Université de Rennes 2
Licence MASS 2

Année 2006/2007
Premier Semestre

Suites & Séries

Arnaud Guyader

Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

Introduction

Soit (u_n) une suite numérique, c'est-à-dire de nombres réels ou complexes. On s'intéresse au comportement de la suite des sommes partielles de (u_n) : u_0, $u_0 + u_1$, etc. C'est ce qu'on appelle l'étude de la série numérique $\sum u_n$. A de rares exceptions près, on ne saura pas calculer la limite éventuelle, appelée somme de la série. On tentera cependant de préciser sa nature (convergente ou divergente) ainsi que des équivalents asymptotiques. On commence par quelques rappels sur les suites.

1.1 Suites numériques : rappels et compléments

On appelle suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ toute suite de nombres réels ou complexes. On notera $(u_n)_{n\geq n_0}$ la suite ne commençant qu'à l'indice n_0. Dans les énoncés, on supposera que les suites commencent à l'indice 0. On notera alors plus simplement (u_n) la suite, à ne pas confondre avec u_n, qui est son terme de rang n.

1.1.1 Généralités

Définition 1.1 (Monotonie, Majoration, Minoration)
Soit (u_n) une suite de réels. On dit que (u_n) est :
- *croissante (respectivement : strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) si : $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n$ (respectivement : $>$, $\leq$, $<$).*
- *monotone si elle est croissante ou décroissante.*
- *stationnaire si elle constante à partir d'un certain indice.*
- *majorée (respectivement minorée) s'il existe un réel M (respectivement m) tel que : $\forall n \geq 0$, $u_n \leq M$ (respectivement $u_n \geq m$).*
- *bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire que la suite $(|u_n|)$ est majorée, i.e. il existe un réel $M > 0$ tel que : $\forall n \geq 0$, $|u_n| \leq M$.*

Soit plus généralement (u_n) une suite de nombres complexes. Notons $|z| \in \mathbb{R}^+$ le module de z. On rappelle qu'on peut décomposer z en partie réelle/partie imaginaire : $z = a + ib$, avec a et b réels, auquel cas $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; ou bien décomposer z en module/argument $z = re^{i\theta}$, avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, auquel cas $|z| = r$. Comme pour le cas d'une suite de réels, on dira que (u_n) est bornée si la suite $(|u_n|)$ des modules est majorée. En notant :

$$u_n = a_n + ib_n = r_n e^{i\theta_n},$$

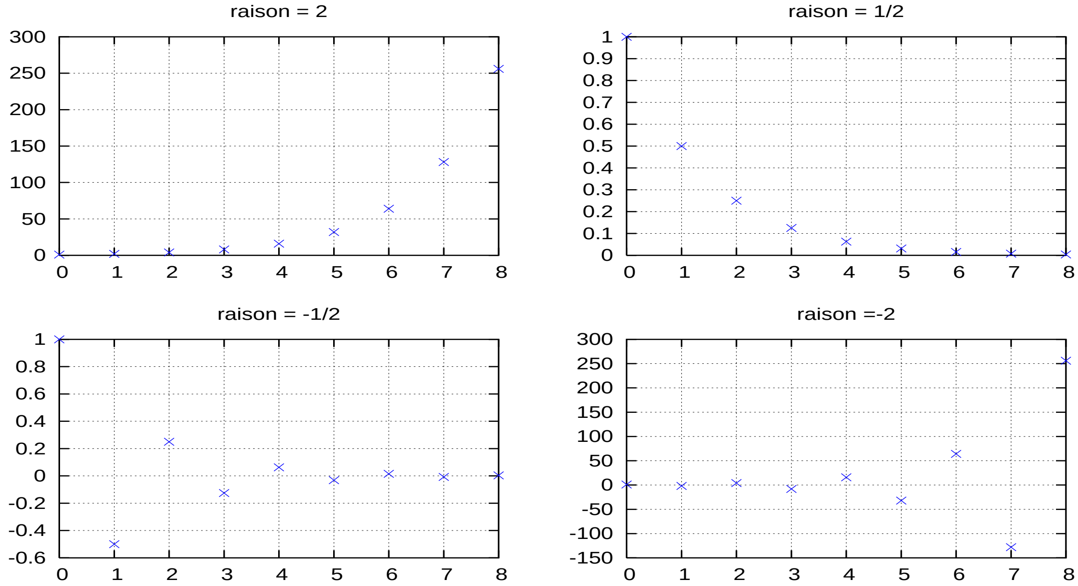

FIG. 1.1 – Suites géométriques de premier terme $u_0 = 1$ et pour différentes valeurs de la raison.

ceci revient à dire que les deux suites réelles (a_n) et (b_n) sont bornées, ou encore que la suite (r_n) est majorée.

Exemple : la suite géométrique
On considère la suite géométrique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \alpha u_n \end{cases}$$

où α est un réel, appelé raison de la suite. Le terme général s'écrit :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_n = \alpha^n.$$

Le comportement de la suite dépend donc de la valeur de la raison (voir figure 1.1) :
- $\alpha \in]1, +\infty[$: la suite est strictement croissante, minorée par 1, non majorée.
- $\alpha = 1$: la suite est constante égale à 1 (donc bornée).
- $\alpha \in]0, 1[$: la suite est strictement décroissante, majorée par 1 et minorée par 0.
- $\alpha = 0$: la suite est stationnaire à 0.
- $\alpha \in [-1, 0[$: la suite est majorée par 1, minorée par α.
- $\alpha \in]-\infty, -1[$: la suite n'est ni minorée, ni majorée.

Si on considère une suite géométrique de raison $\alpha \in \mathbb{C}$, on vérifie aisément qu'elle est bornée si et seulement si $|\alpha| \leq 1$.

Etudions le cas particulier où $\alpha = -1/2$: on a alors $u_n = (-1/2)^n$. On vérifie que la suite des termes pairs $(u_{2n})_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $1/4$, donc décroissante. La suite des termes impairs $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -1/2$ et de raison $1/4$, donc croissante. Les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont appelées suites extraites, ou sous-suites, de la suite (u_n). Donnons une définition générale.

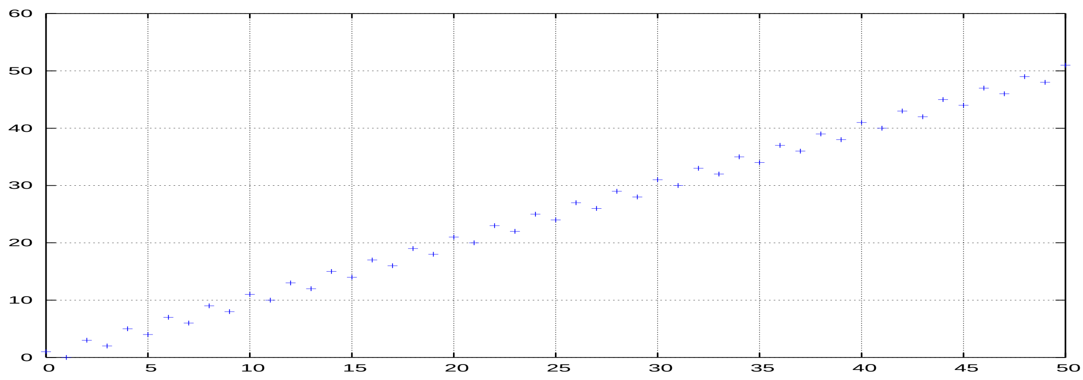

FIG. 1.2 – Suite $u_n = n + (-1)^n$.

Définition 1.2 (Sous-suite)
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. On dit que $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est une sous-suite, ou une suite extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$ si l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Par exemple, pour la sous-suite $(u_{2n})_{n\geq 0}$, l'application $\varphi : n \mapsto 2n$ est bien strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1.1.2 Limite, convergence

Définition 1.3 (Suite convergente)
On dit que la suite numérique (u_n) converge (ou tend) vers L si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \qquad |u_n - L| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{n\to\infty} u_n = L$, ou $\lim u_n = L$, ou encore $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

Cette définition est valable aussi bien pour les suites à termes réels qu'à termes complexes : le symbole $|.|$ correspond respectivement à la valeur absolue et au module.

Proposition 1.1
La suite à termes complexes (u_n), où $u_n = a_n + ib_n$, tend vers $L = a + ib$ si et seulement si (a_n) tend a et (b_n) vers b.

Nous ne rappelons pas ici les propriétés classiques des limites : unicité si existence, stabilité par combinaison linéaire, produit, quotient lorsque la limite du dénominateur est non nulle, etc. Dans le cas d'une suite réelle non convergente, on distingue encore les divergences vers plus ou moins l'infini.

Définition 1.4 (Limite infinie)
Soit (u_n) une suite de réels. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si :

$$\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \qquad u_n > M.$$

On note encore $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Remarque. Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante. Prendre par exemple la suite définie par $u_n = n + (-1)^n$, représentée figure 1.2.

On a bien sûr une définition équivalente pour une suite qui tend vers moins l'infini. Noter qu'on dit dans ces situations que (u_n) admet une limite, mais pas qu'elle est convergente. Revenons un peu aux sous-suites.

Proposition 1.2
Si (u_n) admet une limite (finie ou infinie), toute sous-suite de (u_n) admet la même limite.

Il faut bien sûr noter qu'une suite peut admettre des sous-suites convergentes sans être elle-même convergente. Par exemple si $u_n = (-1)^n$, la sous-suite $(u_{2n})_{n\geq 0}$ est constante égale à 1 donc convergente, et la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ est constante égale à -1 donc convergente aussi. Pour autant $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente. Enonçons un résultat utile dans l'étude des séries.

Proposition 1.3
Si les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite L, alors (u_n) admet pour limite L.

Le cas des suites monotones est paisible, car on a toujours une limite.

Proposition 1.4 (Suite monotone)
Soit (u_n) une suite de réels. Supposons (u_n) croissante. Ou bien (u_n) est majorée, auquel cas elle est convergente. Ou bien elle ne l'est pas, auquel cas elle tend vers plus l'infini.

De même, une suite décroissante est convergente si elle est minorée, tend vers moins l'infini sinon.

Remarque. Ce résultat, assez anodin a priori, sera particulièrement utile dans l'étude des séries à termes positifs.

Corollaire 1.1 (Suites adjacentes)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels. Supposons :
– *(u_n) croissante,*
– *(v_n) décroissante,*
– *$v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,*
alors (u_n) et (v_n) sont convergentes de même limite.

On verra un exemple d'application de ce résultat dans l'étude des séries alternées.

1.1.3 Relations de comparaison

Dans le cas général, deux suites numériques (u_n) et (v_n) étant données, on dit que :

- (u_n) est un petit o de (v_n), ou que (u_n) est négligeable par rapport à (v_n) et on note $u_n = o(v_n)$ si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists(\varepsilon_n)_{n\geq n_0},\ \forall n \geq n_0 \qquad u_n = \varepsilon_n v_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

- (u_n) est équivalente à (v_n) et on note $u_n \sim v_n$ si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists(\varepsilon_n)_{n\geq n_0},\ \forall n \geq n_0 \qquad u_n = (1+\varepsilon_n) v_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

L'indice n_0 rend ces définitions un peu lourdes. Sa raison d'être est la suivante : si (v_n) s'annule un nombre fini de fois, il n'y a aucune raison d'imposer la même contrainte à (u_n), puisqu'on ne s'intéresse qu'à la comparaison asymptotique des deux suites. De fait, si (v_n) reste différent de 0, ce qui sera généralement le cas, on peut réécrire les choses bien plus simplement.

Définition 1.5 (Relations de comparaison)
Soit (u_n) *et* (v_n) *deux suites numériques avec* $v_n \neq 0$ *pour tout* n. *On dit que :*
- (u_n) *est un petit o de* (v_n)*, ou est négligeable devant* (v_n)*, et on note* $u_n = o(v_n)$ *si* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- (u_n) *est équivalente à* (v_n) *et on note* $u_n \sim v_n$ *si* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Remarques.
– Ainsi on pourra écrire sans problème qu'une suite (u_n) qui converge vers L est équivalente à L si L est différent de zéro. Si L est nul, dire que $u_n \sim L$ revient à dire qu'à partir d'un certain rang, tous les u_n sont nuls. Par exemple, la suite $(u_n = \frac{1}{n})$ tend vers zéro, mais on ne peut pas écrire que $u_n \sim 0$. Ceci devient crucial lorsqu'on compose une suite avec une fonction : si $u_n \sim L$, on ne peut a priori écrire $f(u_n) \sim f(L)$ que si f est continue en L avec $f(L) \neq 0$. Exemple typique : on a $1 + \frac{1}{n} \sim 1$, mais $\ln(1 + \frac{1}{n}) \nsim \ln 1 = 0$, puisque la suite n'est pas nulle à partir d'un certain rang.
– De même, dire qu'une suite (u_n) est un petit o d'une constante non nulle signifie qu'elle tend vers zéro. Dire qu'une suite (u_n) est un petit o de 0 signifie qu'à partir d'un certain rang, tous les u_n sont nuls.

Exemples.
– Si $u_n = n^3 + n + 3$, on a $u_n \sim n^3$. De façon générale, si P est un polynôme et $u_n = P(n)$, la suite (u_n) est équivalente au monôme de plus haut degré.
– Si $u_n = \frac{n^2+n+\sin n}{n+2}$, on a $u_n \sim n$.

Propriétés 1.1 (Propriétés opératoires classiques)
Soit (u_n)*,* (v_n) *et* (w_n) *trois suites numériques.*
- si $u_n = o(w_n)$ *et si* $v_n = o(w_n)$ *alors* $u_n + v_n = o(w_n)$.
- si $u_n = o(v_n)$ *alors* $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
- si $u_n \sim v_n$ *et si* (u_n)*,* (v_n) *et* (w_n) *sont toutes de même signe, alors* $u_n + w_n \sim v_n + w_n$.
- si $u_n \sim v_n$ *alors* $u_n w_n \sim v_n w_n$.

Exemple. En exploitant les résultats ci-dessus, on a directement $n^3+n+3+\frac{n^2+n+\sin n}{n+2} \sim n^3+n \sim n^3$ et $(n^3+n+3)\cdot\frac{n^2+n+\sin n}{n+2} \sim n^3 \cdot n = n^4$.

Achtung !
– Se méfier des sommes d'équivalents lorsque les suites ne sont pas de même signe, comme le montre l'exemple suivant : $u_n = 1 + \frac{1}{n} \sim v_n = 1 + \frac{2}{n}$, mais si $w_n = -1$, il est clair que $u_n + w_n = \frac{1}{n} \nsim v_n + w_n = \frac{2}{n}$, puisque le rapport des deux suites tend vers 1/2 et non vers 1.
– La composition d'un équivalent par la fonction exponentielle ne se passe pas toujours sans heurt. Prenons $u_n = n + 1$ et $v_n = n$. On a bien $u_n \sim v_n$, mais :

$$\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e,$$

donc $e^{u_n} \nsim e^{v_n}$. De façon générale, on retiendra que :

$$e^{u_n} \sim e^{v_n} \Leftrightarrow u_n - v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Lorsque la suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$, on pourra souvent utiliser les critères de comparaisons classiques.

Proposition 1.5 (Comparaisons des suites classiques)
Pour toutes constantes strictement positives α*,* β*,* γ*,* δ*, on a :* $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$*,* $n^\beta = o(e^{\gamma n})$ *et* $e^{\gamma n} = o(n!^\delta)$.

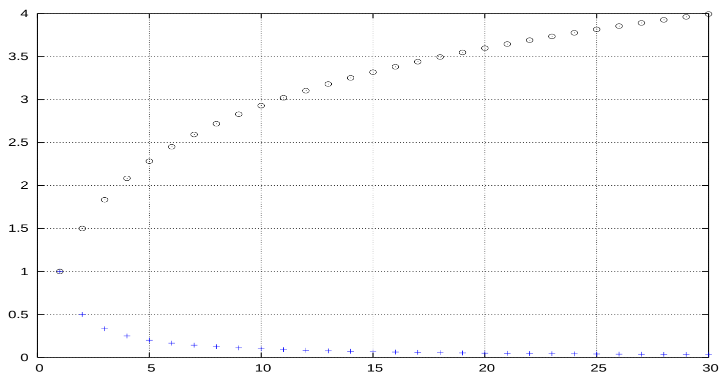

FIG. 1.3 – Suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ (croix) et série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ (cercles).

En bref, on retiendra que le factoriel l'emporte sur l'exponentielle qui l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme.

1.2 Séries numériques : généralités

Définition 1.6 (Série numérique, somme partielle)
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. On appelle série de terme général u_n, notée $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$, la suite des sommes partielles $(s_N)_{N\geq 0}$, définie par $s_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.

Remarque. Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un certain indice n_0, il en va de même pour la série, que l'on note alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$. La suite des sommes partielles est $(s_N)_{N\geq n_0}$, avec $s_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$.

Exemples :
- **La série harmonique**
  A la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est associée la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$. Les premières sommes partielles sont donc : 1, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, etc. Voir figure 1.3 pour la représentation.
- **La série géométrique**
  On part de la suite géométrique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \alpha u_n$, où α est un nombre réel ou complexe fixé différent de 1. Les premières sommes partielles sont donc : 1, $1+\alpha$, $1+\alpha+\alpha^2$, etc. On peut calculer explicitement les sommes partielles s_N de cette suite géométrique par la formule valable en toutes circonstances :
  Somme $=$ (1er terme écrit-1er terme non écrit)$/(1-\alpha)$, ce qui donne ici : $s_N = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}$.
- **Le développement décimal**
  Tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n 10^{-n} = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} + \ldots$$

  avec $x_n \in \{0,1,\ldots,9\}$ pour tout n. C'est le développement décimal de x et on écrit encore $x = 0,\overline{x_1 x_2 \ldots x_n \ldots}$. On convient en général que ce développement décimal ne finit pas par une infinité de 9 : c'est-à-dire qu'on écrit $x = 0.3780000$ ou plus succinctement $x = 0.378$, plutôt que $x = 0.37799999\ldots$. Voir aussi l'exercice 1.8 (Nombres rationnels et développement décimal).

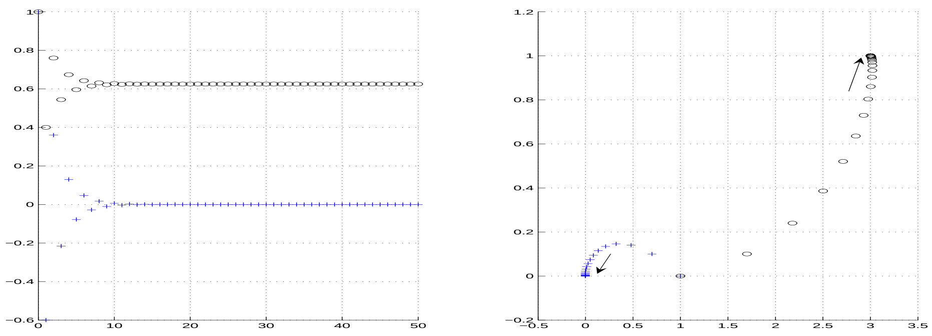

Fig. 1.4 – Suites et séries géométriques pour $\alpha = -0.6$ (à gauche) et $\alpha = 0.7 + 0.1i$ (à droite).

Définition 1.7 (Nature d'une série, reste d'une série convergente)
On dit que la série $\sum u_n$ *converge (respectivement diverge) si la suite* (s_N) *des sommes partielles converge (respectivement diverge). En cas de convergence, la limite* $s = \lim_{N\to\infty} s_N$ *est appelée somme de la série et notée :*

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Dans ce cas, on peut définir le reste r_N *à l'ordre* N *par* $r_N = s - s_N$*, qui s'écrit aussi :*

$$r_N = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=N+1}^{N+p} u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

Remarques.
- On parle de nature d'une série pour désigner la convergence ou la divergence de celle-ci. Par exemple, il est clair qu'on ne change pas la nature d'une série si on change un nombre fini de termes. Par contre, en cas de convergence, la somme est changée.
- Se méfier du symbole de sommation dans l'écriture de la somme d'une série $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: ce n'est pas une somme au sens usuel, car elle n'est pas commutative en général (voir l'exercice "Problème de commutativité").
- Les sommes partielles d'une série sont toujours définies, mais les restes ne le sont que lorsque la série est convergente : (r_N) est alors une suite de limite nulle.
- Si le terme général $u_n = a_n + ib_n$ est complexe, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les deux séries réelles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, auquel cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Exemple : la série géométrique
D'après le calcul de la somme partielle s_N, on voit que si la raison α est de module strictement inférieur à 1, alors $\lim_{N\to\infty} \alpha^{N+1} = 0$, donc la série converge (voir aussi figure 1.4), de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} s_N = 1/(1-\alpha).$$

Le reste à l'ordre N s'écrit : $r_N = \alpha^{N+1}/(1-\alpha)$. La suite (r_N) tend à vitesse géométrique vers 0.

Propriétés 1.2 (Structure d'espace vectoriel)
1. *Si* $\lambda \neq 0$*, les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum(\lambda u_n)$ *sont de même nature, avec en cas de convergence :* $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

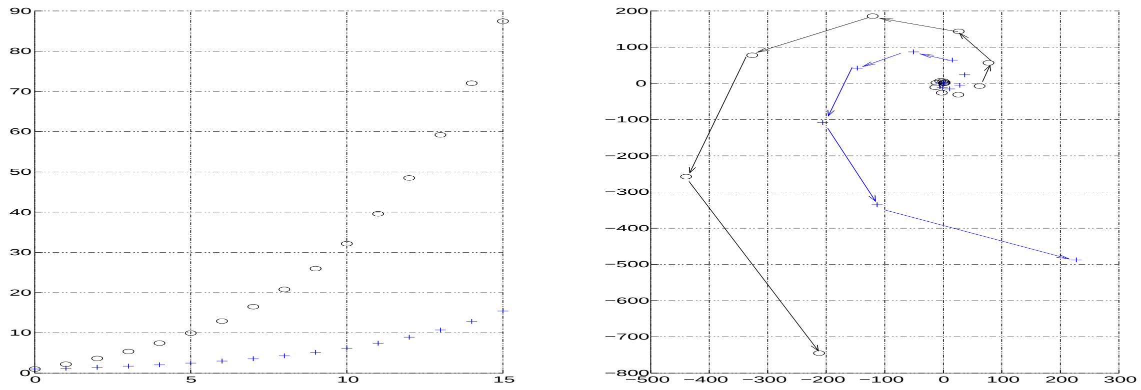

FIG. 1.5 – Suites et séries géométriques pour $r = 1.2$ et $r = 1.1 + i * 1.05$.

2. *Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série somme $\sum(u_n + v_n)$ est convergente, avec : $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.*
3. *Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente, alors $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.*

Preuve.

