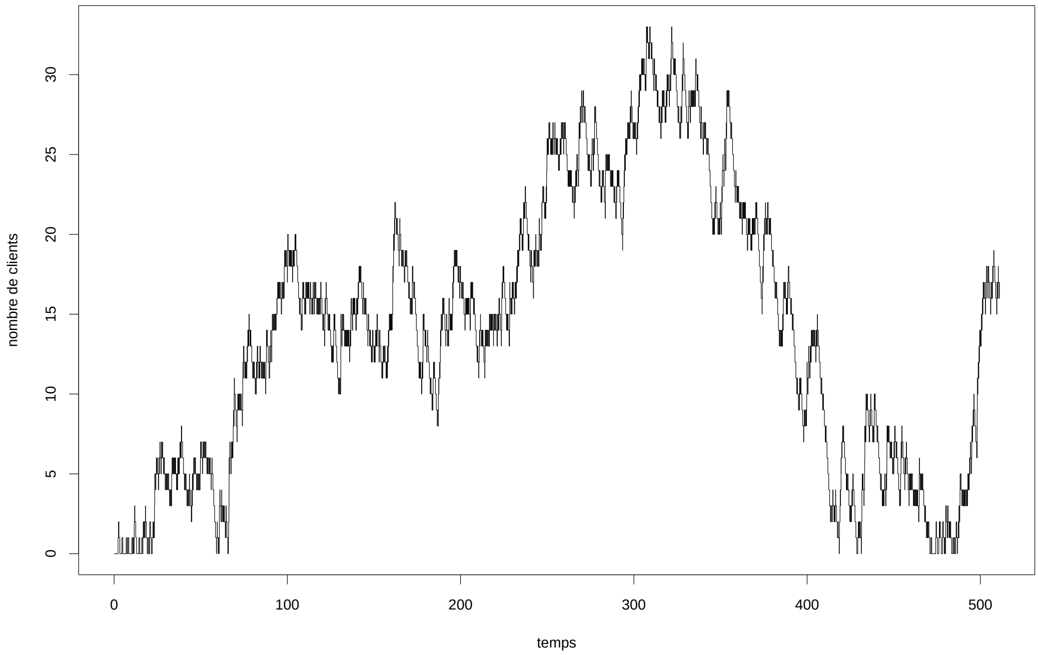

FIGURE 2.11 – Simulation d'une file d'attente $M/G/1$ dans le cas récurrent nul.

7. Dans le cas récurrent nul, le graphe obtenu en temps long ressemble encore à celui obtenu dans le cas d'une file $M/M/1$ ayant les mêmes paramètres moyens, cf. figure 2.11.

```
l=2
m=2
n0=1000
I=rexp(n0,l)
A=cumsum(I)
D=rep(1/m,n0)
```

```
S=numeric(n0); S[1]=A[1]+D[1];
for (i in 1:(n0-1)){S[i+1]=max(S[i],A[i+1])+D[i+1]}
E=c(A,S)
ordre=order(E)
E=E[ordre]
es=c(rep(1,n0),rep(-1,n0))
es=es[ordre]
nbc=cumsum(es)
E=c(0,E)
indn0=which(E==A[n0])
E=E[1:indn0]
nbc=c(0,nbc)
nbc=nbc[1:indn0]
plot(E,nbc,type='s',xlab='temps',ylab='nombre de clients')
```

Annexe A

Annales

Université de Rennes 2
Master 1
Arnaud Guyader

Mai 2005
Durée : 1h

Processus de sauts

I. File $M/M/\infty$
Une file $M/M/\infty$ est l'extension (un peu irréaliste) d'une file $M/M/s$ avec une infinité de serveurs identiques. Les arrivées sont poissoniennes de taux λ et le temps de service de chaque serveur exponentiel de paramètre μ. Chaque client qui arrive dans le serveur se dirige vers l'un des serveurs libres.

1. Modéliser ceci par un processus de naissance et de mort dont on précisera les taux de naissance λ_n et de mort μ_n. Dessiner le graphe de transition.
2. Montrer que la loi stationnaire π est une loi de Poisson.
3. Déterminer le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire.
4. Vérifier la formule de Little.

II. File $M/M/1$ versus file $M/M/2$
On se pose la question suivante : est-il préférable d'avoir un poste de travail ayant deux processeurs ou un seul processeur travaillant deux fois plus vite ?

1. Considérons une file de type $M/M/2$, taux d'arrivée $\lambda = 1$ requête par seconde et taux de service $\mu = 2$ requêtes exécutées par seconde. Calculer le temps de séjour moyen dans le système.
2. Considérons une file de type $M/M/1$, taux d'arrivée $\lambda = 1$ requête par seconde et taux de service $2\mu = 4$ requêtes exécutées par seconde. Calculer le temps de séjour moyen dans le système.
3. Comparer les résultats obtenus et conclure.

4. Généralisation : montrer que le résultat est toujours vrai dès qu'on suppose $\lambda < \mu$.

III. File à un puis deux serveurs
On considère une file de type $M/M/1$ avec un taux de 2 arrivées par minute et des durées de service de moyenne 30 secondes.

1. La file a tendance à saturer. Est-ce que ceci vous étonne ? Pour remédier à ce problème, on propose la solution suivante : dès qu'il y a 3 personnes dans le serveur, c'est-à-dire dès qu'arrive une 2^e personne dans la salle d'attente, on met en fonctionnement un second serveur identique au premier.
2. Modéliser ceci par un processus de naissance et de mort dont on précisera les taux de naissance λ_n et de mort μ_n. Dessiner le graphe de transition.
3. Déterminer la loi stationnaire π.
4. Déterminer le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire.
5. Généraliser avec mise en fonctionnement du second serveur dès que le nombre de personnes en attente est égal à N.