1. Notons respectivement (s_N) et (σ_N) les sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum(\lambda u_n)$. Il est clair que pour tout N, on a $\sigma_N = \lambda s_N$. Si $\lambda \neq 0$, on a donc (σ_N) convergente si et seulement si (s_N) l'est, auquel cas :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lim_{N\to\infty} \sigma_N = \lim_{N\to\infty} \lambda s_N = \lambda \lim_{N\to\infty} s_N = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$
2. Notons respectivement (s_N), (σ_N) et (Σ_N) les sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum(u_n + v_n)$. Il est clair que pour tout N, on a $\Sigma_N = s_N + \sigma_N$. Donc si (s_N) et (σ_N) sont convergentes, (Σ_N) l'est aussi avec :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{N\to\infty} \Sigma_N = \lim_{N\to\infty} (s_N + \sigma_N) = \lim_{N\to\infty} s_N + \lim_{N\to\infty} \sigma_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
3. On reprend les notations du point précédent, on a toujours pour tout N : $\Sigma_N = s_N + \sigma_N$, or la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente donc (Σ_N) diverge, i.e. la série $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

■

Remarque. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes, on ne peut rien dire a priori de la série somme : prendre par exemple $u_n = 1$, $v_n = 1$, $w_n = -1$. Les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont divergentes. Mais $\sum(u_n + v_n)$ est divergente, alors que $\sum(u_n + w_n)$ est convergente.

Proposition 1.6 (Critère de triviale divergence)
Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors son terme général (u_n) tend vers zéro. Autrement dit, si (u_n) ne tend pas vers zéro, la série diverge. On dit dans ce cas qu'elle diverge trivialement, ou grossièrement.

Exemple : la série géométrique
Si $|\alpha| \geq 1$, on a $|\alpha^n| = |\alpha|^n \geq 1$ pour tout n, donc la série diverge trivialement (voir figure 1.5).

Preuve. Soit $s_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ la somme partielle. Si la série est convergente de somme s, on a $\lim_{N\to\infty} s_N = s$, ainsi que $\lim_{N\to\infty} s_{N-1} = s$, donc $\lim_{N\to\infty}(s_N - s_{N-1}) = 0$, i.e. $\lim_{N\to\infty} u_N = 0$.

■

Remarque. La proposition précédente donne une condition **nécessaire** de convergence : elle n'est nullement **suffisante**, comme le montre la série télescopique $\sum_{n\geq 1}\ln(\frac{n+1}{n})$. On a $s_N = \sum_{n=1}^{N}\ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(N+1)$ donc $(s_N)_{N\geq 1}$ est divergente : la série $\sum_{n\geq 1}\ln(\frac{n+1}{n})$ est divergente. Néanmoins, son terme général tend vers zéro :

$$\lim_{n\to\infty}\ln(\frac{n+1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln 1 = 0.$$

Exercice. Via une minoration des sommes partielles (s_N), montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente, mais non trivialement.

Exemple : la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$
La série harmonique est un exemple typique de série divergente non trivialement divergente. Pour montrer qu'elle diverge, considérons ses sommes partielles (s_N). On a :

$$s_{2N} - s_N = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} \geq N \times \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Or si (s_N) convergeait vers s, on aurait aussi convergence de la sous-suite (s_{2N}) vers s, donc $(s_{2N} - s_N)$ tendrait vers 0, ce qui est exclu vu l'inégalité précédente.

Pour l'étude des suites numériques, on dispose du critère de Cauchy : celui-ci est surtout d'un emploi théorique (théorème du point fixe, absolue convergence $\Rightarrow$ convergence pour les intégrales généralisées, etc.). Il est utile dès que l'on veut montrer la convergence d'une suite dont on ignore la limite. Il en va de même pour les séries.

Rappel : Critère de Cauchy pour les suites
Une suite numérique (u_n) est convergente si et seulement si :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0 \qquad |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon.$$

Théorème 1.1 (Critère de Cauchy pour les séries)
La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite (s_N) des sommes partielles satisfait le critère de Cauchy :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall N \geq N_0,\ \forall p \geq 0 \qquad |s_{N+p} - s_N| < \varepsilon.$$

On retrouve la même application de ce critère pour les séries que pour les intégrales généralisées : absolue convergence implique convergence.

Définition 1.8 (Série absolument convergente)
Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que cette série est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente. Une série convergente non absolument convergente est dite semi-convergente.

Exercice. On considère la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ définie par : $u_{2n} = \frac{1}{n+1}$ et $u_{2n+1} = -\frac{1}{n+1}$. Calculer les sommes partielles (s_N) en fonction de la parité de N. En déduire que la série est semi-convergente.

Exemple : la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$
La série harmonique alternée est un exemple typique de série semi-convergente. On a déjà vu que la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente, on verra dans le paragraphe sur les séries alternées que

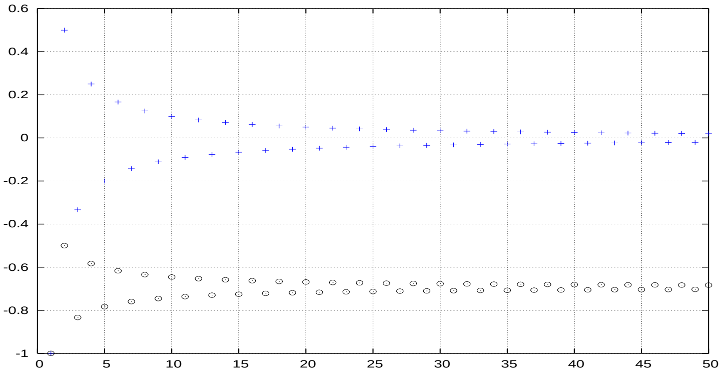

FIG. 1.6 – Suite $(\frac{(-1)^n}{n})_{n\geq 1}$ et série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$.

la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ est cependant convergente.

Remarque. Le symbole $|.|$ désigne la valeur absolue ou le module selon que u_n est réel ou complexe. On rappelle l'inégalité triangulaire :

$$\forall (z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n \qquad |z_1+\dots+z_n|\leq |z_1|+\dots+|z_n|.$$

Dans le cas d'une série absolument convergente, cette inégalité passe à la limite.

Théorème 1.2 (Absolue convergence $\Rightarrow$ convergence)
Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente et on a l'inégalité triangulaire généralisée :

$$|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n|\leq \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|.$$

Preuve. Supposons $\sum u_n$ absolument convergente, alors d'après le critère de Cauchy :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_0,\ \forall N\geq N_0,\ \forall p\geq 0 \qquad |u_{N+1}|+\dots+|u_{N+p}|<\varepsilon,$$

et d'après l'inégalité triangulaire on a donc :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_0,\ \forall N\geq N_0,\ \forall p\geq 0 \qquad |u_{N+1}+\dots+u_{N+p}|<\varepsilon.$$

Ainsi la série $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy : elle est donc convergente. Toujours par l'inégalité triangulaire, on a alors pour tout N :

$$|\sum_{n=0}^{N}u_n|\leq \sum_{n=0}^{N}|u_n|.$$

Les deux suites sont convergentes et l'inégalité est encore vérifiée en passant à la limite sur N, ce qui donne le résultat voulu.

∎

Pour étudier la nature d'une série à termes de signes variables, on commencera donc par regarder si elle est absolument convergente. Pour les séries à termes positifs, on dispose de nombreuses méthodes pratiques, qui font l'objet de la section suivante.

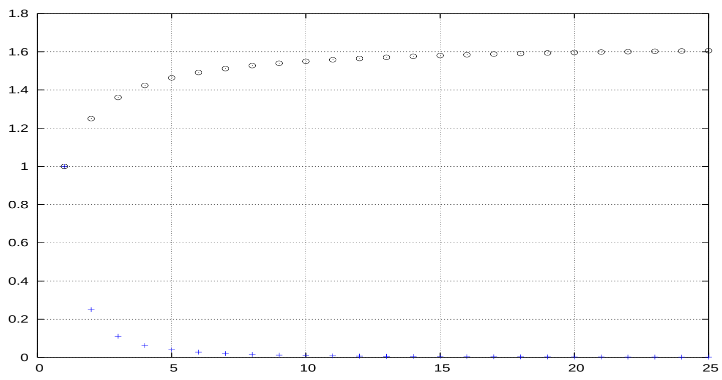

Fig. 1.7 – Suite $(\frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$ et série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

1.3 Séries à termes positifs

1.3.1 Résultats généraux

Dans le cas d'une série $\sum u_n$ de terme général u_n positif, la suite (s_N) des sommes partielles est croissante puisque $s_{N+1}-s_N=u_{N+1}\geq 0$. Il n'y a donc que deux comportements possibles pour une telle série : ou bien elle converge vers $s\in\mathbb{R}^+$, ou bien elle diverge vers $+\infty$.

Proposition 1.7 (Critère de convergence)
Une série à termes positifs $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (s_N) des sommes partielles est majorée.

Exemple : convergence de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$
Pour tout $n\geq 2$, on a $\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, d'où l'on déduit que :

$$s_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\leq 1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N})=2-\frac{1}{N}\leq 2.$$

Les sommes partielles sont majorées par 2, donc la série est convergente. On peut montrer que sa somme est $\frac{\pi^2}{6}\approx 1.645$ (voir aussi figure 1.7). Que vient-on de faire ? Majorer une série par une autre, dont on connaît la nature. Cette méthode est générale :

Corollaire 1.2 (Comparaison de séries positives)
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que pour tout n : $0\leq u_n\leq v_n$.
- Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge.

Preuve. Dans le premier cas, on a pour tout N : $\sum_{n=0}^{N}u_n\leq\sum_{n=0}^{N}v_n\leq\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$, ce qui prouve que $\sum u_n$ converge. Le second point est la contraposée du premier.

■

Exemple. $\sum\sin\frac{1}{2^n}$ est une série convergente, via l'inégalité $\sin x\leq x$ valable pour tout x positif, et la convergence de la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Ainsi, on peut déduire la nature d'une série de celle d'une série plus simple. Plus précisément, il suffit de comparer asymptotiquement les termes généraux, i.e. u_n et v_n lorsque l'indice n tend vers l'infini. En ce sens, les notions de "petit o" et d'équivalent seront ici d'une redoutable efficacité.

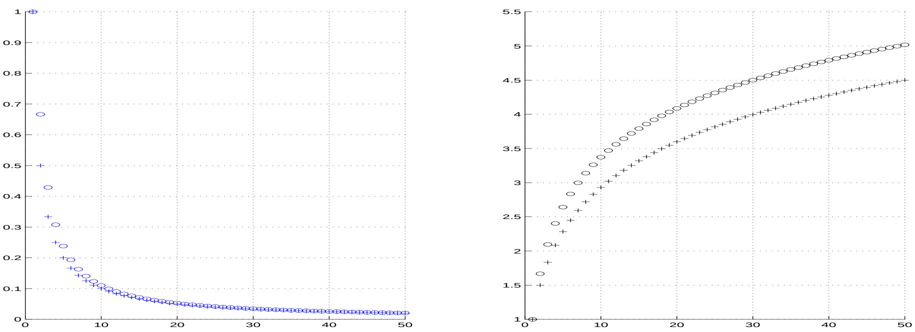

FIG. 1.8 – A gauche : suites $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ $(+)$ et $(\frac{n^2+n}{n^3+1})_{n\geq 1}$ (o). A droite : séries associées.

Propriétés 1.3 (Sommation des relations de comparaison)
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
a- Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
b- Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
c- Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Preuve. Notons (s_N) et (σ_N) les sommes partielles respectives des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
a - Puisque $u_n = o(v_n)$, il existe N_0 tel que : $\forall n \geq N_0$, $u_n \leq v_n$. On en déduit que : $\forall N \geq N_0$, $s_N \leq s_{N_0} + (\sigma_N - \sigma_{N_0}) \leq s_{N_0} + (\sigma - s_{N_0})$. Donc (s_N) est majorée et $\sum u_n$ converge.
b - est la contraposée de a -.
c - Puisque $u_n/v_n \to 1$, il existe N_0 tel que : $\forall n \geq N_0$, $\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$. On en déduit que :

$$\forall N \geq N_0 \qquad \frac{1}{2}(\sigma_N - \sigma_{N_0}) \leq s_N - s_{N_0} \leq \frac{3}{2}(\sigma_N - \sigma_{N_0}),$$

d'où l'on déduit que (s_N) est majorée si et seulement si (σ_N) l'est, i.e. les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

■

Exemple. La série $\sum \frac{n^2+n}{n^3+1}$ est divergente puisque $\frac{n^2+n}{n^3+1} \sim \frac{1}{n}$ et la série harmonique diverge (cf figure 1.8).

Nota Bene. Revenons à ce qui a été dit plus haut sur les équivalents en considérant la série $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$. L'erreur classique pour conclure sur sa nature consiste à écrire : $1+\frac{1}{n} \sim 1$, ce qui est vrai, donc $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \ln 1 = 0$, ce qui est faux. Or $\sum 0$ est convergente, donc $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ est convergente, ce qui est faux. Dans ce genre de situation, il faut être plus fin et dire que $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} > 0$, or $\sum \frac{1}{n}$ est divergente donc $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ est divergente.

Remarques.
– On s'est contenté ici de donner des résultats de convergence. Des résultats plus précis sur les comparaisons des sommes partielles et restes des séries seront donnés plus loin.
– Pour que le résultat sur les séries à termes équivalents soit valide, il suffit en fait que l'une des deux séries soit à termes positifs. Par contre, ça peut déraper si les deux suites sont de signes variables. Voir l'exercice "Equivalents de signes alternés".

1.3.2 Règles pratiques

En général, on ne saura pas calculer la somme d'une série. Par contre, grâce aux relations de comparaison ci-dessus, on saura préciser sa nature en se ramenant à des séries plus simples, telles

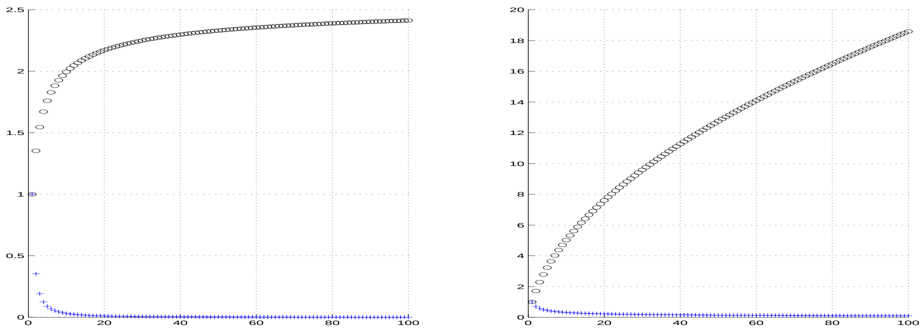

FIG. 1.9 – Suites $(\frac{1}{n^\alpha})_{n\geq 1}$ et séries de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$. A gauche, $\alpha=\frac{3}{2}$. A droite, $\alpha=\frac{1}{2}$.

les séries de Riemann.

Proposition 1.8 (Séries de Riemann)
La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha>1$, diverge si $\alpha\leq 1$.

Preuve. Si $\alpha\leq 1$, alors $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n^\alpha}$, or la série harmonique diverge, donc il en est de même pour la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$. Si $\alpha>1$ et si on note $\beta=\alpha-1>0$, la série télescopique $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n^\beta}-\frac{1}{(n+1)^\beta})$ est donc convergente. Or on a aussi :

$$\frac{1}{n^\beta}-\frac{1}{(n+1)^\beta}=\frac{1}{n^\beta}(1-(1+\frac{1}{n})^{-\beta})\sim\frac{1}{n^\beta}\times\frac{\beta}{n}=\frac{\beta}{n^{\beta+1}}=\frac{\alpha-1}{n^\alpha}.$$

Par la propriété des séries (positives) équivalentes, on en déduit que pour tout $\alpha>1$, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ converge, c'est-à-dire que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge.

■

Remarque. Le résultat est donc le même que pour les intégrales généralisées dites de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx$. Le lien entre séries et intégrales généralisées sera détaillé plus loin. On retrouve aussi pour les séries la fameuse règle de Riemann des intégrales généralisées en $+\infty$.

Proposition 1.9 (Règle de Riemann, ou règle $n^\alpha u_n$)
- S'il existe $\alpha>1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha\leq 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ tend vers $+\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Preuve. Dans le premier cas, c'est exactement dire que $u_n=o(1/n^\alpha)$, avec $\alpha>1$, donc convergence de $\sum 1/n^\alpha$, et a fortiori de $\sum u_n$. Dans le second cas, on a par contre : $1/n^\alpha=o(u_n)$, avec $\alpha\leq 1$, donc divergence de $\sum 1/n^\alpha$, et a fortiori de $\sum u_n$.

■

Exemple. la série $\sum e^{-2\sqrt{n}}$ est convergente, puisqu'on a par exemple $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-2\sqrt{n}}=0$.

Remarque. On peut donner une formulation plus fine de ce principe, mais celle-ci suffira très souvent en pratique.

Proposition 1.10 (Règle de d'Alembert, ou règle $\frac{u_{n+1}}{u_n}$)
Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ tend $L\in[0,+\infty]$. Alors
- Si $L<1$, $\sum u_n$ converge.
- Si $L>1$, $\sum u_n$ diverge trivialement.

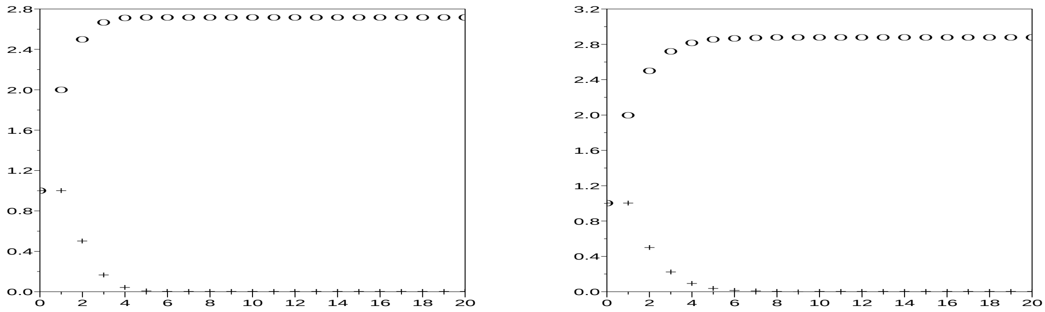

FIG. 1.10 – A gauche : suite $(\frac{1}{n!})_{n\geq 0}$ et série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$. A droite : suite $(\frac{n!}{n^n})_{n\geq 1}$ et série $\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{n^n}$.

Preuve.
- Si $L<1$: soit $m=\frac{1+L}{2}$. Il existe un indice n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$, on ait : $0<\frac{u_{n+1}}{u_n}<m<1$. On aura donc pour tout $n\geq n_0$: $u_n\leq u_{n_0}m^{n-n_0}$. Donc pour les sommes partielles $s_N=\sum_{n=0}^N u_n$:

$$\forall N\geq n_0 \qquad s_N\leq s_{n_0-1}+u_{n_0}\sum_{k=0}^{N-n_0}m^k=s_{n_0-1}+u_{n_0}\frac{1-m^{N-n_0+1}}{1-m}\leq s_{n_0-1}+\frac{u_{n_0}}{1-m},$$

borne indépendante de N. Ainsi les sommes partielles sont majorées et la série est convergente.
- Si $L>1$: soit $M=\frac{1+L}{2}$. Il existe un indice n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$, on ait : $\frac{u_{n+1}}{u_n}>M>1$. C'est-à-dire que pour $n\geq n_0$, la suite (u_n) est positive et strictement croissante : elle ne peut donc tendre vers zéro et la série est trivialement divergente.

■

Exemples :
– La fonction exponentielle : soit z un nombre complexe fixé, alors la série $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente (donc convergente). C'est clair si $z=0$, auquel cas la somme vaut 1. Si $z\neq 0$, on applique le critère de d'Alembert à la série à termes strictement positifs $\sum|\frac{z^n}{n!}|=\sum\frac{|z|^n}{n!}$, on obtient :

$$\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\div\frac{|z|^n}{n!}=\frac{|z|}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0<1.$$

Ceci est une façon de définir la fonction exponentielle pour tout nombre réel ou complexe : $e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$. Voir figure 1.10 à gauche pour $e^1=e$ et l'exercice “Fonction exponentielle”.
– La série $\sum\frac{n!}{n^n}$ est convergente (voir figure 1.10 à droite). C'est un peu moins immédiat que dans l'exemple précédent :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=(\frac{n}{n+1})^n=e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}=e^{-n(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{e}<1.$$

Remarque. Dans le cas $L=1$, les deux comportements sont possibles, comme le montrent les séries de Riemann.

Lorsque $L=1$, on peut s'en sortir en écrivant un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{1}{n}$ de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. C'est l'objet du résultat suivant (admis), que l'on peut donc voir comme un raffinement du critère de d'Alembert.

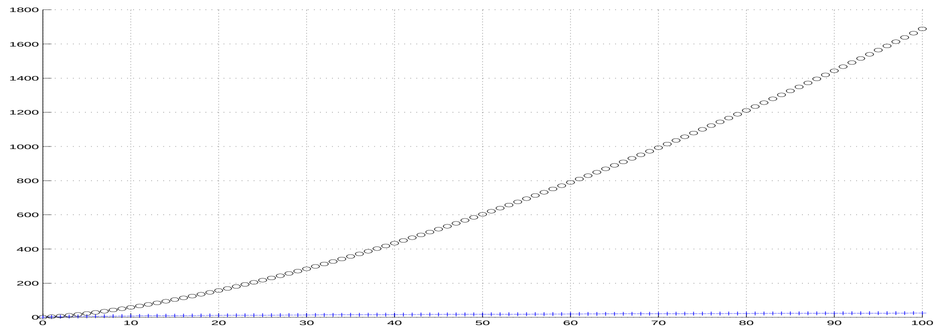

FIG. 1.11 – Suite $(\frac{e^n n!}{n^n})_{n\geq 0}$ et série $\sum_{n\geq 0}\frac{e^n n!}{n^n}$.

Proposition 1.11 (Critère de Raabe-Duhamel)
Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$, alors
- si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge.
- si $\alpha < 1$, $\sum u_n$ diverge.

Exemple. La série $\sum(e^n n!/n^n)$ est divergente (voir figure 1.11). On obtient cette fois :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-n\ln(1+\frac{1}{n})} \sim e^{1-n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} = e^{\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})} = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On voit donc que la règle de d'Alembert ne permettrait pas de conclure, mais que le critère de Raabe-Duhamel s'applique avec $\alpha = -1/2 < 1$, d'où la divergence de la série. Plus précisément, on peut en fait montrer la formule de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

1.3.3 Comparaison série/intégrale

Lorsque le terme général correspond à une fonction facilement intégrable, l'étude de la série en découle très simplement.

Théorème 1.3
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante, alors la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ a même nature que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

Preuve. Par décroissance de f, on a :

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in [n, n+1] \qquad f(n+1) \leq f(x) \leq f(n),$$

d'où l'on déduit en intégrant entre n et $(n+1)$ (voir figure 1.12) :

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in [n, n+1] \qquad f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n),$$

et par suite pour tout $n \geq 1$:

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx,$$

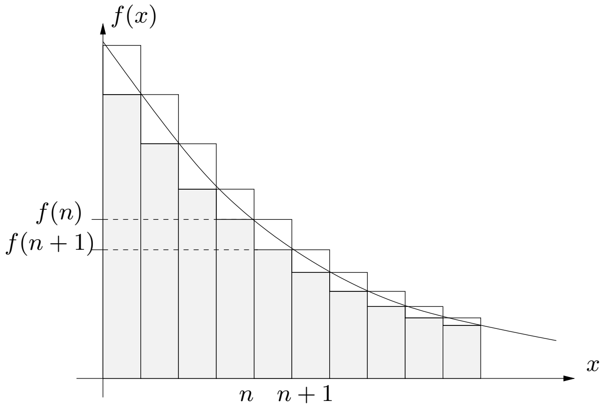

FIG. 1.12 – Illustration de l'inégalité : $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$.

ce qui donne un encadrement de la somme partielle $s_N = \sum_{n=0}^{N} f(n)$:

$$\int_0^{N+1} f(x)\,dx \leq s_N \leq f(0) + \int_0^{N} f(x)\,dx,$$

donc deux situations possibles :
- ou bien $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$, auquel cas $s_N \leq f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$: les sommes partielles sont majorées, donc la série est convergente.
- ou bien $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, auquel cas $\lim_{N\to\infty} \int_0^{N+1} f(x)\,dx = +\infty$ et l'inégalité de gauche assure qu'il en est de même pour (s_N) : la série est divergente.

■

Remarques.
– En particulier, si on a convergence, la preuve montre en passant à la limite en N :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leq f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

– Si la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ne commence pas à l'indice 0, mais à l'indice n_0, on considère bien entendu l'intégrale généralisée de n_0 à l'infini.

Exemple. On retrouve ainsi très simplement le résultat sur les séries de Riemann pour $\alpha > 0$: la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ a même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$.

Proposition 1.12 (Estimation du reste ou de la somme partielle)
Sous les mêmes hypothèses que précédemment, la suite $(s_N - \int_0^N f(x)\,dx)_{N\in\mathbb{N}}$ *est convergente. Et :*
- Si l'intégrale converge, alors $\int_{N+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq r_N \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx$.
- Si l'intégrale diverge, on a l'équivalence $s_N \sim \int_0^N f(x)\,dx$.

Preuve.
Soit $w_N = s_N - \int_0^N f(x)\,dx$. La suite (w_N) est décroissante puisque :

$$w_N - w_{N-1} = f(N) - \int_{N-1}^{N} f(x)\,dx \leq 0,$$

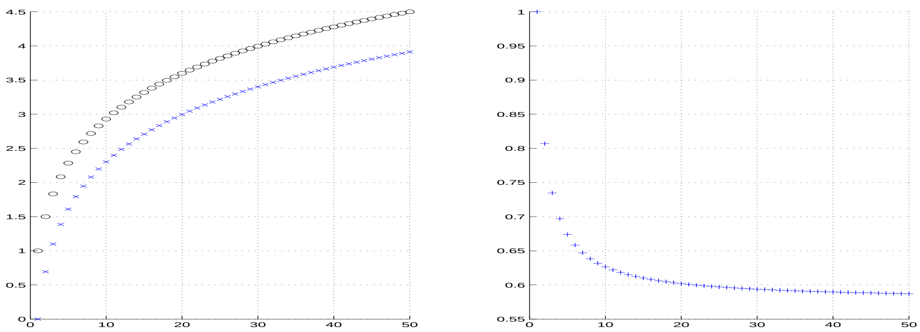

FIG. 1.13 – A gauche : sommes partielles de la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (o) et suite $(\ln n)_{n\geq 1}$ (x). A droite : suite $(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N}-\ln N)_{N\geq 1}$, convergence vers la constante d'Euler $\gamma \approx 0.577$.

d'après la majoration de $f(N)$ déjà vue. Par ailleurs, on a vu également que :

$$s_N \geq \int_0^{N+1} f(x)\,dx,$$

d'où il vient :

$$w_N = s_N - \int_0^N f(x)\,dx \geq \int_N^{N+1} f(x)\,dx \geq 0,$$

par positivité de f. Ainsi (w_N) est décroissante minorée : elle converge.
- Si l'intégrale converge : soit $r_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n)$, or on a vu que pour tout $n \geq 1$:

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx,$$

ce qui donne en sommant membre à membre de $(N+1)$ à $(N+p)$ et en faisant tendre p vers l'infini :

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq r_N \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx.$$

- Si l'intégrale diverge, alors en notant L la limite de (w_N), on a le développement asymptotique : $s_N - \int_0^N f(x)\,dx = L + o(1)$, avec $\lim_{N\to\infty} L + o(1) = L$, donc :

$$\frac{s_N}{\int_0^N f(x)\,dx} = 1 + \frac{L+o(1)}{\int_0^N f(x)\,dx} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

■

Exemples :

– L'erreur faite en remplaçant $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ par la somme des 100 premiers termes est de l'ordre de 10^{-2}. De façon générale, la suite (r_N) des restes de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est équivalente à la suite $(\frac{1}{N})$.
– La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, de somme partielle (s_N) équivalente à $(\ln N)$. Plus précisément, la suite $(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N}-\ln N)$ admet une limite γ, appelée constante d'Euler :

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N}-\ln N \xrightarrow[N\to\infty]{} \gamma = 0.577\dots$$

autrement dit on a le développement asymptotique : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$, illustré figure 1.13.

1.3.4 Sommation des relations de comparaison

Une fois établie la convergence ou la divergence d'une série, on voudrait : en cas de convergence, savoir à quelle vitesse, i.e. obtenir une évaluation des restes (r_N) (qui tendent vers zéro) ; en cas de divergence, avoir un équivalent des sommes partielles (s_N) (qui tendent vers l'infini). Tout comme pour la détermination de la nature d'une série, on se ramène en général à des séries plus simples. On précise ainsi les résultats de la propriété 1.3.

Propriétés 1.4 (Sommation des relations de comparaison)
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Leurs sommes partielles sont respectivement notées (s_N) et (σ_N), leurs restes lorsqu'ils sont définis (r_N) et (ρ_N). On a alors
a - si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi et $r_N = o(\rho_N)$.
b - si $u_n = o(v_n)$ et $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi et $s_N = o(\sigma_N)$.
c - si $u_n \sim v_n$, les deux séries ont même nature avec en cas de convergence (respectivement de divergence) : $r_N \sim \rho_N$ (respectivement $s_N \sim \sigma_N$).

Preuve. Si $u_n = o(v_n)$, soit $\varepsilon > 0$, alors il existe N_0 tel que :

$$\forall n \geq N_0 \qquad 0 \leq u_n \leq \varepsilon v_n.$$

a - Si la série converge, on a donc pour tout $N \geq N_0$, pour tout $p \geq 0$:

$$0 \leq s_{N+p} - s_N \leq \varepsilon(\sigma_{N+p} - \sigma_N).$$

On fait tendre p vers l'infini pour obtenir :

$$0 \leq r_N \leq \varepsilon \rho_N,$$

ce qui prouve bien que $r_N = o(\rho_N)$.
b - Si la série diverge : pour N_0 comme ci-dessus, puisque $\lim_{N\to\infty} \sigma_N = \infty$, il existe N_1 tel que :

$$\forall N \geq N_1 \qquad 0 \leq s_{N_0} \leq \varepsilon \sigma_N,$$

mais alors pour tout $N \geq \max(N_0, N_1)$:

$$0 \leq s_N = s_{N_0} + (s_N - s_{N_0}) \leq \varepsilon \sigma_N + \varepsilon(\sigma_N - s_{N_0}) \leq 2\varepsilon \sigma_N,$$

ce qui prouve bien que $s_N = o(\sigma_N)$.
c - Même principe que ci-dessus.

■

Nota Bene. Les relations de comparaison ne peuvent se sommer que pour l'évaluation des restes des séries convergentes, et des sommes partielles des séries divergentes.

Exemples :
– La série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{n^3+1}$ est divergente puisque $\frac{n^2+n}{n^3+1} \sim \frac{1}{n}$. De plus, la suite (s_N) de ses sommes partielles est équivalente à celle de la série harmonique :

$$s_N \sim \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \ln N.$$

– La série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{n^4+n+1}$ est convergente puisque $\frac{n^2+n}{n^4+n+1} \sim \frac{1}{n^2}$. De plus, la suite (r_N) de ses restes est équivalente à celle de la série $\sum \frac{1}{n^2}$:

$$r_N \sim \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{N}.$$

1.4 Séries à termes quelconques

1.4.1 Séries absolument convergentes

Soit $\sum u_n$ une série numérique générale, i.e. ses termes ne sont plus nécessairement positifs. On a montré grâce au critère de Cauchy que si la série est absolument convergente, c'est-à-dire si $\sum |u_n|$ converge, alors elle est convergente. Puisque $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs, on peut lui appliquer les critères de la section précédente, que l'on récapitule ici.

Propriétés 1.5 (Critères d'absolue convergence)
Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques et $\sum v_n$ une série à termes positifs.
- *si $|u_n| \leq v_n$ avec $\sum v_n$ convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.*
- *si $|u_n| = o(v_n)$ avec $\sum v_n$ convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.*
- *si $|u_n| \sim v_n$ avec $\sum v_n$ convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.*
- *s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to\infty} n^\alpha |u_n| = 0$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.*
- *si $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = L < 1$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente ; si $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = L > 1$, alors $\sum u_n$ est trivialement divergente.*
- *s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.*

Nota Bene. Pour des séries à termes quelconques, le critère d'équivalence n'est plus valable : on peut avoir $u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ convergente, mais $\sum u_n$ divergente (cf l'exercice "Equivalents de signes variables").

1.4.2 Séries alternées

Définition 1.9 (Série alternée)
On appelle série alternée toute série du type $\sum(-1)^n a_n$, avec a_n de signe constant.

Convention. Dans la suite, on supposera par commodité $a_n \geq 0$. Tous les résultats se traduisent sans problème dans le cas contraire en considérant la suite $u_n = -a_n$.

Exemple. $\sum(-1)^n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ sont des séries alternées. La première est trivialement divergente. Le théorème suivant montre que la seconde est convergente.

Théorème 1.4 (Critère des séries alternées)
Soit la série alternée $\sum(-1)^n a_n$. Si la suite (a_n) décroît vers 0, alors la série est convergente.

Preuve. C'est un raisonnement de suites adjacentes, dont on rappelle le principe : si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, avec $u_n \leq v_n$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$, alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. Ici, les suites adjacentes seront les sous-suites (s_{2N+1}) et (s_{2N}) de la suite des sommes partielles. En effet : (s_{2N+1}) est croissante puisque :

$$s_{2N+3} - s_{2N+1} = a_{2N+2} - a_{2N+3} \geq 0.$$

De même, (s_{2N}) est décroissante puisque :

$$s_{2N+2} - s_{2N} = a_{2N+2} - a_{2N+1} \leq 0.$$

Par ailleurs, pour tout N, $s_{2N} \geq s_{2N+1}$, puisque $s_{2N} - s_{2N+1} = a_{2N+1} \geq 0$, et par hypothèse $\lim_{N\to\infty} s_{2N} - s_{2N+1} = \lim_{N\to\infty} a_{2N+1} = 0$. Donc il existe un réel s tel que $\lim_{N\to\infty} s_{2N} = \lim_{N\to\infty} s_{2N+1} = s$, c'est-à-dire que $\lim_{N\to\infty} s_N = s$: la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente, de somme s. La figure 1.14 illustre le phénomène.

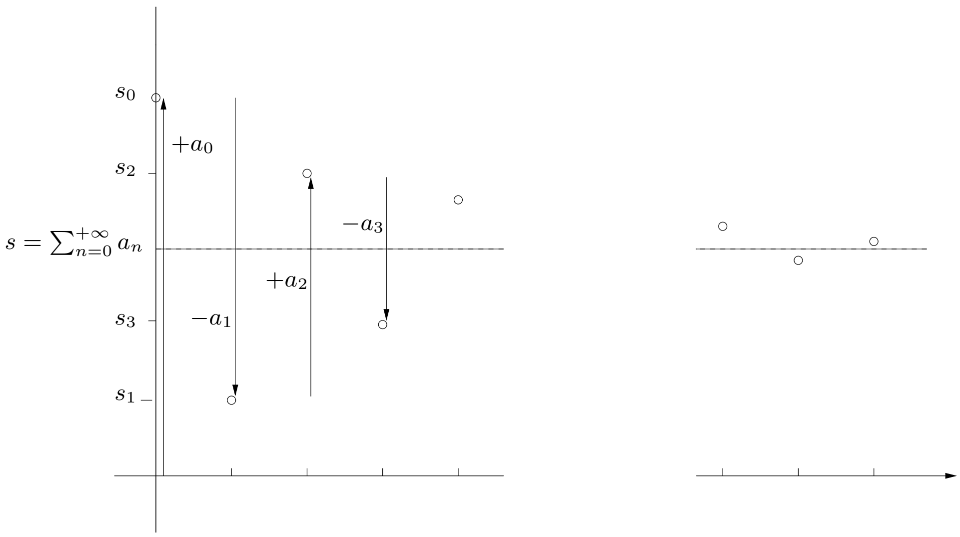

FIG. 1.14 – Illustration du critère des séries alternées.

■

Exemple. La série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est donc convergente. C'est un exemple typique de série semi-convergente. On peut montrer que sa somme est $-\ln 2 \approx -0.693$ (voir l'exercice "Série harmonique alternée"). La convergence est illustrée Figure 1.6.

Exercice. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ est convergente.

Mieux, si la série $\sum(-1)^n a_n$ vérifie le critère des séries alternées, on a une majoration très simple du reste de la série.

Proposition 1.13 (Reste d'une série alternée)
Si la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ vérifie le critère des séries alternées, alors le reste à l'ordre N est majoré par le premier terme négligé : $|r_N| \leq a_{N+1}$.

Preuve. Puisque (s_{2N}) est décroissante et (s_{2N+1}) est croissante, on a pour tout N : $s_{2N+1} \leq s \leq s_{2N}$, d'où l'on déduit que :

$$-a_{2N+1} = s_{2N+1} - s_{2N} \leq r_{2N} = s - s_{2N} \leq 0.$$

De même, l'inégalité : $s_{2N+1} \leq s \leq s_{2N+2}$ donne :

$$0 \leq r_{2N+1} = s - s_{2N+1} \leq s_{2N+2} - s_{2N+1} = a_{2N+2}.$$

Ainsi on obtient bien de façon générale : $\forall N,\ |r_N| \leq a_{N+1}$.

■

Remarque. La preuve montre même que r_N est du signe du premier terme négligé $(-1)^{N+1}a_{N+1}$. En cas de doute, le plus simple est de faire un dessin comme figure 1.14.

Application. L'erreur faite en remplaçant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ par la somme des 100 premiers termes est inférieure à 10^{-4}.

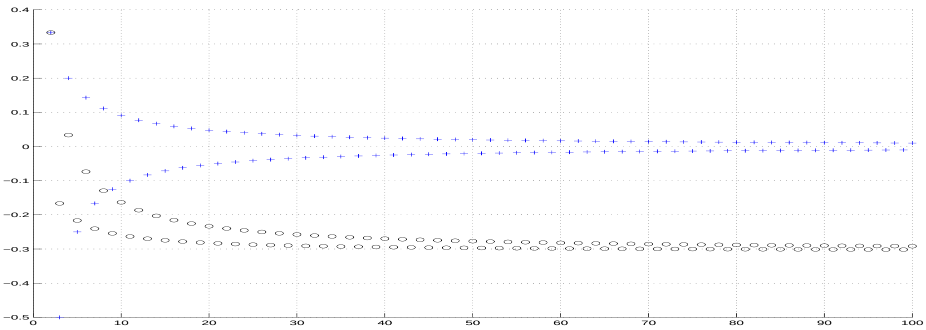

FIG. 1.15 – Suite $(\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n})_{n\geq 2}$ et série associée.

Nota Bene. Pour pouvoir appliquer le critère des séries alternées, il est essentiel que la suite (a_n) elle-même soit décroissante : il ne suffit pas qu'un équivalent le soit. Par exemple, la série $\sum(-1)^n a_n = \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est alternée, avec $a_n \sim \frac{1}{n}$ et $(\frac{1}{n})$ décroissante vers zéro. Mais (a_n) n'est pas décroissante puisque $a_{2n+1} = \frac{1}{2n} \geq a_{2n} = \frac{1}{2n+1}$: on ne peut appliquer directement le critère des séries alternées (voir figure 1.15). Néanmoins, par un développement limité en $\frac{1}{n}$ de $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$, on montre que la série est bien convergente (voir l'exercice 1.24 "Série alternée sans critère").

1.4.3 Techniques classiques

a - Développements asymptotiques

Dans de nombreuses situations, on conclut sur la nature d'une série en se ramenant à une série plus simple. On a vu que pour les séries à termes positifs, il suffit de se ramener à un équivalent. Ceci n'est plus le cas avec des séries à termes quelconques (penser au contre-exemple donné dans l'exercice "Equivalents de signes alternés"). Par ailleurs, un équivalent correspond à une approximation au premier ordre, laquelle ne permet pas forcément de conclure.

Dans ces deux situations, il suffit souvent d'écrire un développement asymptotique du terme général, c'est-à-dire d'être plus précis dans l'approximation. Celui-ci est généralement en $\frac{1}{n}$ ou en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et s'arrête au premier terme absolument convergent, en $\frac{1}{n^2}$ ou $\frac{1}{n^{3/2}}$.

Exemples :

1. La série $\sum_{n\geq 2}\ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ est divergente. En effet, on sait que pour x voisin de 0 :

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + x^3\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Puisque $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$, on en déduit :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{3n^{3/2}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{3/2}},$$

avec $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente par le critère des séries alternées, les séries $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{3n^{3/2}}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon_n}{n^{3/2}}$ sont absolument convergentes par le critère de Riemann, mais $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n}$ est divergente par ce même critère. Il s'ensuit que $\sum_{n\geq 2}\ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ est

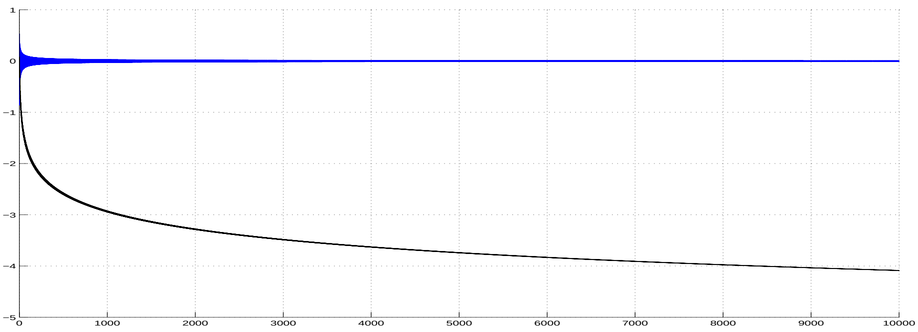

FIG. 1.16 – Suite $(\ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}))_{n\geq 2}$ et série associée.

divergente. On en déduit plus précisément que la série diverge vers moins l'infini à la vitesse $-\frac{1}{2}\ln N$, ce qu'illustre la figure 1.16.

2. La série $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1}(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin\frac{1}{n})$ est absolument convergente. Au voisinage de 0 : $\sin x = x + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, donc $\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\varepsilon_n$, et par suite :
$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n^{3/2}}\varepsilon_n,$$
c'est-à-dire que $u_n = o(\frac{1}{n^{3/2}})$. Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ est absolument convergente par le critère de Riemann, donc la série qui nous intéresse l'est aussi. Les restes r_N tendent vers zéro plus vite que $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Rappel. Presque tous les développements limités classiques au voisinage de 0 se déduisent des trois développements suivants :
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x),$$
dont on déduit les développements limités de $\cos x$, $\sin x$, $\cosh x$, $\sinh x$, etc.
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x),$$
dont on déduit les développements limités de $\frac{1}{1\pm x^\alpha}$, $\ln(1\pm x^\alpha)$, $\arctan x$, etc.
Celui-ci peut d'ailleurs être vu comme un cas particulier du développement limité de la fonction puissance :
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

b - Groupements de termes

Considérons une série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ dont on veut déterminer la nature. On commence par s'assurer que le terme général (u_n) tend vers zéro, sinon la série est trivialement divergente. Ceci fait, il faudrait montrer que la suite (s_N) des sommes partielles est convergente, ce qui n'est pas toujours facile. En particulier, il est parfois plus simple de montrer qu'une sous-suite de (s_N)

converge, par exemple en effectuant des regroupements de termes, et de conclure ensuite.

Cadre typique d'application : on réussit à montrer que (s_{2N}) converge, disons vers s. Alors pour la sous-suite (s_{2N+1}), il suffit d'écrire :

$$s_{2N+1} = s_{2N} + u_{2N+1},$$

et si la série ne diverge pas trivialement, on a $\lim_{N\to\infty} s_{2N+1} = \lim_{N\to\infty} s_{2N} = s$, c'est-à-dire que $\lim_{N\to\infty} s_N = s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: la série converge.

Exemple. Dans l'exercice intitulé "Convergence de la série harmonique alternée", en notant $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, on commence par prouver que la sous-suite (s_{2N}) converge vers $\ln 2$. La convergence de la série découle alors directement de l'argument ci-dessus.

1.4.4 Transformation d'Abel

Théorème 1.5 (Critère d'Abel)
Soit la série $\sum a_n b_n$. Si la suite (a_n) décroît vers 0 et si les sommes partielles de la série $\sum b_n$ sont bornées alors $\sum a_n b_n$ converge.

Remarque. Dire que les sommes partielles de la série $\sum b_n$ sont bornées signifie qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall N \geq 0 \qquad \left|\sum_{n=0}^{N} b_n\right| \leq M.$$

Si par exemple $b_n = \sin n$, on montre que :

$$B_N = \sum_{n=0}^{N} \sin n = \frac{\sin \frac{N}{2} \sin \frac{N+1}{2}}{\sin \frac{1}{2}},$$

d'où l'on déduit que les sommes partielles B_N sont bornées, avec :

$$\forall N \geq 0 \qquad |B_N| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}.$$

Preuve. Le résultat se montre en effectuant une transformation d'Abel : c'est l'analogue d'une intégration par parties pour les séries. En ce sens, notons :

$$\alpha_n = a_n - a_{n-1} \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

(α_n) peut être vu comme la dérivée de (a_n) et (B_n) comme la primitive de (b_n). Pour prouver que la série $\sum a_n b_n$ converge, puisqu'on n'a aucune idée de sa limite, on passe par le sacro-saint critère de Cauchy. Notons comme d'habitude $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n b_n$ les sommes partielles. Voici en quoi consiste l'affaire :

$$S_{N+p} - S_N = \sum_{n=N+1}^{N+p} a_n b_n = \sum_{n=N+1}^{N+p} a_n (B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=N+1}^{N+p} a_n B_n - \sum_{n=N+1}^{N+p} a_n B_{n-1}.$$

On réindexe alors la seconde somme :

$$S_{N+p} - S_N = \sum_{n=N+1}^{N+p} a_n B_n - \sum_{n=N}^{N+p-1} a_{n+1} B_n = a_{N+p} B_{N+p} - a_{N+1} B_N + \sum_{n=N+1}^{N+p-1} (a_n - a_{n+1}) B_n,$$

pour obtenir in fine :

$$S_{N+p} - S_N = a_{N+p}B_{N+p} - a_{N+1}B_N - \sum_{n=N+1}^{N+p-1} \alpha_{n+1}B_n.$$

C'est ce qu'on appelle une transformation d'Abel. On note M un majorant des $|B_N|$ et on utilise les hypothèses de positivité et de décroissance de (a_n) pour majorer :

$$|S_{N+p} - S_N| \leq a_{N+p}M + a_{N+1}M + \sum_{n=N+1}^{N+p-1} \alpha_{n+1}M,$$

or la dernière somme est télescopique, donc il reste simplement :

$$|S_{N+p} - S_N| \leq 2Ma_{N+p} \leq 2Ma_N,$$

par décroissance de la suite (a_n). Puisque (a_n) tend vers zéro, on en déduit que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0,\ \forall N \geq N_0 \qquad 0 < a_N < \frac{\varepsilon}{2M},$$

Ceci prouve que la suite (S_N) des sommes partielles vérifie le critère de Cauchy, donc que la série $\sum a_nb_n$ est convergente.