Université de Rennes 2
Master 1
Arnaud Guyader

Mai 2005
Durée : 1h

Processus de sauts

Corrigé

I. File $M/M/\infty$

1. Les taux de naissance sont $\lambda_n = \lambda$ pour tout $n \geq 0$, les taux de décès sont $\mu_n = n\mu$ pour tout $n \geq 1$. La figure A.1 donne représentation schématique et graphe de transition pour cette file d'attente.
2. Après calculs, la loi stationnaire π est une loi de Poisson de paramètre λ/μ, c'est-à-dire :
$$\pi_n = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}.$$
3. Le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire est donc l'espérance d'une loi de Poisson de paramètre λ/μ, c'est-à-dire :
$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{+\infty} n\pi_n = \mathbb{E}\left[\mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right] = \frac{\lambda}{\mu}.$$
4. Puisqu'un client arrivant dans le système passe automatiquement en service (pas d'attente), son temps de séjour T est une loi exponentielle de paramètre μ, donc de moyenne $1/\mu$. On retrouve donc bien la formule de Little :
$$\mathbb{E}[N] = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda\mathbb{E}[T].$$

II. File $M/M/1$ versus file $M/M/2$

1. Considérons une file de type $M/M/2$, taux d'arrivée $\lambda = 1$ requête par seconde et taux de service $\mu = 2$ requêtes exécutées par seconde. Le temps de séjour moyen dans le système est :
$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\mu} + \frac{s\mu}{(s\mu - \lambda)^2}\pi_s = \frac{1}{2} + \frac{4}{9}\pi_2.$$
On a $\pi_0 = 8\pi_2$, $\pi_1 = 4\pi_2$ et pour tout $n \geq 2$: $\pi_n = \pi_2/(4^{n-2})$. Le fait que π est un vecteur de probabilité donne : $\pi_2 = 3/40$. Ceci conduit au temps moyen de séjour :
$$\mathbb{E}[T] = \frac{8}{15} \text{ sec.}$$

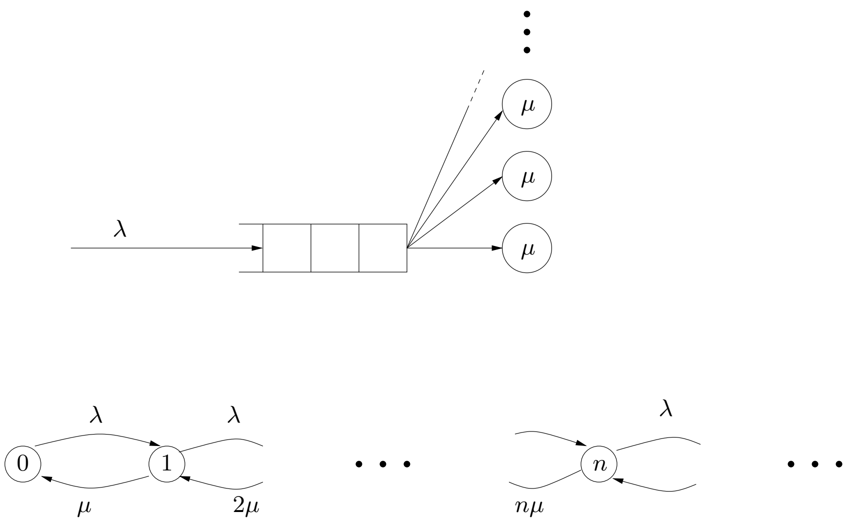

Figure A.1 – Représentation et graphe de transition de la file $M/M/\infty$.

2. Considérons une file de type $M/M/1$, taux d'arrivée $\lambda = 1$ requête par seconde et taux de service $2\mu = 4$ requêtes exécutées par seconde. Le temps de séjour moyen dans le système est cette fois :
$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{2\mu - \lambda} = \frac{1}{3} \text{ sec.}$$
3. Il est donc clair qu'il vaut mieux avoir un serveur travaillant deux fois plus vite.
4. Dans le cas général, si on suppose seulement $\lambda < \mu$, on trouve dans le cas de deux serveurs :
$$\mathbb{E}[T] = \frac{4\mu}{(2\mu + \lambda)(2\mu - \lambda)}.$$
Dans le cas d'un seul serveur deux fois plus rapide, on obtient toujours :
$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{2\mu - \lambda}.$$
Puisque $\mu > \lambda$, il est clair que $4\mu > 2\mu + \lambda$, donc il vaut mieux avoir un seul serveur.

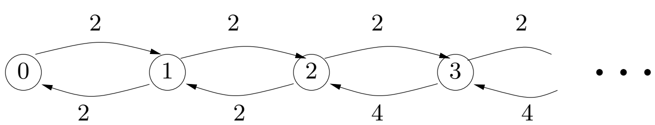

Figure A.2 – Graphe de transition de la file à 1 puis 2 serveurs.

III. File à un puis deux serveurs

1. La file a tendance à saturer car $\lambda = \mu = 2$: on est dans le cas récurrent nul.
2. On a $\lambda_n = 2$ pour tout n. Par ailleurs $\mu_1 = \mu_2 = 2$, puis $\mu_n = 4$ pour tout $n \geq 3$. Le graphe de transition est donné figure A.2.
3. L'unique loi stationnaire π est donnée par $\pi_0 = \pi_1 = \pi_2$ et $\pi_n = \pi_0 2^{n-2}$ pour tout $n \geq 2$. On en déduit $\pi_0 = \pi_1 = 1/4$ et $\pi_n = 1/2^n$ pour tout $n \geq 2$.