■

Remarque. La formule obtenue par transformation d'Abel :

$$\sum_{n=N+1}^{N+p} a_nb_n = a_{N+p}B_{N+p} - a_{N+1}B_N - \sum_{n=N+1}^{N+p-1} \alpha_{n+1}B_n$$

est à rapprocher de l'intégration par parties :

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

Exemple. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin \alpha n}{n}$ est convergente pour tout α (voir figure 1.17 avec $\alpha = 1$). Dans le cas particulier $\alpha = \pi$, on retrouve la convergence de la série harmonique alternée.

Remarques.
- Le critère des séries alternées $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ peut en fait se voir comme un cas particulier du critère d'Abel : avec $b_n = (-1)^n$, on a $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ qui vaut 0 ou 1, donc les sommes partielles sont bien bornées.
- Il existe un résultat analogue pour les intégrales du type $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$: si f décroît vers 0 et si les intégrales $\int_0^X g(x)\,dx$ sont bornées indépendamment de $X > 0$, alors l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ est convergente.

1.4.5 Produit de deux séries

Définition 1.10 (Produit de deux séries)
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries. La série produit $\sum w_n$ est définie par $w_n = \sum_{i=0}^n u_iv_{n-i}$.

Remarques.

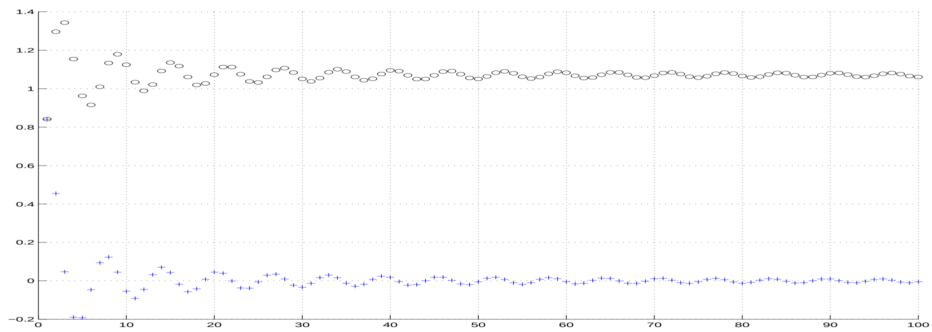

FIG. 1.17 – Application de la transformation d'Abel : suite $(\frac{\sin n}{n})_{n\geq 1}$ et série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$.

1. On l'appelle aussi produit de Cauchy ou produit de convolution des deux séries. Il faut bien sûr noter que le terme général w_n de la série produit n'est pas le simple produit terme à terme de u_n et v_n. Pour se souvenir de la définition de w_n, il suffit de penser au coefficient de X^n dans le produit de deux polynômes de coefficients u_n et v_n. Ceci deviendra tout à fait clair dans le chapitre sur les séries entières.
2. Si on considère des séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$ ne commençant pas à l'indice 0, il suffit de compléter les deux suites par $u_0 = v_0 = 0$, ce qui donne : $w_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_{n-i}$. Par exemple, le produit de la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ par elle-même est la série $\sum_{n\geq 0} w_n$, avec $w_0 = 0$ et $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}$.

Exemple. Si $u_n = v_n = 1/2^n$, alors $w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i} = \frac{n+1}{2^n}$.

Théorème 1.6 (Convergence d'une série produit)
Si les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum w_n$ est absolument convergente, avec l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Remarque. Ce résultat justifie l'appellation "série produit".

Preuve. On commence par traiter le cas où les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes à termes positifs. On note $\sum c_n$ la série produit. On utilise des majuscules pour les sommes partielles. La série $\sum c_n$ est clairement à termes positifs, donc pour établir sa convergence, il suffit de montrer que ses sommes partielles sont majorées, ou plus simple : que la sous-suite (C_{2N}) est majorée (rappelons qu'une suite croissante dont une sous-suite converge est convergente). Or on vérifie sans problème la double inégalité (voir figure 1.18) :

$$A_N \times B_N = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) \leq C_{2N} = \sum_{n=0}^{2N} c_n \leq A_{2N} \times B_{2N} = \left(\sum_{n=0}^{2N} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{2N} b_n\right).$$

Or, si N tend vers l'infini, les membres de gauche et de droite tendent vers la même limite. Ceci montre que la série $\sum c_n$ est convergente, de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

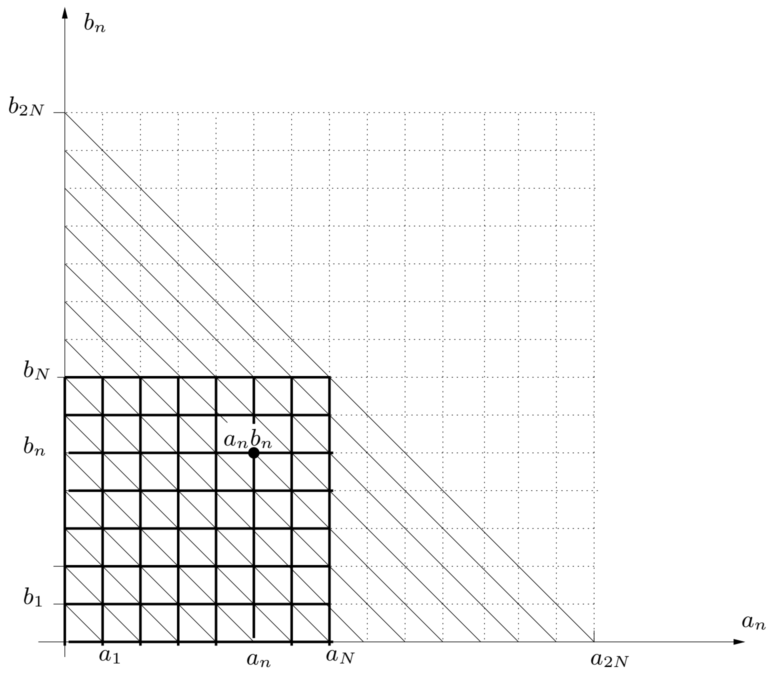

FIG. 1.18 – Illustration de l'inégalité : $A_N \times B_N \leq C_{2N} \leq A_{2N} \times B_{2N}$.

Le résultat est donc établi dans le cas de séries positives. Passons maintenant au cas général de séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes et notons :

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} |u_i| \cdot |v_{n-i}|.$$

Par le point précédent, $\sum c_n$ est convergente, avec l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|\right).$$

Considérons l'ensemble $\mathcal{T}_N = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq N, i+j > N\}$, alors on a :

$$\left|\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right) - \sum_{n=0}^{N} w_n\right| = \left|\sum_{(i,j)\in\mathcal{T}_N} u_i v_{n-j}\right| \leq \sum_{(i,j)\in\mathcal{T}_N} |u_i||v_{n-j}|.$$

Or on peut écrire :

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{T}_N} |u_i||v_{n-j}| = \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|\right) \times \left(\sum_{n=0}^{N} |v_n|\right) - \sum_{n=0}^{N} c_n,$$

quantité qui tend vers zéro, donc le terme de gauche de l'inégalité précédente aussi, et puisque les sommes partielles des u_n et des v_n convergent toutes deux, celles des w_n également, avec à la limite :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

■

Exemple. Si $u_n = v_n = 1/2^n$, on en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right)^2 = 4.$$

Remarques.

1. On peut en fait montrer mieux : il suffit que l'une des séries soit convergente et l'autre absolument convergente pour obtenir la convergence de la série produit, avec toujours la relation "somme de la série produit= produit des sommes".
2. Le produit de deux séries semi-convergentes peut être convergent ($u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n}$) ou divergent ($u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, voir l'exercice "Produit de séries semi-convergentes").

"C'est la vie, que voulez-vous, les chemins parfois se croisent et d'autres fois divergent et divergent, c'est beaucoup pour un seul homme..." Pierre Desproges, *Chroniques de la haine ordinaire*.

1.5 Exercices

Exercice 1.1 (Calculs de limites)
On rappelle qu'au voisinage de 0, on a $\ln(1+x) \sim x$ et $e^x \sim 1+x$. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.
2. $\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}$.
3. $\lim_{n\to\infty} n^2((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}})$.
4. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)$.
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

Exercice 1.2 (Utilisation de développements limités)
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

où a et b sont deux paramètres réels.

1. On fixe $a = b = 1$. Quelle est la limite de la suite ? Donner un équivalent.
2. On fixe $a = 1$ et $b = -3$. Mêmes questions.
3. On fixe $a = 1$ et $b = -2$. Mêmes questions.

Exercice 1.3 (Equivalents)
Donner des équivalents simples des suites :

$\frac{1}{\sqrt{n+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{n(n+\ln n)}}$	$\frac{1}{n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1})}$
$\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$	$\ln\frac{2+n^2}{1+n^2}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n\sqrt{n}}$
$n^2+300n+1000$	$n+(\ln n)^{2005}$	$n\ln n+e^n$
$e^{n+1+\frac{1}{n}}$	$1+\frac{\sin n}{n}$	$e^{-n}+1+\frac{2}{n}$
$\frac{n^3+2n^2+5}{n+\sin n}$	$\sin\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$
$\frac{\ln n}{n}$	$\cos\frac{1}{n}$	$\sinh n$
$\cosh\left(\frac{n+2}{n^2+5}\right)$	$\arctan\left(\frac{n^2+3}{n^3+\frac{1}{n}}\right)$	$\sin\left(\frac{2}{n^2}\right)\cos\left(\frac{1+n^2}{2+n^2}\right)$
n^2+2^n	$\frac{n^2+3^n}{n^3+2^n}$	$\ln(n^2+1)-\ln n$
$(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$	$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$\frac{1}{n}((1+n)^{1/3}-n^{1/3})$
$\frac{n^2+5n+3}{n!}$	$n^2+n\cos n$	$\ln\left(\frac{n^2+5n+3}{\ln n+\sqrt{n}}\right)$

Exercice 1.4 (Suite définie par récurrence)
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = \sqrt{2} \\ u_{n+1} & = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \geq 0 : u_n^2 < 4$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone (étudier par exemple le signe de $u_{n+1}^2 - u_n^2$).
3. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ? Si oui, calculer sa limite.
4. Retrouver graphiquement ce résultat en représentant la fonction $x \mapsto \sqrt{2+x}$.

Exercice 1.5 (Le principe de l'étau)
On définit la suite $(u_n)_{n>0}$ par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

1. Encadrer la suite (u_n) par deux suites (v_n) et (w_n) de même limite.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 1.6 (Flocon de Von Koch (1904))
Le flocon de Von Koch est un exemple de courbe fractale : on le construit itérativement à partir d'un triangle équilatéral et comme indiqué figure 1.19 pour les étapes 0, 1 et 2. Précisément, si on

note K_n l'intérieur du polygone obtenu à la n-ème itération, le flocon de Von Koch est défini par :

$$K = \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$$

1. Donner le nombre C_n et la longueur L_n des côtés du polygone à la n-ème étape (on suppose que le triangle équilatéral initial a pour côté 1). En déduire que le périmètre P_n tend vers l'infini.

2. Montrer qu'à l'étape n, la surface du polygone vaut :

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

   En déduire la surface du flocon de Von Koch.

Remarque : Les polygones successifs étant de surface croissante mais tous contenus dans le cercle circonscrit au triangle, on pouvait conclure directement sur le fait que le flocon est de surface finie.

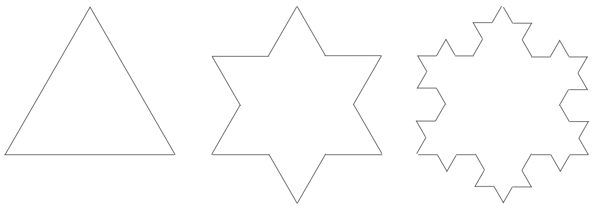

FIG. 1.19 – Premiers flocons

Exercice 1.7 (Convergence de suite via une série)

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec :

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln\frac{n-1}{n}.$$

2. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$, définie par :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

   Déduire de la question précédente que (v_n) admet une limite γ.

Corrigé

Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de décembre 2004.

Exercice 1.8 (Nombres rationnels et développement décimal)

1. On veut écrire le nombre $x = 0.777...$ sous la forme $\frac{p}{q}$.
   (a) Première méthode : comparer $10x - 7$ à x et en déduire x sous forme de fraction.
   (b) Seconde méthode : remarquer que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{10^n}$ et retrouver le résultat précédent grâce à une série géométrique.
2. Par l'une des deux méthodes ci-dessus, mettre sous forme de fraction le nombre $x = 0,4747....$

3. Mettre sous forme de fraction le nombre $x = 0,124747....$
4. De même, mettre sous forme de fraction le nombre $x = 5,124747....$ Ainsi, tout nombre x dont le développement décimal admet la répétition d'un motif à partir d'un certain rang (ce qu'on appelle une période) est un rationnel.
5. Réciproquement, on considère deux entiers naturels non nuls p et q premiers entre eux. En posant la division $\frac{p}{q}$ comme dans les petites classes, expliquer pourquoi le développement décimal de $\frac{p}{q}$ est forcément périodique.

Exercice 1.9 (Sommes de séries)

1. On veut connaître la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et sa somme éventuelle.
   (a) Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples, c'est-à-dire sous la forme :
   $$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}.$$
   (b) Voir alors que dans la somme partielle :
   $$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$
   des termes se télescopent, et en déduire une expression simple de S_N.
   (c) Montrer que la série est convergente et calculer sa somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
2. On étudie cette fois la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n}$.
   (a) En notant par exemple que $n = (n+1) - 1$, montrer que :
   $$S_N = 2S_{N+1} + \frac{1}{2^N} - 2.$$
   (b) Grâce à la relation liant S_N et S_{N+1}, en déduire que la série est convergente, de somme égale à 2.
3. On considère enfin la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos n}{2^n}$.
   (a) Notons $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\cos n}{2^n}$ et $T_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin n}{2^n}$. Remarquer que $S_N + iT_N$ est la somme des termes d'une suite géométrique.
   (b) En déduire que la suite à termes complexes $(S_N + iT_N)_{N\geq 0}$ est convergente, et calculer sa limite.
   (c) Montrer alors que :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{2^n} = \frac{4 - 2\cos 1}{5 - 4\cos 1}.$$

Exercice 1.10 (Série harmonique alternée)

On s'intéresse à la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, appelée série harmonique alternée.

1. Notons $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ses sommes partielles et $\sigma_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ celles de la série harmonique. Montrer que :
   $$S_{2N} = \sigma_{2N} - \sigma_N.$$

2. Grâce aux sommes de Riemann, montrer que :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.$$
3. En déduire que $\lim_{N\to+\infty} S_{2N} = \ln 2$.
4. Donner une relation simple liant S_{2N} et S_{2N+1}. En déduire $\lim_{N\to+\infty} S_{2N+1}$.
5. En déduire que la série harmonique modifiée est convergente. Est-elle absolument convergente ?
6. A est la somme de la série harmonique entre 1004 et 2007, c'est-à-dire $A = \frac{1}{1004}+\cdots+\frac{1}{2007}$. B est la somme de la série harmonique alternée entre 1 et 2007, c'est-à-dire $B = 1-\frac{1}{2}+\cdots-\frac{1}{2006}+\frac{1}{2007}$. Calculer $A-B$.
7. Montrer que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{4n-3}{6}\pi\right) = \frac{\ln 3}{2} = 0.5493...$$

Exercice 1.11 (Série harmonique modifiée)
On sait que la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente. On va montrer que si on supprime les entiers dont l'écriture décimale comporte le chiffre 0 (i.e. 10,20,...,90,100,101, etc.), alors cette série harmonique "modifiée" converge. On note : $\mathbb{N}_0 = \{1,2,3,\ldots,9,11,\ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels ainsi obtenu, et $S(N) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0, n\leq N}\frac{1}{n}$ les sommes partielles modifiées.
1. Caractériser l'écriture décimale d'un entier naturel n de l'ensemble $\mathbb{N}_0\cap]10^k,10^{k+1}]$. En déduire le cardinal de cet ensemble.
2. Montrer alors que :
$$S(10^{k+1}) - S(10^k) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0\cap]10^k,10^{k+1}]}\frac{1}{n} \leq \frac{9^{k+1}}{10^k}.$$
3. En déduire que $S(10^{k+1}) \leq 90$.
4. Conclure sur la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{n}$.

Exercice 1.12 (Natures de séries)
Préciser la nature de chacune des séries suivantes :

$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$	$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+\ln n)}}$	$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1})}$
$\sum_{n\geq 0}\frac{2n^2+3}{n^4-5}$	$\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{3^n}$	$\sum_{n\geq 0}\frac{5^n}{n^n}$
$\sum_{n\geq 1}(\frac{n}{n+1})^n$	$\sum_{n\geq 0}\frac{n+\sin n}{n^2+1}$	$\sum_{n\geq 0}(\sqrt{n^2+n}-n)$
$\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n}$	$\sum_{n\geq 1}\ln\frac{2+n^2}{1+n^2}$	$\sum_{n\geq 1}(1+\frac{1}{n})^{-n\sqrt{n}}$
$\sum_{n\geq 0}\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}$	$\sum_{n\geq 1}((1+\frac{1}{n^2})^n-1)$	$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
$\sum_{n\geq 1}\ln(n\sin\frac{1}{n})$	$\sum_{n\geq 1}\left(1-(\cos\frac{1}{n^2})^n\right)$	$\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)$
$\sum_{n\geq 2}\frac{1!+2!+\cdots+(n-1)!}{n!}$	$\sum_{n\geq 2}\frac{1!+2!+\cdots+(n-2)!}{n!}$	$\sum_{n\geq 1} n!\sin 1\sin\frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}\ldots\sin\frac{1}{n}$

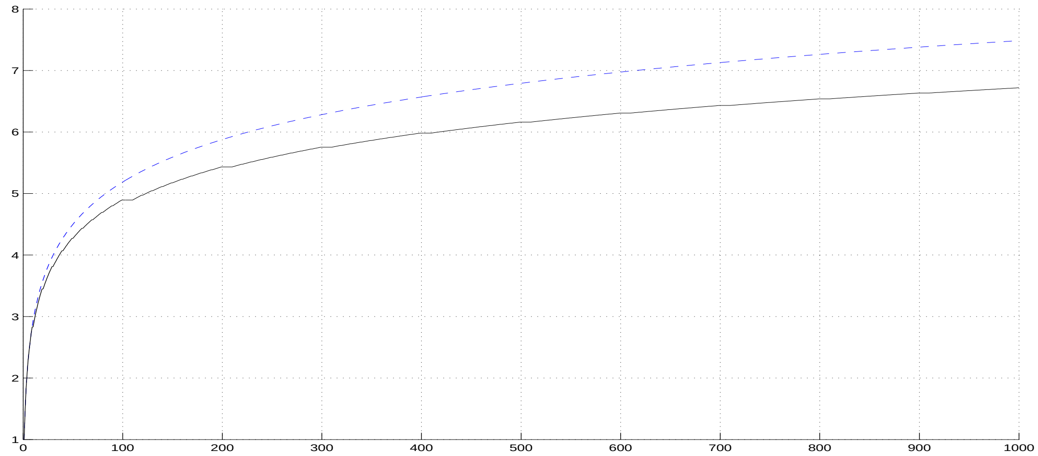

FIG. 1.20 – Série harmonique et série harmonique modifiée.

Exercice 1.13 (Somme de série)
On considère la série $\sum_{n\geq 2}\frac{n}{(n^2-1)^2}$.

1. Quelle est sa nature ?
2. Décomposer le terme général en fonction de $\frac{1}{(n+1)^2}$ et $\frac{1}{(n-1)^2}$.
3. En déduire la somme de la série.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet d'avril 2004.

Exercice 1.14 (Equivalent de la somme partielle)
On considère la fonction

$$F:\left\{\begin{array}{rl}[3,+\infty[& \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \ln(\ln x)\end{array}\right.$$

1. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}F(x)$. Quelle est la dérivée f de F ? Montrer que f est décroissante et positive sur $[3,+\infty[$.
2. On considère la série $\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n\ln n}$. Soit S_N la somme partielle d'ordre N. Encadrer S_N par deux intégrales.
3. En déduire un équivalent de S_N.
4. Répondre aux mêmes questions pour la série $\sum_{n\geq 3}\frac{\ln n}{n}$.

Corrigé
Ceci est un cocktail d'exercices corrigés en annexe, sujets d'avril 2004 et de janvier 2005.

Exercice 1.15 (Equivalent du reste)
On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$.

1. Préciser la nature de cette série.
2. Soit $N\geq 1$. Encadrer $R_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ par deux intégrales, et calculer ces intégrales.

3. Combien de termes suffit-il de prendre en compte dans la somme partielle pour obtenir une valeur approchée à 0.01 près de la somme de la série ?
4. Donner un équivalent de R_N.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de novembre 2005.

Exercice 1.16 (Produits infinis)
1. Soit la suite $(P_N)_{N\geq 1}$ définie par : $P_N = \prod_{n=1}^{N}(1+\frac{1}{n^2})$. Montrer qu'elle admet une limite quand N tend vers l'infini. Par analogie avec les séries numériques, on note :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{N\to\infty} P_N.$$

2. Généralisation : Soit (u_n) une suite de réels positifs. Montrer que le produit infini $\prod(1+u_n)$ est convergent si et seulement si la série $\sum u_n$ l'est.

Exercice 1.17 (Divergence de la série harmonique)
On considère des briques de même taille, de longueur unité. On rappelle la formule du barycentre, ou centre de gravité, G_n de n points M_i d'abscisses $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et de masse 1 :

$$X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

La propriété d'associativité assure que G_n est aussi le barycentre de M_n, d'abscisse x_n, affecté de la masse 1 et de G_{n-1}, barycentre des $(n-1)$ premiers points, affecté de la masse $(n-1)$, c'est-à-dire que $X_n = \frac{1}{n}((n-1)X_{n-1}+x_n)$.

1. On empile les briques (par en dessous !) de façon à être juste à l'équilibre (voir Figure 1.21). Déterminer les coordonnées successives des barycentres X_2, X_3, X_4 pour deux, trois, quatre briques.
2. Montrer par récurrence que le centre de gravité des n premières briques est $X_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$.
3. Conclure.

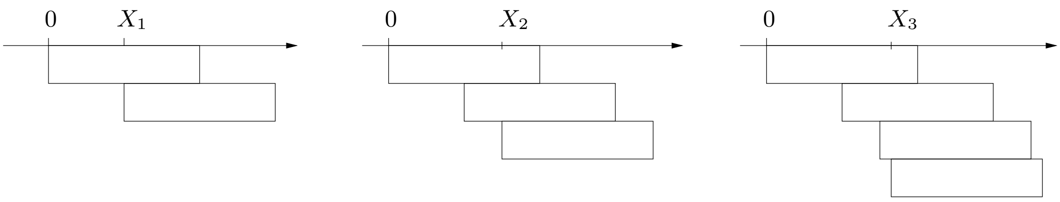

FIG. 1.21 – Début de l'empilement.

Exercice 1.18 (Natures de séries)
Préciser la nature de chacune des séries suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n} & \sum_{n\geq 1}(-1)^n \sin \frac{1}{n} & \sum_{n\geq 1}(-1)^n \cos \frac{1}{n} \\
\sum_{n\geq 2}(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} & \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln n} & \sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \\
\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n^{\cos n})}{\sqrt{n}} & \sum_{n\geq 1}(\arctan \frac{1}{n}) \sin n & \sum_{n\geq 1}(-1)^n (1-\cos \frac{1}{n})^n
\end{array}$$

Exercice 1.19 (Equivalents de signes alternés)
On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont équivalentes.
2. Montrer que les deux séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$ ne sont cependant pas de même nature.

Exercice 1.20 (Valeur approchée)
On considère la série :

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n \left(\sqrt{n^2+1}-n\right).$$

1. Montrer qu'elle est convergente. On note S sa somme.
2. Est-elle absolument convergente ?
3. Soit S_{49} la somme des 50 premiers termes de la série. Majorer l'erreur d'approximation $|S - S_{49}|$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de décembre 2004.

Exercice 1.21 (Comparaison à une série géométrique)
On considère la série $\sum_{n\geq 1} \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-n}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$: $0 < \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-1} \leq 0.6$. En déduire la convergence de la série.
2. Prouver la majoration suivante du reste R_N :

$$\forall N \geq 2 \qquad R_N \leq \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{N+1}.$$

3. Avec combien de termes dans la somme partielle est-on certain d'obtenir une valeur approchée à 10^{-6} près de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 1.22 (Problème de commutativité)
On a vu précédemment (cf l'exercice "Série harmonique alternée") que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2.$$

On va montrer que si on permute les termes de cette série, on peut converger vers une autre limite. Ceci signifie que le symbole de sommation dans l'expression $\sum_{n=0}^{+\infty} \ldots$ ne peut être considéré comme une somme classique. Considérons la série harmonique classique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, et notons s_N la somme partielle d'ordre N :

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}.$$

On rappelle que le parallèle série/intégrale permet d'obtenir le développement asymptotique de la suite (s_N) :

$$s_N = \ln N + \gamma + \varepsilon_N,$$

où $\gamma \approx 0.577$ est la constante d'Euler et (ε_N) une suite tendant vers zéro.

1. L'idée est de permuter les termes la série harmonique alternée de sorte que deux termes positifs soient suivis d'un terme négatif, ceci indéfiniment. On note σ_N la somme partielle d'ordre N de la série ainsi formée. On a donc :
$$\sigma_{3N} = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4N-3} + \frac{1}{4N-1} - \frac{1}{2N}\right).$$
Montrer que :
$$\sigma_{3N} = s_{4N} - \frac{1}{2}(s_{2N} + s_N).$$
2. En déduire la limite de (σ_{3N}), puis que la somme de la série permutée est $\frac{3}{2}\ln 2$, et non $\ln 2$.
3. Montrer que si on alterne deux termes négatifs avec un terme positif, la série obtenue tend cette fois vers $\frac{1}{2}\ln 2$.

Exercice 1.23 (Développement asymptotique)
Soit a et b deux réels. On considère la série numérique :

$$\sum_{n\geq 1}(\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)).$$

1. Donner un développement asymptotique du terme général de cette série sous la forme :
$$\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) = \alpha \ln n + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
où α, β et γ sont des réels à déterminer en fonction de a et b.
2. En déduire les valeurs de a et b pour que la série converge.
3. Pour ces valeurs de a et b, calculer alors $S_N = \sum_{n=1}^{N}(\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2))$.
4. En déduire la somme de la série.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de juin 2004.

Exercice 1.24 (Série alternée sans critère)
On considère la série numérique :

$$\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}.$$

1. Cette série est-elle absolument convergente ?
2. Est-ce une série alternée ? Pourquoi ne peut-on lui appliquer le critère des séries alternées ?
3. Donner un développement asymptotique de $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ et conclure quant à la nature de la série.
4. Soit S_N la somme partielle d'ordre N de cette série. Montrer que $S_{2N+1} = -\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k(2k+1)}$.
5. Donner la nature de la série :
$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2k(2k+1)}.$$
Retrouver la nature de la série $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$. Comment s'appelle cette méthode pour déterminer la nature d'une série ?

Corrigé

1. Cette série n'est pas absolument convergente puisque :
$$\left|\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}\right| = \frac{1}{n+(-1)^n}\sim\frac{1}{n},$$
et que la série $\sum\frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.
2. C'est une série alternée, car de la forme $\sum(-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{n+(-1)^n} > 0$ pour tout $n\geq 2$. Cependant on ne peut lui appliquer le critère des séries alternées puisque la suite (a_n) n'est donc pas décroissante :
$$\forall n\geq 1 \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{2n}\geq a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$
3. Un développement asymptotique de $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est :
$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$
c'est-à-dire que le terme général de la série est la somme des trois termes $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = -\frac{1}{n^2}$ et $c_n = o(\frac{1}{n^2})$. La série $\sum a_n$ est convergente par le critère des séries alternées, la série $\sum b_n$ est convergente par le critère de Riemann et la série $\sum c_n$ est convergente a fortiori. Par conséquent, la série initiale est convergente.
4. On a :
$$S_{2N+1} = \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{2N},$$
ce qui s'écrit encore :
$$S_{2N+1} = -\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right) = -\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k(2k+1)}.$$

5. La série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2k(2k+1)}$ est convergente par le critère de Riemann puisque :

$$\frac{1}{2k(2k+1)} \sim \frac{1}{4k^2}.$$

La sous-suite (S_{2N+1}) de la suite des sommes partielles (S_N) est donc convergente. Par ailleurs, la sous-suite (S_{2N}) est également convergente de même limite puisque :

$$S_{2N} = S_{2N+1} + \frac{1}{2N} \xrightarrow[N\to\infty]{} \lim_{N\to\infty} S_{2N+1} + 0.$$

Les deux sous-suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) étant convergentes de même limite, la suite (S_N) des sommes partielles converge. En d'autres termes, la série $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est convergente. C'est la technique dite de groupement de termes.

Exercice 1.25 (La fonction exponentielle)
Soit a un réel. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{n!}$.

1. Justifier la convergence absolue de cette série. On appelle exponentielle du nombre a la somme de cette série :
$$e^a = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}.$$
2. Soit a et b deux réels. Soit $\sum_{n\geq 0} c_n$ la série obtenue en faisant le produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0}\frac{b^n}{n!}$. Calculer c_n en fonction de a, b et n.
3. En déduire la relation classique :
$$\forall a,b\in\mathbb{R} \qquad e^{a+b} = e^a\ e^b.$$
4. Montrer que ces résultats s'appliquent encore si on remplace "$x\in\mathbb{R}$" par "$z\in\mathbb{C}$". Ceci permet de définir l'exponentielle d'un nombre réel ou complexe comme somme d'une série numérique.
5. On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on note $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$, si X est valeurs dans $\mathbb{N}$, avec :
$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(X=n) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}.$$
Soit $X\sim\mathcal{P}(\alpha)$ et $Y\sim\mathcal{P}(\beta)$, avec α et β strictement positifs. Notons $Z = X+Y$ la variable aléatoire somme. Supposons X et Y indépendantes. Montrer que :
$$Z\sim\mathcal{P}(\alpha+\beta).$$

Corrigé

1. Si $a=0$, la série est nulle donc clairement convergente. Pour tout réel a non nul fixé, on peut appliquer le critère de d'Alembert :
$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1,$$
donc la série $\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{n!}$ est absolument convergente.

2. On obtient par définition du produit de Cauchy de deux séries :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

et on reconnaît la formule du binôme de Newton :

$$c_n = \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

3. Les deux séries $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{b^n}{n!}$ étant absolument convergentes, on en déduit que $\sum_{n\geq 0} c_n$ est absolument convergente, avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = e^a\ e^b.$$

Par ailleurs, on a vu que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b},$$

par définition de l'exponentielle dans la première question.

4. On en déduit que pour tous réels a et b, on a :

$$e^{a+b} = e^a\ e^b.$$

5. Soit z un nombre complexe. Si $z = 0$, cf première question. Si $z \neq 0$, on applique à nouveau le critère de d'Alembert, la valeur absolue étant remplacée par le module :

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1.$$

Exercice 1.26 (Produit convergent de séries semi-convergentes)
On considère la série :

$$\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Notons $\sum_{n\geq 1} c_n$ le produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} a_n$ par elle-même.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} a_n$ est semi-convergente.
2. Exprimer le terme général c_n.
3. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$ et en déduire que :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\} \qquad |c_n| = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

4. Via le lien série/intégrale, donner un équivalent de :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

En déduire $\lim_{n\to\infty} |c_n|$.

5. Montrer la relation :
$$|c_n| - |c_{n+1}| = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}.$$
En déduire que la suite $(|c_n|)_{n\geq 1}$ est décroissante.
6. Conclure sur la nature de la série $\sum_{n\geq 1} c_n$.

Corrigé

1. La série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est convergente par le critère des séries alternées, mais pas absolument convergente puisque la série harmonique est divergente.
2. Pour tout $n \geq 2$, on obtient : $c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}$.
3. La décomposition en éléments simples donne : $\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n}(\frac{1}{X} + \frac{1}{n-X})$. On en déduit que :
$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right).$$
Mais les deux sommes sont identiques donc :
$$c_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$
4. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue décroissante positive sur $[1, +\infty[$, donc série et intégrale ont même nature, i.e. divergentes, avec :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sim \int_1^{n-1} \frac{dx}{x} = \ln(n-1).$$
Ainsi on a :
$$c_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sim \frac{\ln(n-1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
5. On calcule :
$$|c_n| - |c_{n+1}| = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$
qui s'écrit encore :
$$|c_n| - |c_{n+1}| = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - 1\right].$$
Ainsi :
$$|c_n| - |c_{n+1}| = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \geq 0,$$
et la suite $(|c_n|)_{n\geq 1}$ est bien décroissante.
6. La série $\sum_{n\geq 1} c_n = \sum_{n\geq 1} (-1)^n |c_n|$ vérifie le critère des séries alternées donc elle est convergente. On a ainsi montre que le produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes **peut être** convergent.

Exercice 1.27 (Produit divergent de séries semi-convergentes)
On considère la série :

$$\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Notons $\sum_{n\geq 1} c_n$ le produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} a_n$ par elle-même.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} a_n$ est semi-convergente.
2. Exprimer le terme général c_n.
3. Montrer que :
$$\forall k \in \{1,\dots,n-1\} \qquad \sqrt{k}\sqrt{n-k} \leq n.$$
4. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} c_n$ est trivialement divergente.

Corrigé

1. La série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est convergente par le critère des séries alternées, mais pas absolument convergente puisque la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.
2. Pour tout $n \geq 2$, on obtient : $c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$.
3. Pour tout $k \in \{1,\dots,n-1\}$:
$$\sqrt{k}\sqrt{n-k} \leq \sqrt{n}\sqrt{n} = n.$$
4. On a donc :
$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$
Donc il est clair qu'on ne peut avoir $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\geq 1} c_n$ est trivialement divergente. On a ainsi montre que le produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes **peut être** divergent.

Exercice 1.28 (Lemme de Kronecker)
Le but de cet exercice est de montrer un résultat dû à Kronecker et utile en probabilités pour prouver, par exemple, certaines versions de la loi forte des grands nombres. Il utilise un résultat de convergence en moyenne pour les suites, que l'on commence par rappeler.

1. Montrer le Théorème de Césaro : soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique convergente, de limite L, alors la suite $(m_n)_{n\geq 1}$ des moyennes :
$$m_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$
tend vers la même limite L (on dit aussi qu'elle converge au sens de Césaro).
2. Montrer sur un exemple que la réciproque est fausse : une suite peut converger au sens de Césaro sans converger au sens usuel.
3. En déduire le Lemme de Kronecker : si la série $\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$ est convergente, alors la suite (m_n) tend vers zéro.
Indication : en notant
$$S_0 = 0 \qquad\qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$$
les sommes partielles de la série, observer que $u_k = k(S_k - S_{k-1})$, puis se ramener à la première question.

Exercice 1.29 (Point milieu et valeur approchée)
Considérons la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$.

1. Justifier la convergence de cette série. Notons S_N la somme partielle des N premiers termes, S la somme de la série et $R_N = S - S_N$ le reste à l'ordre N.
2. Via le lien série/intégrale, établir : $\frac{1}{2(N+1)^2} \leq R_N \leq \frac{1}{2N^2}$. En déduire un équivalent de R_N.
3. En déduire que $S_N + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N+1)^2}\right)$ est une valeur approchée de la somme S à $\frac{1}{2N^3}$ près.
4. En déduire le nombre de termes à prendre en compte pour obtenir une valeur approchée de S à 10^{-8} près.

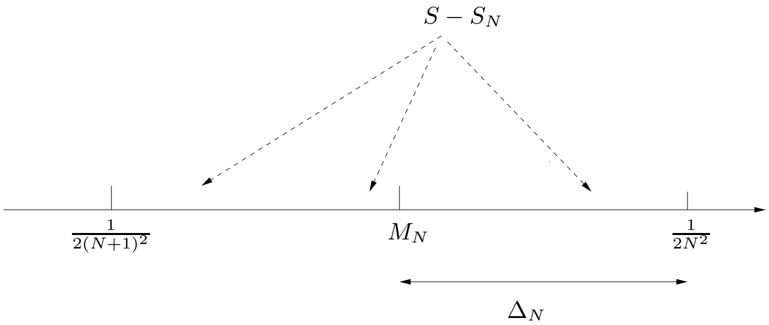

Fig. 1.22 – Point milieu et valeur approchée.

Corrigé

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de type Riemann avec $\alpha = 3 > 1$ donc elle est convergente.
2. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ donc on peut appliquer le théorème sur le lien série/intégrale :
$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \leq R_N \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx.$$
Ce qui donne :
$$\frac{1}{2(N+1)^2} \leq R_N \leq \frac{1}{2N^2}.$$
On en déduit un équivalent du reste :
$$R_N \sim \frac{1}{2N^2}.$$
3. D'après la question précédente, on a :
$$\frac{1}{2(N+1)^2} \leq S - S_N \leq \frac{1}{2N^2}.$$
Ainsi le nombre $(S - S_N)$ est dans l'intervalle $[\frac{1}{2(N+1)^2}, \frac{1}{2N^2}]$. Par conséquent le milieu M_N de l'intervalle est une valeur approchée de $(S - S_N)$ au rayon près Δ_N de cet intervalle (voir Figure 1.22). C'est encore dire que $S_N + M_N$ est une valeur approchée de S à Δ_N près.

Or on a d'une part :
$$M_N = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(N+1)^2} + \frac{1}{2N^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{N^2}\right),$$

et d'autre part :

$$\Delta_N = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2N^2} - \frac{1}{2(N+1)^2}\right) = \frac{(N+1)^2 - N^2}{4N^2(N+1)^2} = \frac{1}{2N^2(N+1)} \leq \frac{1}{2N^3}.$$

On en déduit le résultat attendu.

4. La question précédente permet d'approcher de S via les sommes partielles avec une majoration de l'erreur faite. Pour avoir une erreur inférieure à 10^{-8}, il suffit de prendre N tel que :
$$\frac{1}{2N^3} \leq 10^{-8} \Leftrightarrow N \geq (5 \cdot 10^7)^{1/3} \approx 368.4,$$
c'est-à-dire $N \geq 369$. On a alors : $S_{369} + \frac{1}{4}(\frac{1}{369^2} + \frac{1}{370^2})$ qui est une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ à 10^{-8} près.

Exercice 1.30 (Natures de séries)
On rappelle que $e \approx 2.72$. Etudier la nature de chacune des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$;
2. $\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n^2+n} - n)$;
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{2\times 4\times\cdots\times 2n}$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de novembre 2006.

Exercice 1.31 (Valeur approchée et équivalent)
On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que cette série est convergente.
2. Combien de termes faut-il prendre en compte dans la somme partielle pour obtenir une valeur approchée à 10^{-2} près de la somme de la série.
3. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est-elle absolument convergente ?
4. Donner un équivalent de $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de novembre 2006.

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

Introduction

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de même domaine de définition. On s'intéresse dans un premier temps à la convergence de cette suite vers une nouvelle fonction f et aux propriétés dont f hérite. On applique ensuite ces idées aux séries de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.

2.1 Suites de fonctions

Dans la suite, les fonctions f_n sont supposées définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$.

2.1.1 Convergence simple

Définition 2.1 (Convergence simple)
On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement, ou ponctuellement, vers f si pour tout x de I, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(x)$. Autrement dit

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Exemples.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ est définie par :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x}{n} \end{cases}$$

   On voit que pour tout réel x, $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$, c'est-à-dire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle (figure 2.1 à gauche).

2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ est définie par :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \end{cases}$$

   Fixons le réel positif x : on a

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)},$$

   et par l'équivalent classique au voisinage de 0 : $\ln(1+u) \sim u$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^x,$$

   c'est-à-dire que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction exponentielle (figure 2.1 à droite).

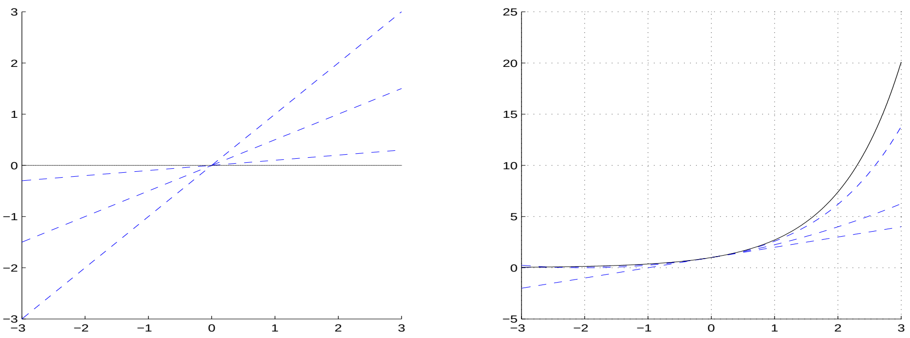

FIG. 2.1 – Fonctions f_1, f_2, f_{10} et la limite simple f.

Remarque. La convergence simple est souvent facile à établir, mais elle ne conserve pas certaines propriétés des fonctions (continuité, aspect borné, intégrabilité), comme le montrent les exemples suivants.

Exemples :

1. Continuité
$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n \end{array} \right.$$
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction
$$f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{array} \right.$$
Ainsi les f_n sont toutes continues sur $[0,1]$, mais f ne l'est pas (figure 2.2 à gauche).
2. Aspect borné
$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll}]0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} n & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction
$$f : \left\{ \begin{array}{ll}]0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{array} \right.$$
Bilan : chacune des fonctions f_n est bornée sur $]0,1]$, mais f ne l'est pas (figure 2.2 au centre).
3. Intégration
$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto n^2 x^n (1-x) \end{array} \right.$$
On vérifie aisément que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$ (figure 2.2 à droite), dont l'intégrale sur ce segment vaut 0. Pourtant :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1 \neq 0.$$

Ainsi la convergence simple ne conserve pas les propriétés des fonctions : ceci justifie la définition d'une nouvelle forme de convergence, plus difficile à vérifier, mais valide pour les passages à la limite.

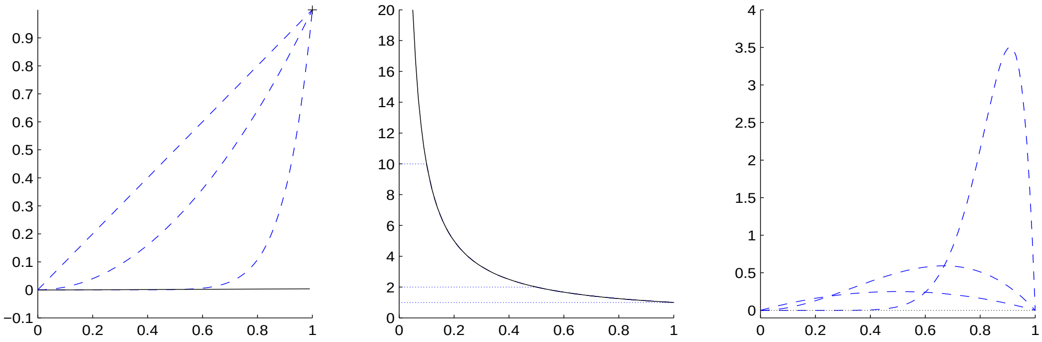

FIG. 2.2 – Fonctions f_1, f_2, f_{10} et la limite simple f.

2.1.2 Convergence uniforme

Définition 2.2 (Convergence uniforme)
On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \ \forall x \in I \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

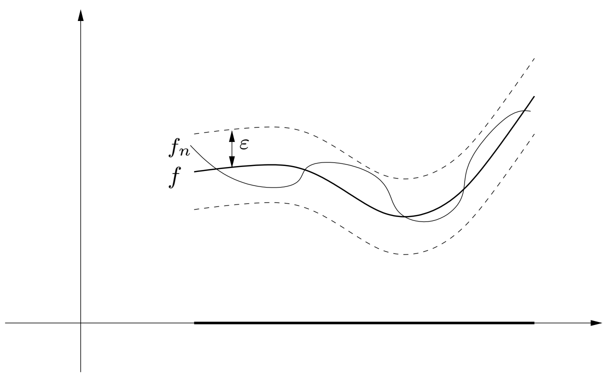

FIG. 2.3 – Convergence uniforme vers f

Remarques.
- La convergence uniforme signifie que pour n assez grand, on est assuré d'être dans un tube de rayon ε autour de f (voir figure 2.3).
- Si on compare les définitions avec quantificateurs logiques des convergences simple et uniforme, on voit que la seule différence se situe dans la position de la variable x. Dans le premier cas, le n_0 dépend de ε et de x, tandis que dans le second il ne dépend que de ε. Penser à la différence entre continuité et uniforme continuité d'une fonction. En particulier, la convergence uniforme est plus forte que la convergence simple.

Proposition 2.1 (Convergence uniforme ⇒ Convergence simple)
Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f.

Méthode. Pour étudier la convergence d'une suite de fonctions (f_n), on commence par la convergence simple : à x fixé, trouver la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Si cette limite existe pour tout x, notons la $f(x)$, il y a convergence simple vers la fonction f. Il faut alors étudier la suite (M_n) définie par $M_n = \sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)|$. La détermination de M_n peut passer par l'étude des variations

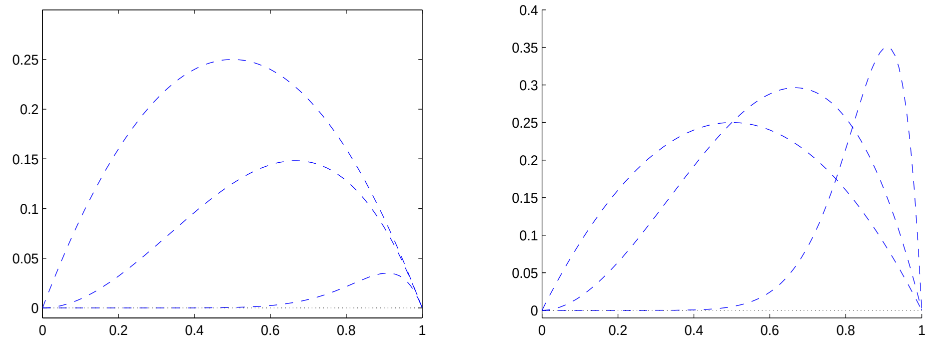

FIG. 2.4 – Fonctions f_1, f_2, f_{10} et la limite f.

de f_n. Si (M_n) tend vers zéro, la convergence est uniforme, sinon elle ne l'est pas.