4. Notons N le nombre de clients dans le système en régime stationnaire. N est distribuée selon la loi π. On sait par ailleurs que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ceci donne dans notre cas :

$$\mathbb{E}[N] = \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{7}{4}.$$

5. On a toujours $\lambda_n = 2$ pour tout $n \geq 0$. Pour les taux de départ, on a cette fois $\mu_1 = \cdots = \mu_s = 2$, puis $\mu_n = 4$ pour tout $n \geq (s+1)$. Pour la loi stationnaire, on obtient alors $\pi_0 = \pi_1 = \cdots = \pi_{s-1} = \frac{1}{s+2}$ et :

$$\forall n \geq s \qquad \pi_n = \frac{1}{2^{n-s}(s+2)}.$$

Le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire est donc :

$$\mathbb{E}[N] = \frac{1}{s+2}(1+2+\cdots+(s-1)) + \frac{1}{s+2}\sum_{n=s}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-s}}.$$

La première somme est arithmétique :

$$1 + \cdots + (s-1) = \frac{s(s-1)}{2}.$$

La seconde s'écrit aussi :

$$\sum_{n=s}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-s}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s+k}{2^k} = s\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k},$$

avec d'une part la somme d'une série géométrique :

$$s\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2s,$$

et d'autre part la moyenne d'une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $1/2$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = \mathbb{E}\left[\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 2.$$

Au total, on obtient :

$$\mathbb{E}[N] = \frac{s(s-1)}{2(s+2)} + \frac{2s+2}{s+2} = \frac{s^2+3s+4}{2(s+2)},$$

ce qui généralise bien la formule obtenue pour $s = 2$.

Université de Rennes 2
Master 1
Arnaud Guyader

Jeudi 16 Mars 2006
Durée : 1h30

Processus de sauts

I. Entrées dans un magasin
On suppose que les arrivées dans un magasin se font selon un processus de Poisson de taux 40 clients par heure. Ce magasin ouvre à 9h et ferme à 19h.

1. Quelle est la loi du nombre de clients sur la journée ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucun client n'arrive entre 9h et 9h15.
3. Calculer la probabilité qu'aucun client n'arrive entre 9h et 9h15 sachant qu'il en est arrivé 3 entre 9h et 9h30.
4. Calculer le nombre moyen de clients qui sont entrés dans le magasin jusqu'à 11h sachant qu'il en est arrivé 3 jusqu'à 9h30.
5. Un cadeau est offert par le magasin tous les 13 clients (c'est-à-dire au 13^e client, au 26^e, etc.). Donner la loi de la durée espaçant deux cadeaux.

II. Réseau téléphonique
On considère une file de type $M/M/3$: processus d'arrivées poissonien de taux 2 par minute, durées de services exponentielles de moyenne 1 minute, 3 serveurs. On suppose de plus qu'il n'y a pas de salle d'attente, c'est-à-dire que si un client arrive et que les 3 serveurs sont occupés, il repart aussitôt.

1. Donner le générateur infinitésimal et le graphe de transition.
2. Déterminer la loi stationnaire π.
3. Quelle est la probabilité qu'un client soit rejeté ?
4. Quel est le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire ?
5. Quel est le temps moyen de séjour d'un client entrant effectivement dans le système ? En déduire la formule de Little.
6. On généralise le modèle précédent en considérant une file $M/M/s$ à s serveurs, taux d'arrivées λ et taux de service μ, toujours sans salle d'attente. On note $\rho = \lambda/\mu$. Montrer que la probabilité qu'un client soit rejeté est :
$$\frac{\rho^s}{s! \sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!}}.$$

III. Salle d'attente limitée
On part d'une file d'attente de type $M/M/1$: processus d'arrivées poissonien de taux $\lambda > 0$, durées de services exponentielles de paramètre $\mu > 0$, un seul serveur. On suppose de plus que la salle d'attente a une capacité limitée à 3 places. S'il y a déjà 3 personnes dans la salle d'attente lorsqu'un nouveau client arrive, celui-ci passe son chemin.

1. Donner le graphe de transition.
2. Sans calculs, justifier pourquoi ce processus admet une unique distribution stationnaire π.
3. On suppose dans un premier temps que $\lambda = \mu$.
   (a) Calculer la loi stationnaire π.
   (b) Déterminer le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire.
   (c) Quel est le temps moyen de séjour d'un nouveau client, sachant qu'il trouve un nombre $n < 4$ de clients dans le système à son arrivée ?
   (d) En déduire le temps moyen de séjour d'un client dans le système.
   (e) Vérifier la formule de Little.
4. On suppose maintenant que $\lambda \neq \mu$. Répondre aux mêmes questions que dans le cas $\lambda = \mu$.

Université de Rennes 2
Master 1
Arnaud Guyader

Jeudi 16 Mars 2006
Durée : 1h30

Processus de sauts

Corrigé

I. Entrées dans un magasin

On suppose que les arrivées dans un magasin se font selon un processus de Poisson de taux 40 clients par heure. Ce magasin ouvre à 9h et ferme à 19h.

1. Le nombre N_j de clients sur la journée (de durée 10 heures) est une loi de Poisson de paramètre 400, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(N_j = n) = e^{-400}\frac{400^n}{n!}.$$
2. Prenons la minute comme unité de temps, on a donc un processus d'intensité 2/3. Le nombre de clients arrivés jusqu'à 9h15 suit donc une loi de Poisson de paramètre 10. La probabilité qu'aucun client ne soit arrivé à 9h15 est donc :
$$\mathbb{P}(N_{15} = 0) = e^{-10}.$$
3. On cherche cette fois : $\mathbb{P}(N_{15} = 0|N_{30} = 3)$.
Première méthode : on utilise la formule de Bayes, ce qui donne :
$$\mathbb{P}(N_{15} = 0|N_{30} = 3) = \frac{\mathbb{P}(N_{30} = 3|N_{15} = 0)\mathbb{P}(N_{15} = 0)}{\mathbb{P}(N_{30} = 3)},$$
or par les propriétés d'absence de mémoire et d'homogénéité du processus de Poisson :
$$\mathbb{P}(N_{30} = 3|N_{15} = 0) = \mathbb{P}(N_{15} = 3) = e^{-10}\frac{10^3}{3!}.$$
Ainsi on a :
$$\mathbb{P}(N_{15} = 0|N_{30} = 3) = \frac{e^{-10}\frac{10^3}{3!}e^{-10}}{e^{-20}\frac{20^3}{3!}},$$
ce qui donne finalement :
$$\mathbb{P}(N_{15} = 0|N_{30} = 3) = \frac{1}{8}.$$
Seconde méthode : sachant que 3 personnes sont arrivées en une demi-heure, les dates d'arrivées sont i.i.d. uniformes sur l'intervalle $[0, 30]$. La probabilité que les 3 soient arrivées dans le second quart d'heure est donc :
$$\mathbb{P}(N_{15} = 0|N_{30} = 3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

4. On veut maintenant calculer $\mathbb{E}[N_{120}|N_{30}=3]$. Or, entre 9h30 et 11h, on a un processus de Poisson de taux 2/3, donc :
$$\mathbb{E}[N_{120}|N_{30}=3] = 3 + \mathbb{E}[N_{90}] = 63.$$
5. La loi de la durée T espaçant deux cadeaux est la somme de 13 variables aléatoires i.i.d. exponentielles de paramètre 2/3, c'est-à-dire une loi $\Gamma(13, 2/3)$. Sa densité est :
$$f(t) = \frac{\left(\frac{2}{3}t\right)^{12}}{12!} \cdot \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t),$$
avec t exprimé en minutes (cf. figure A.3).

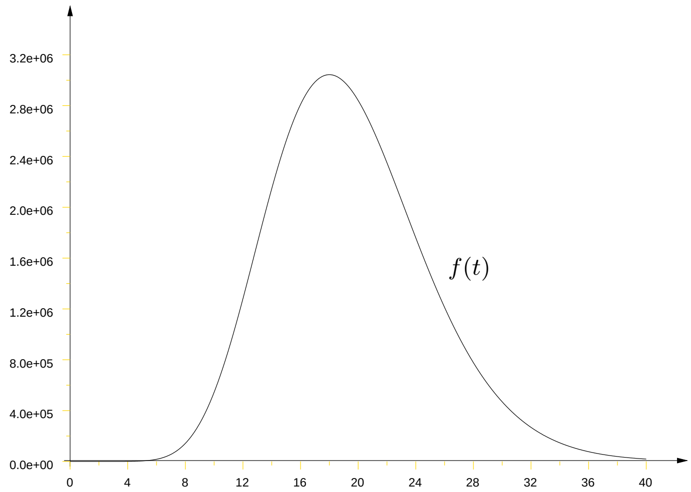

FIGURE A.3 – Représentation de la densité f d'une loi $\Gamma(13, 2/3)$.

II. Réseau téléphonique

On considère une file de type $M/M/3$: processus d'arrivées poissonien de taux 2 par minute, durées de services exponentielles de moyenne 1 minute, 3 serveurs. On suppose de plus qu'il n'y a pas de salle d'attente, c'est-à-dire que si un client arrive et que les 3 serveurs sont occupés, il repart aussitôt.

1. Le générateur infinitésimal A sur les 4 états $\{0, 1, 2, 3\}$ du processus est :
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$
Le graphe de transition est représenté figure A.4.
2. La loi stationnaire $\pi = [\pi_0, \ldots, \pi_3]$ est l'unique solution du système :
$$\begin{cases} \pi A & = 0 \\ \sum_{j \in E} \pi_j & = 1 \end{cases}$$
Après calculs, on obtient pour loi stationnaire :
$$\pi = \left[\frac{3}{19}, \frac{6}{19}, \frac{6}{19}, \frac{4}{19}\right].$$

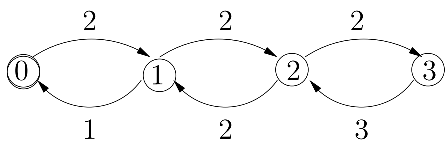

FIGURE A.4 – Graphe de transition du réseau téléphonique.

3. La probabilité qu'un client soit rejeté est donc $\pi_3 = 4/19$.
4. Le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire est :
$$\mathbb{E}[N] = 1 \cdot \frac{6}{19} + 2 \cdot \frac{6}{19} + 3 \cdot \frac{4}{19} = \frac{30}{19}.$$
5. Si un client séjourne effectivement dans le système, son temps de séjour T est exactement la durée de son service, c'est-à-dire une loi exponentielle de moyenne 1 minute. Ainsi on a $\mathbb{E}[T] = 1$. Néanmoins le flux entrant dans le système est 2 avec probabilité $\pi_0+\pi_1+\pi_2 = 15/19$ et 0 avec probabilité $\pi_3 = 4/19$, c'est-à-dire que le flux moyen entrant est
$$\bar{\lambda} = 2 \cdot \frac{15}{19} + 0 \cdot \frac{4}{19} = \frac{30}{19}.$$
On retrouve bien la formule de Little :
$$\mathbb{E}[N] = \bar{\lambda}\mathbb{E}[T].$$

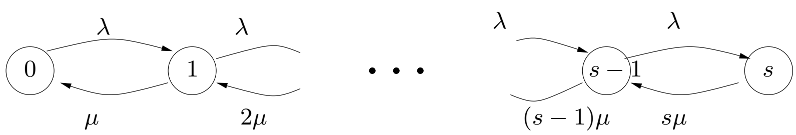

FIGURE A.5 – Graphe de transition du réseau téléphonique dans le cas général.

6. Pour déterminer le taux de rejet du réseau téléphonique (voir figure A.5), il suffit de déterminer la probabilité π_s, où π est la loi stationnaire. Or, puisqu'on a un processus de naissance et de mort, les coefficients π_n s'expriment facilement en fonction de π_0 :
$$\forall n \in \{0, 1, \dots, s\} \qquad \pi_n = \frac{\rho^n}{n!}\pi_0.$$
Ainsi :
$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!}},$$
et par suite :
$$\pi_s = \frac{\rho^s}{s! \sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!}}.$$
Cette dernière expression est connue sous le nom de **Première formule d'Erlang** : elle servait à dimensionner les réseaux téléphoniques.