Exemples :

1. Convergence uniforme
$$f_n : \left\{ \begin{array}{rl} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n(1-x) \end{array} \right.$$
Il est clair que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Pour déterminer $M_n = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x)$, on étudie les variations de f_n :
$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x),$$
donc f_n est croissante de 0 à $\frac{n}{n+1}$ et décroissante ensuite. Elle admet son maximum au point $\frac{n}{n+1}$, c'est-à-dire :
$$0 \leq M_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \leq 1 - \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
Et (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$ (figure 2.4 à gauche).
2. Convergence simple, non uniforme
$$f_n : \left\{ \begin{array}{rl} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto nx^n(1-x) \end{array} \right.$$
A nouveau, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Mais on a cette fois :
$$M_n = \sup_{0\leq x\leq 1} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}.$$
Il y a convergence simple, mais non uniforme, de la suite (f_n) vers la fonction nulle (figure 2.4 à droite).

Contrairement à la convergence simple, la convergence uniforme conserve les bonnes propriétés des fonctions. C'est ce que nous allons montrer dans la suite de ce paragraphe.

Rappel. Soit E un espace vectoriel réel. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés de séparabilité, d'homogénéité et d'inégalité triangulaire. Dans $\mathbb{R}^n$, on définit par exemple la norme infinie d'un vecteur $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$ par $||x||_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$. On a une norme comparable sur l'espace des fonctions bornées.

Définition 2.3 (Norme infinie)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $B(I,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$. L'application

$$||.||_\infty : \left\{ \begin{array}{ll} B(I,\mathbb{R}) & \to \mathbb{R}^+ \\ f & \mapsto ||f||_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)| \end{array} \right.$$

est une norme sur cet espace, appelée norme infinie, ou norme du sup.

Si les fonctions f_n et f sont bornées, dire que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f est donc exactement dire que $\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_\infty = 0$, ou encore : dans l'espace $B(I,\mathbb{R})$ muni de la norme infinie, la suite (f_n) tend vers f (figure 2.5).

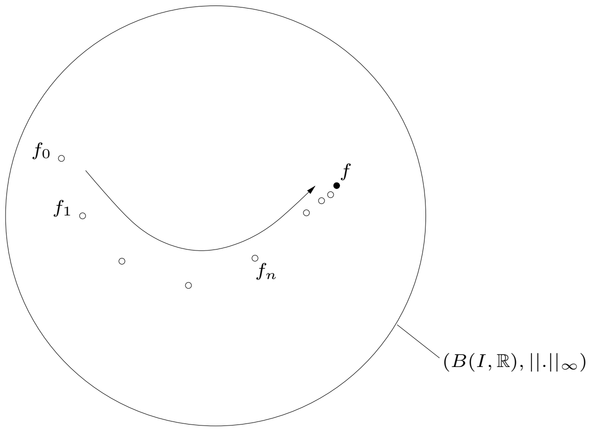

Fig. 2.5 – "Baby keep smiling, you know the sun is shining..." Lou Bega.

On peut maintenant se poser la question suivante : si les f_n sont bornées et qu'elles convergent uniformément, est-ce que la fonction limite l'est ? La réponse est oui.

Proposition 2.2 (f_n bornées $\Rightarrow$ f bornée)
Si les fonctions f_n sont bornées sur I et convergent uniformément vers f, alors f est bornée.

Preuve. Dans la définition de la convergence uniforme, prenons $\varepsilon = 1$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in I \qquad |f(x) - f_n(x)| < 1,$$

or f_{n_0} est bornée par hypothèse, disons par M, donc en appliquant l'inégalité triangulaire, on a pour tout x de I :

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq M + 1,$$

c'est-à-dire que f est bornée par $M + 1$.

■

Passons à la continuité.

Proposition 2.3 (f_n continues $\Rightarrow$ f continue)
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, avec f_n continue pour tout n, alors f est continue sur I.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in I$ fixés. Par convergence uniforme des f_n :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in I \qquad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

et par continuité de f_{n_0} en x_0 :

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon.$$

D'où par inégalité triangulaire :

$$\forall x \in I,\ |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)| \leq 3\varepsilon,$$

c'est-à-dire que f est continue en x_0. Le point x_0 étant arbitraire, f est continue sur I.

■

Remarques :

– Ce résultat est souvent utile sous forme contraposée : si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction non continue, la convergence n'est pas uniforme (cf l'exemple étudié précédemment : $x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$).

– On peut le voir comme une interversion de limites, puisqu'on a montré que :

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

– On montre de même que si les f_n sont uniformément continues et convergent uniformément vers f, alors f est uniformément continue.

Pour l'intégrabilité, on doit prendre quelques précautions quant à l'intervalle d'intégration.

Proposition 2.4 (Intégrabilité)
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur l'intervalle borné I, avec f_n intégrable pour tout n, alors f est intégrable sur I et :

$$\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx.$$

Preuve. Pour simplifier, on suppose les f_n continues, ce qui sera généralement le cas, et que l'intervalle $I = [a,b]$ est fermé (i.e. on ne démontre pas le résultat pour les intégrales généralisées). Puisqu'il y a convergence uniforme, f est elle aussi continue, donc intégrable. Soit comme d'habitude $\varepsilon > 0$ fixé, alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in I \qquad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

On intègre membre à membre pour en déduire que pour tout $n \geq n_0$:

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \leq \varepsilon(b-a),$$

et puisque :

$$\left|\int_a^b (f(x) - f_n(x))\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx,$$

on en déduit que :

$$|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx| \leq \varepsilon(b-a),$$

quantité arbitrairement petite, donc on a bien :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

■

Remarques :
- En bref, on a passé la limite sous le signe somme :
$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx=\int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$
- Ce résultat s'applique typiquement lorsque les f_n sont continues sur $[a,b]$, mais n'exclut nullement les intégrales généralisées, pour peu que l'intervalle soit borné (c'est-à-dire I de la forme $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$). Si I est de longueur infinie, ça peut partir en sucette, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,+\infty[$ comme représentées figure 2.6
$$f_n : x\mapsto \begin{cases} x/n^2 & \text{si } 0\leq x\leq n\\ 2/n-x/n^2 & \text{si } n\leq x\leq 2n\\ 0 & \text{si } 2n\leq x\end{cases}$$
On voit que $||f_n||_\infty=\sup_{x\geq 0}|f_n(x)|=\frac{1}{n}$ donc (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle, pourtant la surface des triangles reste inchangée :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx=1,$$
et ne tend pas vers $\int_0^{+\infty}0\,dx=0$.

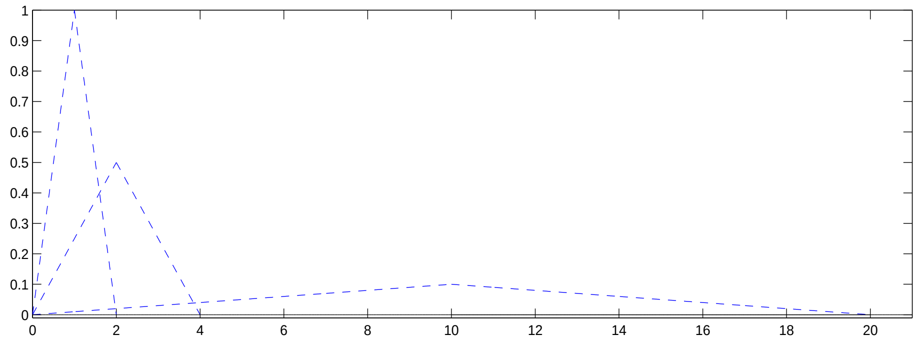

Fig. 2.6 – Fonctions f_1, f_2, f_{10} et la limite f.

Remarque. Les théorèmes les plus efficaces pour passer la limite sous le signe somme sont les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée. Ils relèvent de la théorie de l'intégration de Lebesgue, qui sera vue en Licence 3.

Pour la dérivation, les hypothèses sont moins simples.

Proposition 2.5 (Dérivabilité)
Si (f_n) converge simplement vers f sur l'intervalle I, avec f_n de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout n, et si (f_n') converge uniformément vers g, alors (f_n) converge uniformément vers f, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'=g$.

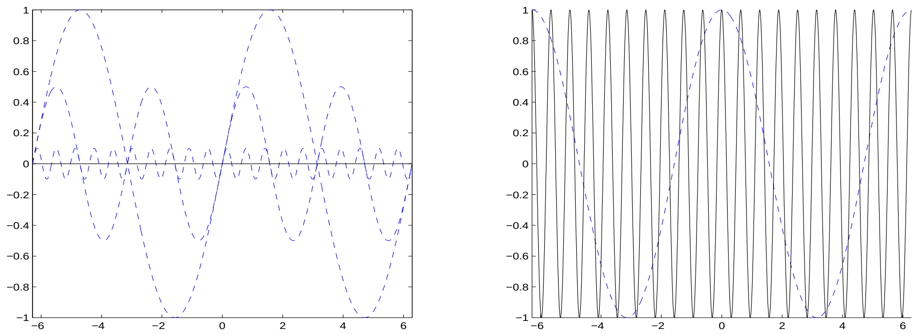

FIG. 2.7 – A gauche, f_1, f_2, f_{10} et la limite f. A droite, f_1' et f_{10}'.

Preuve. Prenons x dans l'intervalle I, alors il existe a et b tels que $a \leq x \leq b$ et $[a, b] \subseteq I$. La suite de fonctions (f_n') converge uniformément vers g donc g est continue, donc admet des primitives. En particulier, celle qui coïncide avec f en a s'écrit :

$$G(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

De la même façon, on peut écrire pour tout n :

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt,$$

mais alors :

$$|G(x) - f_n(x)| = \left| f(a) - f_n(a) + \int_a^x (g(t) - f_n'(t))\,dt \right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque (f_n) converge simplement vers f :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \qquad |f(a) - f_n(a)| < \varepsilon.$$

Puisque (f_n') converge uniformément vers g :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ \forall t \in [a, b] \qquad |g(t) - f_n'(t)| < \varepsilon.$$

Mais alors pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a :

$$|G(x) - f_n(x)| \leq (x - a + 1)\varepsilon \leq (b - a + 1)\varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, ceci montre que (f_n) converge uniformément vers G, qui est donc égale à f, et par suite f est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $f' = g$.

■

Remarques :

– la preuve montre qu'on peut remplacer l'hypothèse de convergence simple des f_n vers f sur I par la convergence en un seul point :

$$\exists x_0 \in I,\ \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

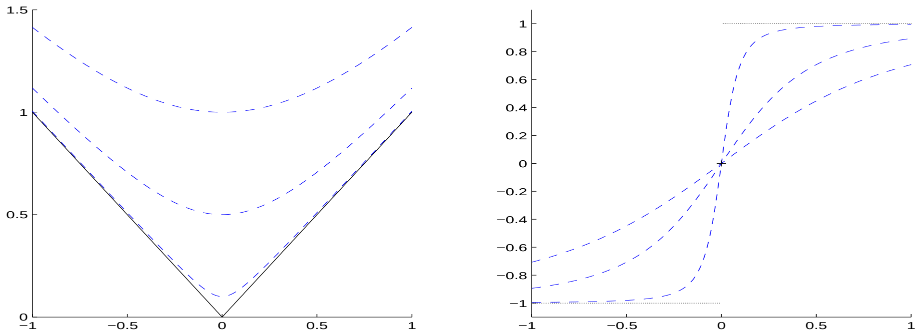

FIG. 2.8 – A gauche, fonctions f_1, f_2, f_{10} et la limite f. A droite, fonctions f_1', f_2', f_{10}' et limite g.

- Il importe de noter que la convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'implique pas la convergence de la suite des fonctions dérivées : sur $\mathbb{R}$, prenons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}\sin(nx)$. Il est clair que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Pourtant, si on dérive, on obtient $f_n' : x \mapsto \cos(nx)$. Or la suite numérique $(\cos nx)$ n'admet de limite que pour x congru à 0 modulo 2π. La suite (f_n') ne converge donc même pas simplement (voir figure 2.7).
- Notons aussi que la convergence uniforme d'une suite de fonctions n'implique pas la dérivabilité de la fonction limite. Sur $\mathbb{R}$, les fonctions (f_n) définies par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ sont dérivables en tout point. Pourtant, elles convergent uniformément vers la fonction valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0 (voir figure 2.8). Le premier exemple de fonction continue en tout point de $\mathbb{R}$, mais dérivable nulle part, était d'ailleurs construit à partir d'une suite de fonctions dérivables uniformément convergentes. Il a été donné par le mathématicien allemand Weierstrass en 1870.

Comme d'habitude, lorsqu'on ne dispose pas d'une forme explicite de la fonction limite, le critère de Cauchy est incontournable.

Proposition 2.6 (Critère de Cauchy uniforme)
Une suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme par rapport à x :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in I \ : \ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Il permet par exemple de montrer que l'escalier du diable est une fonction continue (cf exercice du même nom).

2.2 Séries de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle I et (s_N) la suite des sommes partielles, i.e. la suite de fonctions définie par :

$$\forall x \in I \qquad s_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$$

On s'intéresse dans cette section à la convergence de la suite de fonctions $(s_N)_{N\geq 0}$, c'est-à-dire à la série de fonctions $\sum f_n$. On effectue donc en quelque sorte un cocktail du chapitre sur les séries numériques et des résultats obtenus pour les suites de fonctions.

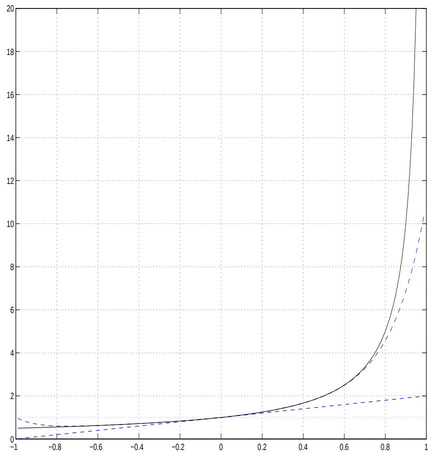

FIG. 2.9 – Fonctions $s_0 = f_0$, $s_1 = f_0 + f_1$, $s_{10} = f_0 + \cdots + f_{10}$ et la limite s.

2.2.1 Convergence simple, convergence absolue

Définition 2.4 (Convergence simple)
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers s sur I si la suite de fonctions (s_N) converge simplement vers s sur I. On note alors :

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n,$$

et s est appelée somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exemple. Si $I =]-1,1[$ et $f_n(x) = x^n$ alors $s_N(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ et la série $\sum f_n$ est convergente (voir figure 2.9) de somme

$$s : \left\{ \begin{array}{rl}]-1,1[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{1-x} \end{array} \right.$$

Définition 2.5 (Convergence absolue)
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument si la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge simplement.

Exemple. La règle de d'Alembert permet de montrer que la série de fonctions $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument sur $\mathbb{R}$ (voir chapitre 1). Sa somme est la fonction exponentielle.

On retrouve bien sûr pour les séries de fonctions le résultat vu pour les séries numériques.

Proposition 2.7 (Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence simple)
Si la série de fonctions $\sum f_n$ est absolument convergente sur I, alors elle est simplement convergente sur I.

Preuve. Pour tout x de I, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ est convergente, donc la série $\sum f_n(x)$ aussi. C'est exactement dire que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.

■

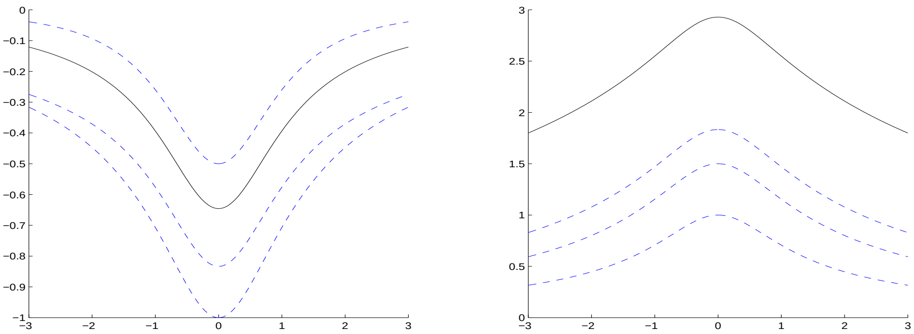

Fig. 2.10 – Sommes partielles s_1, s_2, s_3 (pointillés) et s_{10} (traits pleins) associées respectivement à $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}}$ et à $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}}$.

Exemple. la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}}$ converge simplement sur tout $\mathbb{R}$ (le vérifier grâce au critère des séries alternées), mais ne converge absolument en aucun point de $\mathbb{R}$ (le vérifier grâce à un équivalent). Voir figure 2.10.

Exercice. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ est simplement convergente sur l'intervalle semi-fermé $[-1,1[$, mais n'est absolument convergente que sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$. Voir aussi figure 2.11.

2.2.2 Convergence uniforme, convergence normale

On définit de la même façon que pour une suite de fonctions la convergence uniforme d'une série de fonctions.

Définition 2.6 (Convergence uniforme)
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers s sur I si la suite de fonctions (s_N) converge uniformément vers s sur I. Ceci revient à dire que la suite (r_N) des restes converge uniformément vers zéro :

$$\sup_{x\in I} |s(x) - s_N(x)| = \sup_{x\in I} |r_N(x)| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Exemple. Soit $\alpha \in]0,1[$. La série $\sum x^n$ converge uniformément vers $\frac{1}{1-x}$ sur l'intervalle $[-\alpha,\alpha]$. En effet :

$$\sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} |r_N(x)| = \sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} \left|\frac{x^{N+1}}{1-x}\right| \leq \frac{\alpha^{N+1}}{1-\alpha} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

On peut avoir convergence absolue sans avoir convergence uniforme et convergence uniforme sans avoir convergence absolue.

Remarque : Convergence uniforme non absolue
On considère les fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ constantes sur $\mathbb{R}$, avec $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$. Par le critère des séries alternées, $\sum_{n\geq 1} f_n$ est uniformément convergente. Par contre, elle n'est pas absolument convergente (divergence de la série harmonique).

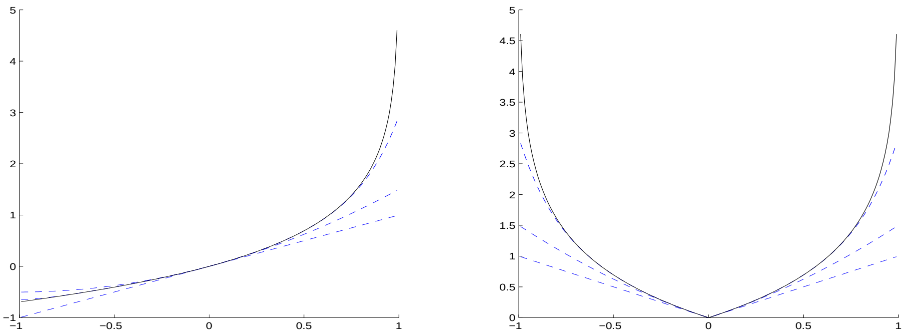

Fig. 2.11 – Sommes partielles s_1, s_2, s_{10} (pointillés) et somme de la série entière (traits pleins) associées respectivement à $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$ et à $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{x^n}{n}\right|$.

Pour une série de fonctions uniformément convergente, on peut appliquer les résultats de la section précédente.

Propriétés 2.1 (Séries de fonctions uniformément convergentes)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément vers s sur l'intervalle I, alors

1. *$\sum f_n$ converge simplement vers s sur I.*
2. *Si les f_n sont bornées sur I, s est bornée sur I.*
3. *Si les f_n sont continues sur I, s est continue sur I.*
4. *Si les f_n sont intégrables sur l'intervalle* **borné** *I, s est intégrable sur I, avec :*
$$\int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(x)\,dx.$$
5. *Si les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I, si $\sum f_n$ converge simplement vers s et si $\sum f_n'$ converge uniformément vers σ, alors $\sum f_n$ converge uniformément vers s, s est dérivable et $s'=\sigma$. Autrement dit :*
$$\forall x\in I \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)'.$$
6. *Critère de Cauchy uniforme : $\sum f_n$ converge uniformément vers s sur l'intervalle I si et seulement si :*
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_0\in\mathbb{N},\ \forall N\geq N_0,\ \forall p\in\mathbb{N},\ \forall x\in I\ :\ |s_{N+p}(x)-s_N(x)|\leq\varepsilon.$$

Remarque : Convergence absolue non uniforme
$$f_n:\left\{\begin{array}{rl}[0,1] & \to\mathbb{R}\\ x & \mapsto x^n-x^{n+1}\end{array}\right.$$
On a clairement $s_N(x)=1-x^{N+1}$, donc convergence simple sur $[0,1]$ vers la fonction
$$s:x\to\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } 0\leq x<1\\ 0 & \text{si } x=1\end{array}\right.$$

Les f_n sont continues et s ne l'est pas, donc il n'y a pas convergence uniforme. Par contre, puisque les f_n sont positives, on a pour tout x de $[0, 1]$:

$$\sum_{n=0}^{N} |f_n(x)| = \sum_{n=0}^{N} f_n(x) = s_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} s(x),$$

c'est-à-dire convergence absolue.

Pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions, on montre en général la convergence uniforme des restes vers zéro. Encore faut-il disposer d'une expression manipulable pour ces restes... Gott sei Dank, il existe un critère pratique très simple, dû à Weierstrass, pour montrer la convergence uniforme : la notion de convergence normale. On s'en servira constamment dans l'étude des séries entières (chapitre 3).

Définition 2.7 (Convergence normale)
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I s'il existe une suite de réels positifs (α_n) telle que :
(i) $\forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq \alpha_n$;
(ii) $\sum \alpha_n$ est une série numérique convergente.

La terminologie est d'une logique implacable : si $\sum f_n$ est normalement convergente, les f_n sont bornées, avec $||f_n||_\infty \leq \alpha_n$ pour tout n ; de plus, la série des **normes** infinies est convergente, puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} ||f_n||_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$. D'où le nom de séries **normalement** convergentes.

Exemple. La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+x^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. En effet, on a
(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$;
(ii) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.

La convergence normale présente l'intérêt de mettre tout le monde d'accord.

Proposition 2.8 (Convergence normale $\Rightarrow$ autres convergences)
Si la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur I, alors elle est simplement, absolument et uniformément convergente sur I.

Preuve. Supposons $\sum f_n$ normalement convergente sur I, avec (α_n) comme ci-dessus, alors il est clair que pour tout x, $\sum |f_n(x)|$ converge, donc la série $\sum f_n$ est absolument convergente, donc simplement convergente : notons s sa somme et montrons la convergence uniforme via l'étude des restes :

$$\forall x \in I,\ |r_N(x)| = |s(x) - s_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n = \rho_N,$$

où (ρ_N) est la suite des restes d'une série convergente, donc (ρ_N) tend vers zéro indépendamment de x, ce qui est bien dire que $\sum f_n$ est une série de fonctions uniformément convergente.

$\blacksquare$

Corollaire 2.1 (Séries de fonctions normalement convergentes)
Toutes les propriétés vues pour les séries de fonctions uniformément convergentes sont encore vraies pour les séries de fonctions normalement convergentes.