III. Salle d'attente limitée

On part d'une file d'attente de type $M/M/1$: processus d'arrivées poissonien de taux $\lambda > 0$, durées de services exponentielles de paramètre $\mu > 0$, un seul serveur. On suppose de plus que la salle d'attente a une capacité limitée à 3 places. S'il y a déjà 3 personnes dans la salle d'attente lorsqu'un nouveau client arrive, celui-ci passe son chemin.

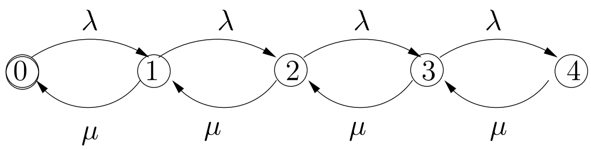

Figure A.6 – Graphe de transition pour la salle d'attente à 3 places.

1. Le graphe de transition est représenté figure A.6.
2. Le graphe est fortement connexe donc le processus est irréductible. De plus, l'espace d'états est fini. Ceci assure l'existence et l'unicité de la loi stationnaire π. Pour la calculer, il suffit de résoudre le système :
$$\begin{cases} \pi A & = 0 \\ \sum_{j \in E} \pi_j & = 1 \end{cases}$$
3. On suppose dans un premier temps que $\lambda = \mu$.
   (a) Après résolution du système, la loi stationnaire π est la loi uniforme sur l'ensemble des états $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, c'est-à-dire :
   $$\pi = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right].$$
   (b) Le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire est donc : $\mathbb{E}[N] = 2$.
   (c) Sachant qu'il trouve un nombre $n < 4$ de clients dans le système à son arrivée, le temps moyen de séjour d'un client dans le système est
   $$\mathbb{E}[T|N = n] = \frac{n+1}{\mu}.$$
   (d) Soit T le temps de séjour d'un client entrant effectivement dans le système et N le nombre de clients déjà présents. On sait donc que $N \leq 3$ et :
   $$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[T|N = 0]\mathbb{P}(N = 0|N \leq 3) + \cdots + \mathbb{E}[T|N = 3]\mathbb{P}(N = 3|N \leq 3),$$
   avec :
   $$\forall n \in \{0, 1, 2, 3\} \qquad \mathbb{P}(N = n|N \leq 3) = \frac{\frac{1}{5}}{4 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}.$$
   On aboutit donc à :
   $$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{2}{\mu} + \frac{3}{\mu} + \frac{4}{\mu}\right),$$
   c'est-à-dire :
   $$\mathbb{E}[T] = \frac{5}{2\mu}.$$
   (e) Le flux entrant moyen est :
   $$\bar{\lambda} = \lambda \cdot \frac{4}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4\lambda}{5}.$$
   Ainsi, puisque $\lambda = \mu$:
   $$\bar{\lambda}\mathbb{E}[T] = \frac{4\lambda}{5} \cdot \frac{5}{2\mu} = 2 = \mathbb{E}[N].$$
4. On suppose maintenant que $\lambda \neq \mu$.

(a) Posons $\rho = \lambda/\mu$. La loi stationnaire est alors :

$$\pi = \left[\pi_0, \pi_0\rho, \pi_0\rho^2, \pi_0\rho^3, \pi_0\rho^4\right],$$

avec :

$$\pi_0(1+\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4) = 1 \Leftrightarrow \pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^5}.$$

(b) Le nombre moyen de clients dans le système est donc :

$$\mathbb{E}[N] = \pi_0\rho + 2\pi_0\rho^2 + 3\pi_0\rho^3 + 4\pi_0\rho^4 = \frac{1-\rho}{1-\rho^5}(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + 4\rho^4).$$

(c) Sachant qu'il trouve un nombre $n < 4$ de clients dans le système à son arrivée, le temps moyen de séjour d'un client dans le système est toujours $(n+1)/\mu$.

(d) Soit T le temps de séjour d'un client entrant effectivement dans le système et N le nombre de clients déjà présents. On sait donc que $N \leq 3$ et :

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[T|N=0]\mathbb{P}(N=0|N\leq 3) + \cdots + \mathbb{E}[T|N=3]\mathbb{P}(N=3|N\leq 3),$$

avec :

$$\forall n \in \{0,1,2,3\} \qquad \mathbb{P}(N=n|N\leq 3) = \frac{1-\rho}{1-\rho^4}\rho^n.$$

On a donc :

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1-\rho}{1-\rho^4}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{2\rho}{\mu} + \frac{3\rho^2}{\mu} + \frac{4\rho^3}{\mu}\right).$$

(e) Le flux entrant moyen est :

$$\bar{\lambda} = \lambda \cdot \pi_0(1+\rho+\rho^2+\rho^3) + 0 \cdot \pi_0\rho^4 = \frac{1-\rho^4}{1-\rho^5}\lambda.$$

Au total, ceci donne :

$$\bar{\lambda}\mathbb{E}[T] = \frac{1-\rho}{1-\rho^5}(1+2\rho+3\rho^2+4\rho^3)\frac{\lambda}{\mu},$$

et puisque par définition $\rho = \lambda/\mu$, on retrouve bien :

$$\mathbb{E}[N] = \bar{\lambda}\mathbb{E}[T].$$

Remarque. Si on tient à simplifier l'expression

$$\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + 4\rho^4,$$

on peut utiliser le fait que pour tout réel x :

$$\sum_{n=0}^{N} nx^n = x\left(\sum_{n=0}^{N} nx^{n-1}\right) = x\left(\sum_{n=0}^{N} x^n\right)',$$

ce qui donne pour $x \neq 1$:

$$\sum_{n=0}^{N} nx^n = x\left(\frac{1-x^{N+1}}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}\left(Nx^{N+1} - (N+1)x^N + 1\right).$$

Pour ce qui nous concerne, on a donc :

$$\mathbb{E}[N] = \frac{\rho}{(1-\rho)} \frac{\left(4\rho^5 - 5\rho^4 + 1\right)}{1-\rho^5}.$$

Tandis que pour l'espérance de T, on obtient :

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\left(4\rho^5 - 5\rho^4 + 1\right)}{(1-\rho)(1-\rho^4)\mu}.$$

Université de Rennes 2
Master 1
Arnaud Guyader

Jeudi 29 Mars 2007
Durée : 1h30

Processus de sauts

I. Processus de Poisson

1. Des clients arrivent dans un magasin selon un processus de Poisson d'intensité 30 par heure. Quelle est la probabilité que le temps entre deux arrivées successives soit :
   (a) Plus de 2 minutes ?
   (b) Moins de 4 minutes ?
   (c) Entre 1 et 3 minutes ?
2. Des malades arrivent chez un médecin suivant un processus de Poisson de taux 6 par heure. Le médecin ne reçoit pas de malade tant qu'il n'y a pas 3 malades dans la salle d'attente.
   (a) Quelle est la loi de la durée écoulée jusqu'au moment où le premier malade est reçu par le médecin ? Quelle est sa moyenne ?
   (b) Quelle est la probabilité que personne ne soit reçu pas le médecin en 30 minutes ?
3. Sur une route à sens unique, l'écoulement des voitures peut être décrit par un processus de Poisson de paramètre 10 par minute. Un piéton qui veut traverser la route a besoin d'un intervalle d'au moins 4 secondes.
   (a) Calculer la probabilité pour que le piéton doive attendre.
   (b) Calculer la durée moyenne des intervalles qui lui permettent de traverser la route, c'est-à-dire :
   $$\mathbb{E}[T|T>4] = \frac{\mathbb{E}[T\mathbb{1}_{\{T>4\}}]}{\mathbb{P}(T>4)},$$
   en notant T l'intervalle de temps entre deux passages de voitures.

II. Salon de coiffure

On considère un salon de coiffure où se trouvent deux coiffeurs ayant chacun un poste de travail. Dans ce salon, il y a en plus une place pour l'attente éventuelle. Les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux 5 par heure. Si un client arrive et que le salon est plein, il repart aussitôt. On suppose que la durée d'une coupe est exponentielle de moyenne 30 minutes.

1. Donner le générateur infinitésimal et le graphe de transition.
2. Déterminer la loi stationnaire π.
3. Quel est le nombre moyen de clients dans le salon en régime stationnaire ?
4. Quel est le taux moyen d'entrée dans le système en régime stationnaire ?
5. Rappeler la formule de Little. En déduire le temps moyen de séjour dans le salon.

III. Nombre limité de clients
On considère un système dont le nombre de clients potentiels est égal à 3. Chacun des clients, lorsqu'il n'est pas déjà dans le système, y entre au bout d'un temps exponentiel de paramètre λ, indépendamment des autres. Les durées des services des clients sont indépendantes exponentielles de paramètre μ. Le système a par ailleurs une salle d'attente et un nombre de serveurs illimités, de sorte que tout client entrant dans le système est servi aussitôt. Le graphe de transition associé est donné figure A.7.

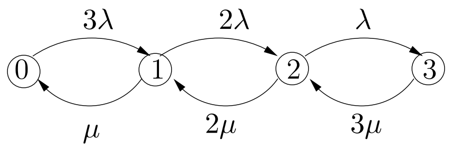

Figure A.7 – Graphe de transition du système à nombre limité de clients.

1. Justifier les nombres 3λ et 2μ du graphe de transition.
2. Déterminer la loi stationnaire π. On pourra poser $r = \frac{\lambda}{\mu}$ pour simplifier les formules.
3. Quel est le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire ?
4. On considère le même système, mais avec N clients potentiels au lieu de 3.
   (a) Donner le graphe de transition.
   (b) Montrer que la loi stationnaire est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(N, \frac{r}{1+r}\right)$.
   (c) En déduire le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire.

Université de Rennes 2
Master 1
Arnaud Guyader

Jeudi 29 Mars 2007
Durée : 1h30

Processus de sauts

Corrigé

I. Processus de Poisson

1. Des clients arrivent dans un magasin selon un processus de Poisson d'intensité 30 par heure. Notons N_t le nombre de clients arrivés jusqu'à la date t (en minutes). La variable aléatoire N_t suit donc une loi de Poisson $\mathcal{P}(t/2)$. La durée T écoulée entre deux arrivées successives suit, elle, une loi exponentielle de paramètre 1/2.
   (a) La probabilité que le temps écoulé entre deux arrivées soit plus de deux minutes est donc :
   $$p_1 = \mathbb{P}(T > 2) = e^{-1}.$$
   (b) La probabilité que le temps écoulé entre deux arrivées soit moins de 4 minutes est :
   $$p_2 = \mathbb{P}(T \leq 4) = 1 - e^{-2}.$$
   (c) La probabilité que le temps écoulé entre deux arrivées soit entre 1 et 3 minutes est :
   $$p_3 = \mathbb{P}(1 < T \leq 3) = \mathbb{P}(T \leq 3) - \mathbb{P}(T \leq 1) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}.$$
2. Des malades arrivent chez un médecin suivant un processus de Poisson de taux 6 par heure. Le médecin ne reçoit pas de malade tant qu'il n'y a pas 3 malades dans la salle d'attente.
   (a) La durée écoulée (en heures) jusqu'au moment où le premier malade est reçu par le médecin est la somme de trois exponentielles i.i.d. de paramètre 6, c'est-à-dire une loi Gamma $\Gamma(3, 6)$. Sa moyenne est égale à 3 fois la moyenne d'une exponentielle de paramètre 6, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$h, ou encore 30 minutes.
   (b) La probabilité que personne ne soit reçu pas le médecin en 30 minutes est égale :
   - à la probabilité qu'une loi $\Gamma(3, 6)$ soit supérieure à $1/2$;
   - de façon équivalente, à la probabilité qu'une loi de Poisson X de paramètre 3 soit inférieure ou égale à 2.