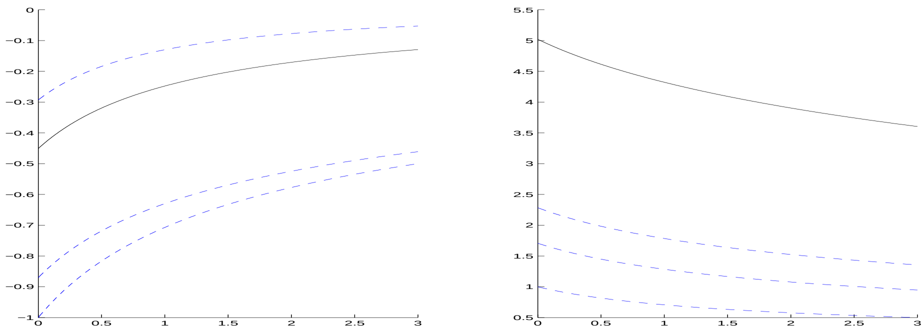

FIG. 2.12 – Sommes partielles s_1, s_2, s_3 (pointillés) et s_{10} (traits pleins) associées respectivement à $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ et à $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+x}}$.

Remarque. Quel est l'avantage de la convergence normale sur la convergence uniforme ? Il est double : d'une, elle est très simple à vérifier puisqu'il suffit de trouver une bonne série numérique $\sum \alpha_n$; de deux, elle ne nécessite pas de connaître la fonction limite (tout comme Cauchy uniforme). Cet intérêt est manifeste dans l'exercice intitulé "Fonction continue partout dérivable nulle part".

Notons enfin que la convergence uniforme n'implique pas la convergence normale. La situation typique est celle des séries de fonctions alternées.

Exemple : Convergence uniforme non normale

$$f_n : \left\{ \begin{array}{rl} [0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}} \end{array} \right.$$

A x fixé, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge par le critère des séries alternées, donc la série de fonctions converge simplement. De plus, pour tout x, la majoration du reste par son premier terme donne :

$$|r_N(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

et la convergence des restes vers zéro est uniforme en x, i.e. $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Par contre, elle n'est pas absolument convergente : à x fixé, la série $\sum |f_n(x)|$ est équivalente à la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. A fortiori, elle n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$ (voir figure 2.12).

Remarque. Au total, le schéma de la figure 2.13 résume les implications entre les différents types de convergence pour les séries de fonctions.

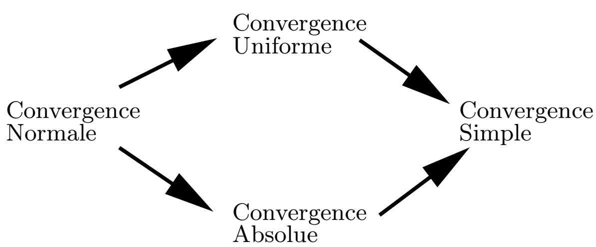

FIG. 2.13 – Liens entre convergences pour les séries de fonctions.

2.3 Exercices

Exercice 2.1 (Convergence simple, convergence uniforme)
Etudier les convergences simples et uniformes des suites de fonctions suivantes :

1. $(f_n)_{n\geq 0}$ est définie sur $[0,1]$ par : $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$.
2. $(f_n)_{n\geq 0}$ est définie sur $[0,1]$ par : $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$.
3. $(f_n)_{n\geq 1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^2 - \frac{\sin x}{n}$.
4. $(f_n)_{n\geq 1}$ est définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2 x & \text{si } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Exercice 2.2 (Suite de fonctions et limite d'intégrale)
Soit la suite de fonctions $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \ln\left(e^x + \frac{x}{n}\right)$$

1. Déterminer la limite simple f des f_n.
2. Montrer que $f_n(x) - f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. A-t-on convergence uniforme de (f_n) vers f ?
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ln\left(e^x + \frac{x}{n}\right)\, dx$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de décembre 2004.

Exercice 2.3 (Suite de fonctions et suite des dérivées)
On considère la suite de fonctions $f_n :]0,1] \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = x^n \ln x$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $]0,1]$ vers une fonction f.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $]0,1]$?
3. Calculer f_n'. La suite (f_n') converge-t-elle simplement sur $]0,1]$? uniformément ?

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2005.

Exercice 2.4 (Produit de suites de fonctions)
On veut savoir si un produit de fonctions uniformément convergentes est uniformément convergent.

1. Convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$?
2. Convergence uniforme de la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0,+\infty[$ par : $g_n(x) = \frac{1}{n}$?
3. Que dire de la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,+\infty[$?

Exercice 2.5 (Suite de fonctions dérivées)
On considère la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} [-1,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x}{1+n^2x^2} \end{cases}$$

1. La suite (f_n) converge-t-elle simplement ?
2. La convergence est-elle uniforme ?
3. Calculer f_n'. La suite (f_n') converge-t-elle simplement ? uniformément ?

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de juin 2004.

Exercice 2.6 (Problème de dérivabilité)
On considère la suite de fonctions

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \end{array} \right.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction f.
2. Montrer la convergence uniforme.
3. Les fonctions f_n sont-elle dérivables sur $\mathbb{R}$? Et f ?

Exercice 2.7 (Limite d'intégrale)
Soit la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \frac{ne^x}{n+x}$.

1. Déterminer la limite simple des f_n.
2. Y a-t-il convergence uniforme ?
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}\, dx$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet d'avril 2004.

Exercice 2.8 (Intervalle non borné d'intégration)
Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [n, 2n[\\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
2. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$.
3. En déduire que la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) vers une fonction f sur $[0, +\infty[$ n'assure pas :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Exercice 2.9 (Problème de dérivabilité)
On considère la suite de fonctions

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \end{array} \right.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction f.

2. Montrer la convergence uniforme.
3. Les fonctions f_n sont-elle dérivables sur $\mathbb{R}$? Et f ?

Exercice 2.10 (Suite de fonctions)
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = xe^{-n^2x}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$?
3. Calculer f'_n. La suite (f'_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}^+$?
4. La suite (f'_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?
5. Soit $n > 0$ fixé. Grâce à une intégration par parties, calculer :
$$I_n = \int_0^1 xe^{-n^2x}\,dx.$$
Que vaut $\lim_{n\to+\infty} I_n$? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2006.

Exercice 2.11 (Suite de fonctions avec paramètre)
Soit α un nombre réel. Considérons la suite de fonctions
$$f_n : \left\{ \begin{array}{rl} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto n^\alpha x e^{-nx} \end{array} \right.$$

1. Trouver la limite simple de (f_n).
2. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence uniforme ?
3. Pour quelles valeurs de α a-t-on :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$
Y a-t-il contradiction avec le résultat vu en cours ?

Corrigé

1. Si $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$ pour tout n donc convergence vers 0. Si $x \in]0,1]$, on a le produit d'une suite "puissance", $u_n = n^\alpha$, par une suite "exponentielle", $v_n = e^{-nx}$. On sait que l'exponentielle impose sa limite, donc :
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$
La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.
2. On a donc sur $[0,1]$:
$$d_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = n^\alpha x e^{-nx}.$$
La fonction d_n est dérivable, avec :
$$d'_n(x) = n^\alpha e^{-nx}(1 - nx).$$

On en déduit que d_n est croissante sur $[0, \frac{1}{n}]$, décroissante sur $[\frac{1}{n}, 1]$. Son maximum est donc :

$$M_n = d_n(\frac{1}{n}) = n^{\alpha-1}e^{-1}.$$

Il est clair que (M_n) tend vers zéro si et seulement si $\alpha < 1$. Ainsi il y a convergence uniforme de (f_n) vers f si et seulement si $\alpha < 1$.

3. Par la question précédente, on est assuré que pour $\alpha < 1$, on aura bien :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

Mais la condition de convergence uniforme pour pouvoir passer la limite sous le signe somme est une condition **suffisante**. On n'a jamais dit qu'elle était **nécessaire**. C'est ce qui va apparaître ici. Dans cet exemple, on peut calculer sans problème les intégrales :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^\alpha \int_0^1 xe^{-nx}\,dx,$$

Il suffit en effet de poser $u(x) = x$, $v'(x) = e^{-nx}$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\frac{e^{-nx}}{n}$, et d'appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx,$$

on en déduit :

$$\int_0^1 xe^{-nx}\,dx = \left[-\frac{xe^{-nx}}{n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{n}\,dx,$$

ce qui donne :

$$\int_0^1 xe^{-nx}\,dx = -\frac{e^{-n}}{n} - \left[\frac{e^{-nx}}{n^2}\right]_0^1 = \frac{1}{n^2} - \frac{e^{-n}}{n} - \frac{e^{-n}}{n^2}.$$

Finalement :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^{\alpha-2} - n^{\alpha-1}e^{-n} - n^{\alpha-2}e^{-n}.$$

Pour le passage à la limite en n, les deux derniers termes ne posent pas problème puisque l'exponentielle impose la convergence vers 0. Ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-2},$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \alpha < 2.$$

Ainsi on peut permuter limite et intégrale pour tout $\alpha < 2$ alors qu'on a convergence uniforme seulement pour $\alpha < 1$.

Exemple. Prenons $\alpha = 1$. L'étude précédente montre que la suite de fonctions

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto nxe^{-nx} \end{array} \right.$$

converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$, mais pas uniformément puisque :

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} d_n(x) = \frac{1}{e} \nrightarrow 0.$$

Néanmoins, on a bien :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx}\,dx = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx}\,dx.$$

Exercice 2.12 (Suite de polynômes)
(P_n) est une suite de polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

1. Ecrire le critère de Cauchy uniforme pour la suite (P_n).
2. Montrer qu'un polynôme borné sur $\mathbb{R}$ est constant, donc égal à sa valeur en 0.
3. En revenant au critère de Cauchy uniforme ci-dessus, en déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, pour tout $m \geq 0$ et pour tout réel x :
$$P_{n+m}(x) - P_n(x) = P_{n+m}(0) - P_n(0).$$
4. En déduire que f est une fonction polynôme.

Exercice 2.13 (Série harmonique alternée)

1. Par une simple majoration, montrer que :
$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
2. Soit $x \in [0,1[$. Donner une expression plus simple de la somme :
$$1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n.$$
3. En déduire que la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est $\ln 2$.

Exercice 2.14 (Calcul d'intégrale)
Soit $0 < a < b$. On veut la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx.$$

1. Justifier la convergence de cette intégrale.
2. Montrer que pour tout x strictement positif :
$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xu}\,du.$$
3. Grâce au Théorème de Fubini, en déduire l'égalité :
$$\int_0^n \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_a^b \frac{1 - e^{-nu}}{u}\,du.$$
4. La suite de fonctions (f_n) est définie comme suit :
$$f_n : \left\{ \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \frac{1-e^{-nu}}{u} \end{array} \right.$$
Cette suite de fonctions converge-t-elle simplement sur $[a,b]$? uniformément ?

5. En déduire que :
$$I = \ln \frac{b}{a}.$$

Exercice 2.15 (Intervalles de convergence uniforme)
Considérons la suite de fonctions
$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \end{cases}$$

1. Représenter f_1, f_2, f_n.
2. Montrer que (f_n) converge simplement.
3. La convergence est-elle uniforme ?
4. Donner les intervalles sur lesquels la convergence est uniforme.

Exercice 2.16 (Convergence uniforme sur tout compact)
Soit la suite de fonctions
$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 \sin \frac{1}{nx} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

1. Convergence simple de la suite (f_n) ? On appelle f la fonction limite.
2. Pour n fixé, calculer : $\lim_{x\to+\infty} |f_n(x) - f(x)|$.
3. Y a-t-il convergence uniforme de (f_n) vers f sur $\mathbb{R}$?
4. Soit $M > 0$ fixé. Montrer que si on se restreint à l'intervalle $[-M, M]$, alors il y a convergence uniforme.

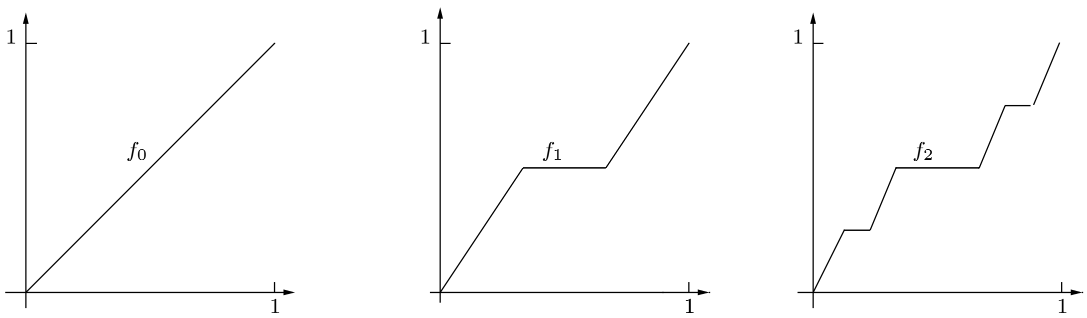

Fig. 2.14 – Construction de l'escalier du diable.

Exercice 2.17 (L'escalier du diable)
On considère ici la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0, 1]$ par la récurrence suivante :
$$\forall x \in [0, 1] \qquad f_0(x) = x,$$
et pour construire f_{n+1} à partir de f_n :
$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(3x)/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/3 \\ 1/2 & \text{si } 1/3 < x < 2/3 \\ 1/2 + f_n(3x-2)/2 & \text{si } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
On a représenté figure 2.14 les fonctions f_0, f_1 et f_2.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in [0,1]$: $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{3 \cdot 2^n}$.
2. Via une somme télescopique, établir que pour tout couple d'entiers naturels (n,p) on a :
$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \cdot 2^n}.$$
3. Grâce au critère de Cauchy uniforme, en déduire que (f_n) est une suite de fonctions uniformément convergente. On note f la fonction limite.
4. Montrer que f est continue et croissante sur $[0,1]$.

Corrigé

1. On le prouve par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a :
$$|f_1(x) - f_0(x)| = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/3 \\ |x - 1/2| & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 3x/2 - 1/2 & \text{si } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
Dans chaque situation, on vérifie que $|f_1(x) - f_0(x)| \leq \frac{1}{6}$, donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $n = 1$. Supposons qu'elle le soit au rang n, alors par définition des f_n on peut écrire :
$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \begin{cases} |f_n(3x)/2 - f_{n-1}(3x)/2| & \text{si } 0 \leq x \leq 1/3 \\ 0 & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ |f_n(3x-2)/2 - f_{n-1}(3x-2)/2| & \text{si } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
Et il reste à appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir que :
$$\forall x \in [0,1] \qquad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}}.$$
2. Soit alors des entiers naturels n et p. Pour tout $x \in [0,1]$, on peut écrire :
$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |(f_{n+p}(x) - f_{n+p-1}(x)) + \cdots + (f_{n+1}(x) - f_n(x))|,$$
et on applique l'inégalité triangulaire :
$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f_{n+p-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \cdot 2^{n+p}} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}}.$$
On reconnaît une somme géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc :
$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \cdot 2^n} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n+p}} \leq \frac{1}{3 \cdot 2^n},$$
quantité qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, indépendamment de p et de x. Donc le critère de Cauchy uniforme est bien vérifié : la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f, l'escalier du diable.
3. On montre par récurrence que $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$. C'est vrai pour $n = 0$ et supposons le vrai pour $n \geq 0$ quelconque, alors $f_{n+1}(0) = f_n(0)/2 = 0$ et $f_{n+1}(1) = 1/2 + f_n(3-2)/2 = 1$. On montre de même par récurrence que les f_n sont continues. C'est vrai pour $n = 0$ et si on le suppose vrai pour $n \geq 0$, alors la continuité de f_{n+1} ne fait aucun doute en dehors des points $1/3$ et $2/3$. En ces points, il n'y a pas de problème de recollement. Les f_n étant continues, on déduit de la convergence uniforme que f est continue.

On montre encore par récurrence que les fonctions f_n sont toutes croissantes. Soit donc $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq 1$, alors pour tout n :

$$f_n(x_0) \leq f_n(x_1),$$

et en passant à la limite sur n, on en déduit :

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) \leq \lim_{n\to+\infty} f_n(x_1) = f(x_1),$$

c'est-à-dire que f est une fonction croissante.
Remarque : f a ceci de remarquable que sa dérivée est nulle partout sauf sur un ensemble de longueur totale égale à zéro, pourtant elle est continue et strictement croissante de 0 à 1. Si on interprète f comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, celle-ci est diffuse (i.e. elle ne met de poids en aucun point), mais pas absolument continue, c'est-à-dire qu'elle n'admet pas de densité.

Exercice 2.18 (Etude de $\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(x+n)}$)
On s'intéresse à la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \frac{x}{n(x+n)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ sa somme.
2. Montrer que chaque fonction f_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et plus généralement $f(p)$ lorsque p est un entier naturel (on pourra effectuer des réductions en éléments simples).
4. En déduire $\lim_{p\to+\infty} f(p)$, puis $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
5. Montrer que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (on pourra utiliser le développement asymptotique de la série harmonique : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$).

Corrigé

1. Pour $x \geq 0$ fixé, on a : $\frac{x}{n(x+n)} \sim \frac{x}{n^2}$, or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2}$ est convergente.
2. Fixons $n \geq 1$: le calcul de la dérivée de f_n montre qu'elle est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc pour tout $n \geq 1$ et pour tout couple $0 \leq x \leq x'$: $f_n(x) \leq f_n(x')$. Il suffit alors de sommer cette inégalité pour n variant de 1 à $+\infty$ pour obtenir que $f(x) \leq f(x')$, c'est-à-dire que f est croissante sur $[0, +\infty[$.
3. On a $f(0) = 0$. Puis :
$$f(1) = \lim_{N\to+\infty} S_N,$$
avec la somme partielle S_N qui est télescopique puisque $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$:
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$
On en déduit que $f(1) = 1$. On applique la même ruse pour le calcul de $f(2)$. Cette fois :
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}.$$
On en déduit que $f(2) = \frac{3}{2}$. De façon générale, pour $f(p)$, on a :
$$S_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \cdots - \frac{1}{N+p},$$

donc :

$$f(p) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p}.$$

C'est-à-dire que $f(p)$ peut être vu comme la somme partielle de la série harmonique. Or celle-ci est divergente, donc $\lim_{p\to+\infty} f(p) = +\infty$. Puisque f est croissante, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{p\to+\infty} f(p) = +\infty.$$

4. On utilise l'équivalent de la somme partielle de la série harmonique :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p} \sim \ln p,$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{f(p)}{p} \sim \frac{\ln p}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.$$

Pour x tendant vers l'infini, on note N_x sa partie entière et on peut écrire :

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(N_x+1)}{N_x} = \frac{f(N_x+1)}{N_x+1} \cdot \frac{N_x+1}{N_x}.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(N_x+1)}{N_x+1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{N_x+1}{N_x} = 1$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 2.19 (Fonction Zeta de Riemann)
Pour $n \geq 1$, considérons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$.

1. Pour quelles valeurs de x la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est-elle convergente ? On note alors $\zeta(x)$ la fonction somme.
2. Soit $x > 1$ fixé. Calculer : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt$.
3. Grâce au lien série/intégrale, montrer que pour tout $x > 1$:

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{x}{x-1}.$$

4. En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque $x \to 1^+$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de juin 2004.

Exercice 2.20 (Equivalent en 0)
Rappel : Intégrale de Gauss : $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$. On s'intéresse cette fois à la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ avec :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{-n^2 x} \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. On note $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sa somme.
2. Montrer que chaque fonction f_n est décroissante sur $]0,+\infty[$. En déduire que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$. Que peut-on en déduire sur la continuité de f ?
4. En généralisant la question précédente, montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

5. Soit $x > 0$ fixé. Via un changement de variable, montrer que : $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.
6. Soit $x > 0$ fixé. En encadrant $f_n(x)$ par deux intégrales, établir que :
$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt.$$
7. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

Corrigé

1. Soit $x > 0$ fixé. On peut montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ en appliquant le critère de d'Alembert :
$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = e^{-(2n+1)x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1.$$
2. Fixons $n \geq 1$: le calcul de la dérivée de f_n montre qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc pour tout $n \geq 1$ et pour tout couple $0 < x \leq x'$: $f_n(x) \geq f_n(x')$. Il suffit alors de sommer cette inégalité pour n variant de 1 à $+\infty$ pour obtenir que $f(x) \geq f(x')$, c'est-à-dire que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.
3. Les f_n sont clairement continues sur $]0, +\infty[$. La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement vers f sur cet intervalle :
$$\forall x \geq 1 \qquad 0 \leq f_n(x) \leq e^{-n^2}.$$
Or par le critère de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2}$ est convergente. La convergence normale sur $[1, +\infty[$ ainsi que la continuité des f_n assure de la continuité de f sur $[1, +\infty[$.
4. Le raisonnement fait sur l'intervalle $[1, +\infty[$ se généralise à tout intervalle $[a, +\infty[$ si $a > 0$. Ainsi f est continue sur tout $[a, +\infty[$, donc sur $]0, +\infty[$.
5. Soit $x > 0$ fixé. Afin de se ramener à l'intégrale de Gauss, on effectue le changement de variable $u = t\sqrt{2x}$, ce qui donne :
$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2x}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \frac{1}{2\sqrt{2x}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$
6. Pour $x > 0$ fixé, la fonction
$$f : \left\{ \begin{array}{rl} [1, +\infty[& \to \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto e^{-xt^2} \end{array} \right.$$
est continue positive décroissante donc on peut appliquer l'inégalité entre série et intégrale et passer à la limite (tout étant convergent) :
$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt.$$
On en déduit que :
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}},$$
c'est-à-dire que $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} f(x) = 1$, donc $f(x) \sim_{0^+} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 2.21 (Convergence normale)
Soit la série de fonctions
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2}.$$

1. Montrer qu'elle est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Notons f sa somme.
2. La fonction f est-elle continue ?
3. On admet que pour tout réel x : $f(x) = \frac{1}{4}(\frac{\pi^2}{3} - x^2)$. En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2005.

Exercice 2.22 (Fonction continue partout dérivable nulle part)
$E(x)$ désignant la partie entière de x, on considère la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto d(x, \mathbb{Z}) = \left| E\left(x + \frac{1}{2}\right) - x \right| \end{array} \right.$$

Partant de f, on construit la suite de fonctions (f_n) comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{1}{4^n} f(4^n x).$$

1. Représenter f_0 et f_1.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note S la fonction somme :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$
3. Pourquoi S est-elle continue ? On peut montrer (mais c'est plus difficile) qu'elle n'est par contre dérivable nulle part.

Exercice 2.23 (Novembre 2006)
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = x e^{\frac{x}{n}}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. Justifier rapidement que pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \geq 0$:
$$x e^{\frac{x}{n}} - x \geq 0.$$
3. Montrer que la convergence de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers une f est uniforme.
4. Déterminer :
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x e^{\frac{x}{n}} \, dx.$$
5. Bonus : étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe.

Exercice 2.24 (Janvier 2007)
On considère la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{nx^3}{1+nx} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in [0,1]$, on a :
$$x^2 - \frac{nx^3}{1+nx} \geq 0.$$
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[0,1]$?
4. Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx^3}{1+nx}\,dx.$$
5. Calculer f_n'. La suite (f_n') converge-t-elle simplement sur $[0,1]$?

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe.