   Prenons la seconde option, ce qui donne :
   $$p = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{3^2}{2!}\right) = \frac{17}{2}e^{-3}.$$
3. Sur une route à sens unique, l'écoulement des voitures peut être décrit par un processus de Poisson de paramètre 10 par minute. Un piéton qui veut traverser la route a besoin d'un intervalle d'au moins 4 secondes.

(a) La probabilité pour qu'il doive attendre est la probabilité qu'une voiture passe dans les 4 premières secondes. Notons T la variable aléatoire correspondant au temps de passage (en secondes) de la première voiture, on sait que $T \sim \mathcal{E}(1/6)$. Ainsi la probabilité d'attente est :

$$p = \mathbb{P}(T \leq 4) = 1 - e^{-\frac{2}{3}}.$$

(b) En notant T comme ci-dessus, la durée moyenne d'un intervalle qui permet de traverser la route est :

$$\mathbb{E}[T|T > 4] = \frac{\mathbb{E}[T\mathbb{1}_{\{T>4\}}]}{\mathbb{P}(T > 4)}.$$

Or le numérateur vaut :

$$\mathbb{E}[T\mathbb{1}_{\{T>4\}}] = \int_4^{+\infty} \frac{t}{6} e^{-\frac{t}{6}}\, dt = \left[-te^{-\frac{t}{6}}\right]_4^{+\infty} + \int_4^{+\infty} e^{-\frac{t}{6}}\, dt,$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}[T\mathbb{1}_{\{T>4\}}] = 4e^{-\frac{2}{3}} - \left[6e^{-\frac{t}{6}}\right]_4^{+\infty} = 10e^{-\frac{2}{3}}.$$

Le dénominateur se déduit directement de la question précédente :

$$\mathbb{P}(T > 4) = e^{-\frac{2}{3}},$$

de sorte que la moyenne cherchée vaut tout simplement :

$$\mathbb{E}[T|T > 4] = 10.$$

On remarque que, logiquement, cette quantité est plus grande que la moyenne de T, à savoir $\mathbb{E}[T] = 6$, et bien sûr plus grande que 4.

II. Salon de coiffure

On considère un salon de coiffure où se trouvent deux coiffeurs ayant chacun un poste de travail, ainsi qu'une place pour l'attente éventuelle. Les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux 5 par heure. Si un client arrive et que le salon est plein, il repart aussitôt. On suppose que la durée d'une coupe est exponentielle de moyenne 30 minutes.

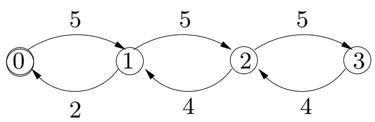

Figure A.8 – Graphe de transition du salon de coiffure.

1. Le générateur infinitésimal du processus est, avec des taux de transition par heure :

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix},$$

et le graphe de transition est représenté figure A.8.

2. C'est un processus irréductible sur un espace d'états fini, donc on est assuré de l'existence et de l'unicité de la loi stationnaire π. Pour la déterminer, on peut résoudre le système $\pi A = 0$, ou bien voir ceci comme un cas particulier de processus de naissance et de mort, ce qui revient au même. On trouve après calculs :
$$\pi = \left[\frac{32}{337}, \frac{80}{337}, \frac{100}{337}, \frac{125}{337}\right].$$
3. Soit N une variable aléatoire de loi π représentant le nombre de clients dans le salon en régime stationnaire. Le nombre moyen de clients est donc :
$$\mathbb{E}[N] = 0 \times \frac{32}{337} + 1 \times \frac{80}{337} + 2 \times \frac{100}{337} + 3 \times \frac{125}{337} = \frac{655}{337}.$$
4. Le taux d'entrée dans le système en régime stationnaire est 5 si $N \in \{0, 1, 2\}$ et 0 si $N = 3$, donc le taux moyen d'entrée est :
$$\overline{\lambda} = 5 \times \mathbb{P}(0 \leq N \leq 3) + 0 \times \mathbb{P}(N = 3) = \frac{1060}{337}.$$
5. La formule de Little dit que $\mathbb{E}[N] = \overline{\lambda}\mathbb{E}[T]$. On en déduit que le temps moyen de séjour dans le salon est :
$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}[N]}{\overline{\lambda}} = \frac{131}{212}.$$
Remarque. On peut retrouver le temps moyen de séjour dans le salon directement par le calcul. De façon générale, le temps de séjour dans le salon dépend du nombre de clients N déjà présents lorsqu'un nouveau client arrive et entre, sachant que ce nombre N est forcément inférieur ou égal à 2 :
$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{E}[T|N = i] \times \mathbb{P}(N = i|N \leq 2).$$
On a d'une part :
$$\mathbb{E}[T|N = 0] = \mathbb{E}[T|N = 1] = \frac{1}{2},$$
une demi-heure étant le temps moyen d'une coupe. Par contre, si les deux coiffeurs sont occupés quand un nouveau client arrive, il doit attendre que l'un des postes se libère, ce qui prend le minimum de deux exponentielles indépendantes de paramètre 2, c'est-à-dire une exponentielle de paramètre 4, donc en moyenne un quart-d'heure, puis le temps de sa coupe, en moyenne une demi-heure, d'où au total :
$$\mathbb{E}[T|N = 2] = \frac{3}{4}.$$
Enfin, pour les probabilités conditionnelles, on a par exemple :
$$\mathbb{P}(N = 0|N \leq 2) = \frac{\mathbb{P}(N = 0)}{1 - \mathbb{P}(N = 3)} = \frac{\pi_0}{1 - \pi_3} = \frac{32}{212} = \frac{8}{53},$$
et plus généralement :
$$[\mathbb{P}(N = 0|N \leq 2), \mathbb{P}(N = 1|N \leq 2), \mathbb{P}(N = 2|N \leq 2)] = \left[\frac{8}{53}, \frac{20}{53}, \frac{25}{53}\right].$$
Finalement, le temps de séjour moyen dans le système est :
$$\mathbb{E}[T] = \frac{131}{212} \ (\approx 40 \text{ min.})$$

III. Nombre limité de clients

On considère un système dont le nombre de clients potentiels est égal à 3. Chacun des clients, lorsqu'il n'est pas déjà dans le système, y entre au bout d'un temps exponentiel de paramètre λ, indépendamment des autres. Les durées des services des clients sont indépendantes exponentielles de paramètre μ. Le système a par ailleurs une salle d'attente et un nombre de serveurs illimités, de sorte que tout client entrant dans le système est servi aussitôt. Le graphe de transition associé est donné figure A.9.

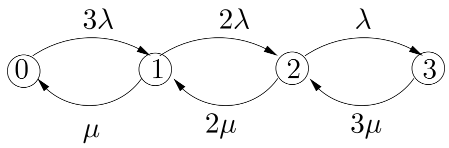

FIGURE A.9 – Graphe de transition du système à nombre limité de clients.

1. Si les 3 clients sont à l'extérieur du système, le premier client entrant dans le système le fait au bout d'une durée correspondant au minimum de 3 exponentielles indépendantes de paramètre λ, c'est-à-dire avec une loi exponentielle de paramètre 3λ. Le taux de transition de 0 à 1 est donc logiquement 3λ. De même, s'il y a 2 clients dans le système, le premier sorti l'est au bout d'un temps égal au minimum de deux exponentielles indépendantes de paramètre μ, c'est-à-dire avec une loi exponentielle de paramètre 2μ.
2. En posant $r = \frac{\lambda}{\mu}$, la loi stationnaire π est tout simplement :
$$\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3] = \left[\frac{1}{(1+r)^3}, \frac{3r}{(1+r)^3}, \frac{3r^2}{(1+r)^3}, \frac{r^3}{(1+r)^3}\right].$$
3. Soit N le nombre aléatoire de clients dans le système en régime stationnaire, N a donc pour loi π et le nombre moyen de clients dans le système est :
$$\mathbb{E}[N] = 0 \times \pi_0 + 1 \times \pi_1 + 2 \times \pi_2 + 3 \times \pi_3 = \frac{3r}{1+r}.$$
4. On considère le même système, mais avec N clients potentiels au lieu de 3.

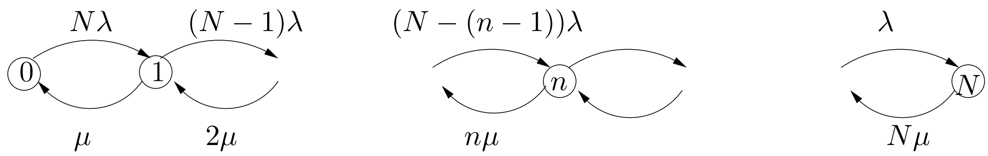

FIGURE A.10 – Graphe de transition du système à nombre limité N de clients.

   (a) Le graphe de transition est donné figure A.10.
   (b) En voyant cette chaîne comme un processus de naissance et de mort, on obtient par récurrence :
$$\forall n \in \{0, 1, \dots, N\} \qquad \pi_n = \frac{N \times (N-1) \times \cdots \times (N-(n-1))}{1 \times 2 \times \cdots \times n} r^n \pi_0 = C_N^n \, r^n \pi_0.$$
   On en déduit que :
$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^N C_N^n \, r^n} = \frac{1}{(1+r)^N},$$

puisqu'on a reconnu un binôme de Newton. Mais alors :

$$\forall n \in \{0, 1, \ldots, N\} \qquad \pi_n = C_N^n \, \frac{r^n}{(1+r)^N} = C_N^n \left(\frac{r}{1+r}\right)^n \left(\frac{1}{1+r}\right)^{N-n},$$

ce qui est exactement dire que π correspond à la loi binomiale $\mathcal{B}\left(N, \frac{r}{1+r}\right)$.

(c) On en déduit que le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire est l'espérance de cette loi binomiale :

$$\mathbb{E}[N] = \frac{Nr}{1+r},$$

ce qui généralise bien le résultat trouvé avec 3 clients.

Remarque. Avec les notations de Kendall, ceci est une file $M/M/\infty/\infty/N$.

Bibliographie

[1] Bruno Baynat. *Théorie des files d'attente, des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit.* Hermes Sciences Publications, 2000.

[2] Gunter Bolch, Stefan Greiner, Hermann de Meer, and Kishor S. Trivedi. *Queueing networks and Markov chains.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1998.

[3] Philippe Bougerol. *Processus de sauts et Files d'attente.* Format électronique, http ://www.proba.jussieu.fr/supports.php, 2001.

[4] Nicolas Bouleau. *Processus stochastiques et applications.* Hermann, 2000.

[5] Rick Durrett. *Essentials of stochastic processes.* Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1999.

[6] Dominique Foata et Aimé Fuchs. *Processus stochastiques.* Dunod, 2002.

[7] Geoffrey R. Grimmett and David R. Stirzaker. *One Thousand Exercises in Probability.* Oxford University Press, New York, 2001.

[8] Geoffrey R. Grimmett and David R. Stirzaker. *Probability and random processes.* Oxford University Press, New York, 2001.

[9] James R. Norris. *Markov Chains.* Cambridge University Press, 1997.

[10] Alan Ruegg. *Processus stochastiques.* Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1989.

[11] Bernard Ycart. *Modèles et algorithmes markoviens.* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[12] Bernard Ycart. *Files d'attente.* Cahiers de Mathématiques Appliquées, CMA 14, 2004.

[13] Bernard Ycart. *Processus markoviens de saut.* Cahiers de Mathématiques Appliquées, CMA 12, 2004.