Chapitre 3

Séries entières

Introduction

On étudie dans ce chapitre une famille particulière de séries de fonctions : celles de la forme $\sum a_n x^n$, dites séries entières. On s'intéresse dans un premier temps aux propriétés de la somme d'une série entière (domaine de convergence, continuité, etc.). On verra ensuite comment exprimer les fonctions usuelles comme des sommes de séries entières.

3.1 Domaine de convergence

On a défini dans le chapitre précédent différents types de convergence pour les séries de fonctions $\sum f_n(x)$ de la variable réelle x. Si on considère des fonctions de la variable complexe $f_n(z)$ définies sur un domaine D du plan complexe $\mathbb{C}$, on peut définir de même la convergence simple, absolue, uniforme, normale de la série de fonctions $\sum f_n(z)$ sur le domaine D : il suffit de remplacer les valeurs absolues par des modules.

Exemple. On considère la suite de fonctions

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll} D & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto z^n \end{array} \right.$$

où $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Alors à z fixé, on a bien sûr :

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{1 - z},$$

donc convergence simple sur D de la série de fonctions $\sum f_n$ vers la fonction

$$s : \left\{ \begin{array}{ll} D & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{1}{1-z} \end{array} \right.$$

Définition 3.1 (Série entière)
On appelle série entière réelle (resp. complexe) toute série de fonctions $\sum a_n x^n$ (resp. $\sum a_n z^n$), avec x et les a_n réels (resp. avec z et les a_n complexes).

On s'intéressera principalement tout d'abord aux séries entières complexes $\sum a_n z^n$, dont on déduira facilement les résultats pour les séries entières réelles. Les sommes partielles de cette série de fonctions sont donc : a_0, $a_0 + a_1 z$, $a_0 + a_1 z + a_2 z^2$, etc. Une série entière est ainsi complètement déterminée par la donnée de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$. Ainsi toutes les propriétés d'une série entière se liront sur cette suite $(a_n)_{n\geq 0}$. La première question à se poser est celle du domaine de définition, i.e. déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels la série $\sum a_n z^n$ est convergente.

Lemme 3.1 (Lemme d'Abel)
S'il existe z_0 tel que la série $\sum a_n z_0^n$ converge, alors la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < |z_0|$.

Preuve. On suppose bien sûr $z_0 \neq 0$, sinon il n'y a rien à dire. Puisque $\sum a_n z_0^n$ converge, elle n'est pas trivialement divergente, donc $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$. En particulier, cette suite est bornée (rappelons que toute suite admettant une limite est bornée), disons par M. Soit z tel que $|z| < |z_0|$, alors :

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n,$$

or $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, donc $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ est une série géométrique convergente, par suite $\sum |a_n z^n|$ converge, i.e. $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

■

Remarque. La preuve montre qu'il suffit en fait de supposer que la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée pour que $\sum a_n z^n$ soit absolument convergente pour tout z tel que $|z| < |z_0|$: c'est plutôt ce résultat qui est connu sous le nom de Lemme d'Abel.

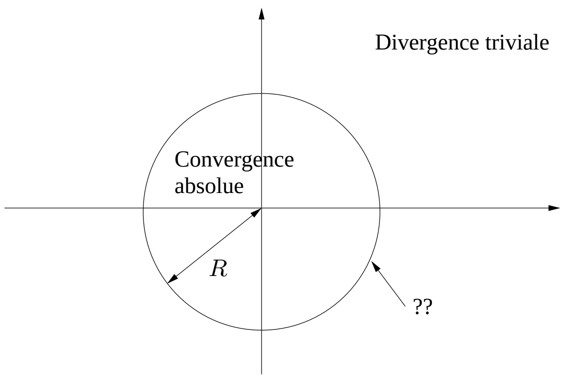

FIG. 3.1 – Comportement d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon R.

Théorème 3.1 (Définition du rayon de convergence)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique $R \in [0, +\infty]$ tel que :
- la série diverge trivialement pour $|z| > R$.
- la série converge absolument pour $|z| < R$.
R est appelé rayon de convergence de la série et $D(O,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ est appelé disque ouvert de convergence.

Preuve. On commence par définir l'ensemble :

$$\mathcal{E} \triangleq \{|z_0| : z_0 \in \mathbb{C}, \ \sum a_n z_0^n \text{ converge}\}.$$

$\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$, non vide car $0 \in \mathcal{E}$. Il y a alors deux possibilités :
- Si $\mathcal{E}$ n'est pas majoré, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ et $\sum a_n z_0^n$ converge. Donc d'après le lemme d'Abel, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et la propriété ci-dessus est

vérifiée avec $R = +\infty$.
- Si $\mathcal{E}$ est majoré, soit $R = \sup \mathcal{E}$. Si $R = 0$, il est clair que pour $z \neq 0$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, sinon on pourrait appliquer le Lemme d'Abel (avec $z \leftrightarrow z_0$) et on aboutirait à un rayon au moins égal à $|z|$, i.e. à une contradiction. Donc $\sum a_n z^n$ est trivialement divergente pour tout z non nul. Si $R > 0$, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, alors$(a_n z^n)$ n'est pas bornée, par le même raisonnement que ci-dessus. Si maintenant z est tel que $|z| < R$, alors par défini ton de la borne supérieure, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ et $\sum a_n z_0^n$ converge. Du Lemme d'Abel on déduit que $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

■

Exemple. Reprenons l'exemple de la série géométrique $\sum z^n$. On a $R = 1$ puisque cette série est absolument convergente pour tout complexe de module strictement inférieur à 1 et trivialement divergente pour tout complexe de module strictement supérieur à 1. Ici, on a même $\sum z^n$ trivialement divergente en tout point du bord du disque, i.e. pour $|z| = 1$, mais d'une façon générale on ne peut rien dire. Le comportement d'une série entière est résumé figure 3.1.

La semi-convergence étant le stade intermédiaire entre absolue convergence et triviale divergence, on en déduit aussitôt le résultat suivant.

Corollaire 3.1 (Semi-convergence $\rightsquigarrow$ Rayon de convergence)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. S'il existe z_0 tel que la série $\sum a_n z_0^n$ soit semi-convergente, alors le rayon de convergence R est égal au module de z_0.

Remarque. Lorsqu'on s'intéresse à la série entière réelle $\sum a_n x^n$, on définit de la même façon le rayon de convergence R : c'est l'unique R de $[0, +\infty]$ tel que la série $\sum a_n x^n$ diverge trivialement pour $|x| > R$ et converge absolument pour $|x| < R$. Si x_0 est tel que la série $\sum a_n x_0^n$ est semi-convergente, alors $R = |x_0|$. Le domaine $]-R, R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence (cf figure 3.2).

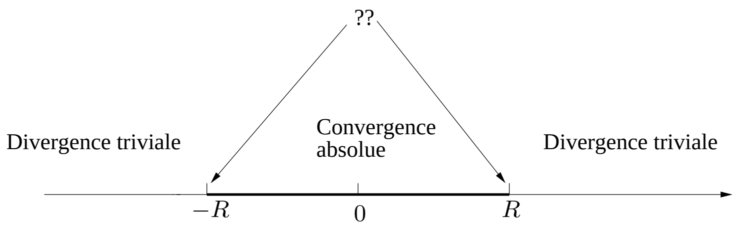

FIG. 3.2 – Comportement d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ de rayon R.

Les exemples suivants montrent différents comportements possibles au bord du disque de convergence, i.e. sur le cercle de convergence.

Exemples :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$: la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente, donc $R = |-1| = 1$. En $z = 1$, on retrouve la série harmonique, qui est divergente. On montre cependant que pour tout autre point du cercle unité $z = e^{i\theta}$, $\theta \in]0, 2\pi[$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente (cf transformation d'Abel, Chapitre 1). Au total, on a convergence sur tout le cercle unité sauf un point.

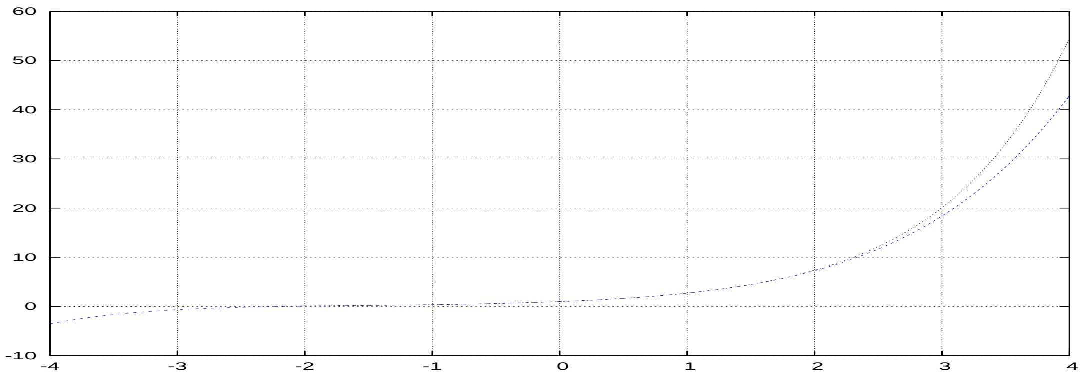

Fig. 3.3 – A gauche : Somme partielle $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^5}{5!}$ et fonction e^x.

2. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$: appliquons le critère de d'Alembert. Pour $z \neq 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{z^2}{n^2}} \right| = |z|,$$

donc absolue convergence pour $|z| < 1$ et triviale divergence pour $|z| > 1$. C'est-à-dire que $R = 1$. Pour le comportement au bord du disque de convergence, on voit que si $|z| = 1$, alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ est absolument convergente. En bref, il y a convergence sur tout le cercle unité.

Cette dernière méthode pour déterminer le rayon de convergence est en fait la plus courante.

Proposition 3.1 (Utilisation du critère de d'Alembert)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, avec $a_n \neq 0$ pour n assez grand. Si la suite $(|a_{n+1}|/|a_n|)$ admet une limite $L \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{L}$, avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Preuve. En effet, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = L|z|.$$

Le critère de d'Alembert pour les séries numériques permet alors de conclure :
- si $L = 0$: $\sum a_n z^n$ est absolument convergente sur $\mathbb{C}$ et $R = +\infty$;
- si $L = +\infty$: $\sum a_n z^n$ est trivialement divergente sur $\mathbb{C}$ et $R = 0$;
- si $0 < L < +\infty$: $\sum a_n z^n$ est trivialement divergente si $|z| > \frac{1}{L}$, et absolument convergente si $|z| < \frac{1}{L}$, i.e. $R = \frac{1}{L}$.

■

Exemple : La fonction exponentielle
La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$. En effet, si on reprend les notations de la Proposition ci-dessus :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Sa somme est la fonction exponentielle :

$$\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Dans le cas réel, on retrouve bien sûr la fonction exponentielle classique, réciproque de la fonction logarithme népérien. La convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est illustrée figure 3.3.

Exercice. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} n! z^n$.

Remarques.

1. Le cas classique où ce critère ne s'applique pas est celui des séries lacunaires, c'est-à-dire ayant une infinité de termes nuls. Par exemple la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{2^n}$, dont tous les coefficients impairs a_{2n+1} sont nuls. "Alors que faire ?" comme disait Lénine en son temps. Deux solutions : ou bien on revient au critère de d'Alembert d'origine (i.e. pour les séries numériques) ; ou bien on effectue un changement de variable, ici $u = z^2$, afin de se ramener à une série non lacunaire. On applique le critère de d'Alembert ci-dessus à la série entière $\sum \frac{u^n}{2^n}$, et on trouve $R_u = 2$. C'est-à-dire absolue convergence (respectivement triviale divergence) pour $|u| = z^2 < 2$ (respectivement $>$), d'où l'on déduit que $R = \sqrt{2}$.
2. L'expression générale du rayon de convergence d'une série entière en fonction des a_n est due à Hadamard et fait intervenir la notion de limite supérieure d'une suite :

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

3.2 Somme d'une série entière

Lorsqu'on se place à l'intérieur du disque de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, la somme est une fonction de z. Dans cette section, on s'intéresse aux propriétés de cette fonction somme.

3.2.1 Opérations sur les séries entières

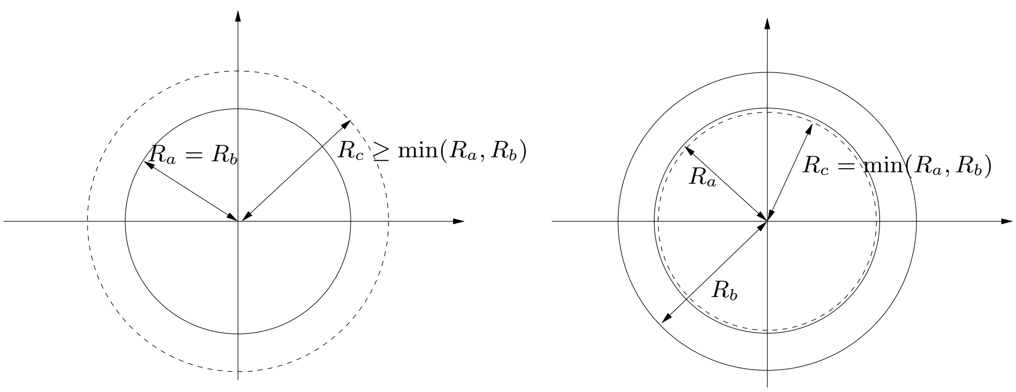

Fig. 3.4 – Rayon de convergence de la série somme.

Théorème 3.2 (Série somme)
Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b, de sommes S_a et S_b à l'intérieur des disques de convergence. La série entière $\sum c_n z^n$, avec $c_n = a_n + b_n$, a pour rayon

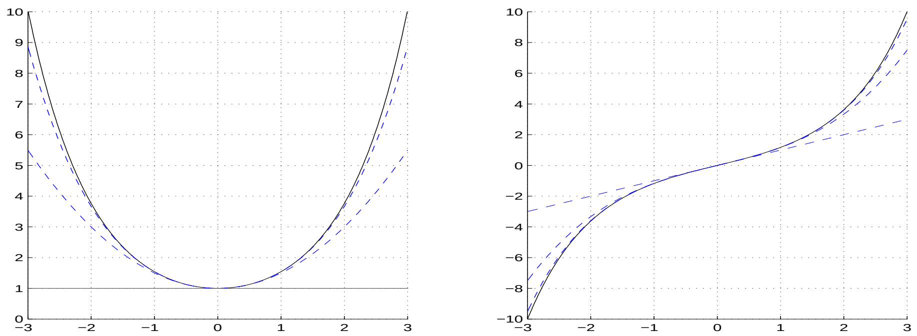

FIG. 3.5 – A gauche : 1, $1+\frac{x^2}{2!}$, $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ et $\cosh x$. A droite : x, $x+\frac{x^3}{3!}$, $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ et $\sinh x$.

$R_c \geq \min(R_a, R_b)$, et pour somme S_c vérifiant :

$$\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b)) \qquad S_c(z) = S_a(z) + S_b(z).$$

Si de plus $R_a \neq R_b$, alors $R_c = \min(R_a, R_b)$.

Preuve. Si $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors les deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes, donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ l'est aussi. On en déduit que $R_c \geq \min(R_a, R_b)$. Si maintenant les rayons diffèrent, par exemple $R_a < R_b$: supposons $R_c > R_a$, alors il existerait z tel que $R_a < |z| < R_b$ et $\sum c_n z^n$ convergente. Mais puisque $\sum b_n z^n$ est elle-même convergente, on aurait aussi $\sum (c_n - b_n) z^n = \sum a_n z^n$ convergente : absurde. Donc $R_c = \min(R_a, R_b)$.

■

Exemple. Des développements en séries entières de e^x et e^{-x}, on déduit que pour tout réel x (cf figure 3.5) :

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad \sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Théorème 3.3 (Série produit)
Avec les mêmes notations, la série entière $\sum c_n z^n$, avec $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$, a pour rayon $R_c \geq \min(R_a, R_b)$, et pour somme S_c vérifiant :

$$\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b)) \qquad S_c(z) = S_a(z) \cdot S_b(z).$$

Preuve. Si $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors les deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes, donc on peut appliquer le théorème sur le produit de séries numériques : la série $\sum c_n z^n$ est absolument convergente, de somme :

$$\sum_0^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_0^{+\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_0^{+\infty} b_n z^n \right).$$

■

Exemple. On déduit de ce résultat le développement en série entière de $\frac{1}{(1-z)^2}$. Pour tout complexe z de module strictement inférieur à 1 :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)} \cdot \frac{1}{(1-z)} = \left(\sum_0^{+\infty} z^n \right) \cdot \left(\sum_0^{+\infty} z^n \right) = \sum_0^{+\infty} (n+1) z^n.$$

Remarque. Contrairement à ce qui se passe pour la somme de deux séries entières, on n'a plus nécessairement $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$. Un exemple trivial est le suivant : $S_a(z) = 1 - z$ de rayon $R_a = +\infty$ et $S_b(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ de rayon $R_b = 1$. Le calcul donne bien sûr pour la série produit : $c_n = 0\ \forall n \geq 1$, i.e. $S_c(z) = 1$, de rayon $R_c = +\infty > \min(R_a, R_b) = R_b = 1$.

3.2.2 Convergence et continuité

Dans toute la suite de ce chapitre, on considère des séries entières réelles $\sum a_n x^n$.

Théorème 3.4 (Convergence normale)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$, alors pour tout $r < R$, la série $\sum a_n x^n$ converge normalement vers sa somme $S(x)$ sur l'intervalle $[-r, r]$.

Preuve. $\forall x \in [-r, r]$, on a $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$. Or la série $\sum |a_n| r^n$ est convergente par le lemme d'Abel, puisque $r < R$.

■

Nota Bene. Dire que la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[-r, r]$ pour tout $r < R$ n'est pas dire que $\sum a_n x^n$ converge normalement sur l'intervalle $]-R, R[$ (ce qui est faux en général).

Corollaire 3.2 (Continuité)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, de somme $S(x)$, alors S est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

Preuve. Ceci découle du résultat sur les séries de fonctions normalement convergentes. Soit $r < R$: les fonctions $x \mapsto a_n x^n$ sont continues sur $[-r, r]$ et la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement vers S sur cet intervalle, donc S est continue sur $[-r, r]$. Ceci est vrai pour tout $r < R$. Soit maintenant $|x| < R$, prenons $r \in]|x|, R[$: S est continue sur $[-r, r]$, donc en x. Ainsi, S est continue sur $]-R, R[$.

■

3.2.3 Dérivation, intégration

Proposition 3.2 (Rayon de convergence de la série dérivée)
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ est également de rayon R : on l'appelle la série dérivée de $\sum a_n x^n$.

Preuve. Notons R_d le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$. Si $|x| < R$, soit r tel que $|x| < r < R$, alors :

$$|(n+1)a_{n+1}x^n| = (n+1)\left|\frac{x}{r}\right|^n (|a_{n+1}|r^n)$$

or $\lim_{n\to\infty}(n+1)\left|\frac{x}{r}\right|^n = 0$, donc :

$$|na_n x^{n-1}| = o(|a_{n+1}|r^n),$$

avec $\sum |a_{n+1}|r^n = \frac{1}{r}\sum |a_{n+1}|r^{n+1}$ convergente par définition du rayon de convergence, donc $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ est absolument convergente et par conséquent $R_d \geq R$.
Réciproquement, si $|x| > R$, alors $\sum a_n x^n$ est trivialement divergente, c'est-à-dire que la suite $(a_n x^n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers zéro, donc la suite $(a_{n+1}x^n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers zéro non plus. A fortiori, la suite $((n+1)a_{n+1}x^n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers zéro, i.e. la série $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ est trivialement divergente, donc $R_d \leq R$. En conclusion, on a bien $R_d = R$.

■

Remarque. On notera indifféremment $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ ou $\sum_{n\geq 0} na_n x^{n-1}$ la série dérivée.

Exemple. La série dérivée de la série entière $\sum_{n\geq 0} x^n = 1+x+x^2+\dots$ est la série $\sum_{n\geq 0} nx^{n-1} = 1+2x+3x^2+\dots$. Elle a donc elle aussi pour rayon de convergence $R=1$.

Proposition 3.3 (Rayon de convergence de la série primitive)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ est également de rayon R : on l'appelle la série primitive de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Preuve. Considérons la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$. Par la proposition précédente, elle a même rayon de convergence que sa série dérivée, qui est $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, c'est-à-dire R.

■

Remarque. On notera indifféremment $\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ ou $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ la série primitive.

Exemple. La série primitive de la série entière $\sum_{n\geq 0} x^n = 1+x+x^2+\dots$ est la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots$. Elle a donc elle aussi pour rayon de convergence $R=1$.

Ces résultats vont maintenant s'appliquer aux fonctions qui s'expriment comme sommes de séries entières.

3.3 Fonctions développables en séries entières

3.3.1 Propriétés générales

Définition 3.2 (Développement en série entière)
- Soit $R>0$ et $f :]-R,R[\to \mathbb{R}$. On dit que f est développable en série entière (DSE) sur $]-R,R[$ s'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que :

$$\forall x \in]-R,R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

- Une fonction f définie au voisinage de 0 est développable en série entière en 0, ou au voisinage de 0, s'il existe $R>0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-R,R[$.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ puisque :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Lorsqu'une fonction est développable en série entière, tout est très simple pour le calcul des dérivées comme des primitives.

Proposition 3.4 (Dérivabilité)
Si f est développable en série entière sur $]-R,R[$, alors f est dérivable sur $]-R,R[$, de dérivée :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}.$$

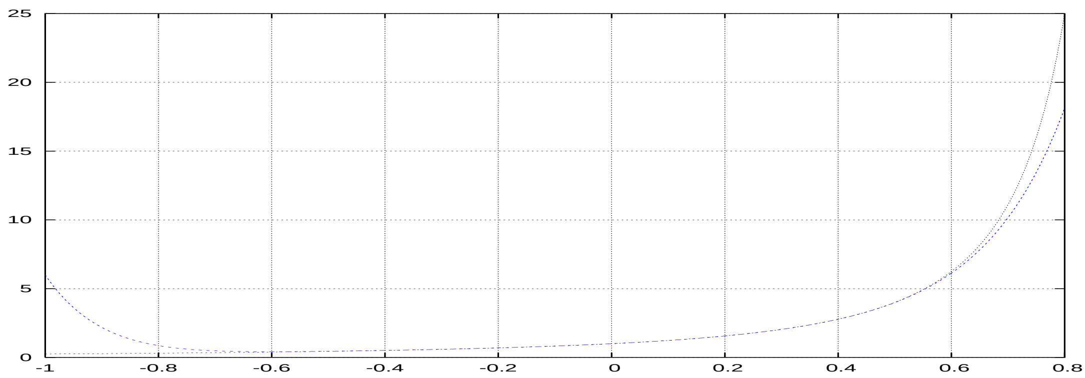

FIG. 3.6 – Somme partielle $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + 11x^{10}$ et fonction $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Preuve. Prenons $0 < r < R$. On sait que :
- la série $\sum a_n x^n$ converge simplement vers f sur $[-r, r]$;
- par le résultat précédent sur la série dérivée, la série $\sum n a_n x^{n-1}$ converge normalement vers sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ sur $[-r, r]$.

Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, on en déduit que f est dérivable sur $[-r, r]$, de dérivée :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Ceci étant valable pour tout $r \in]0, R[$, f est dérivable sur $]-R, R[$.

■

Exemple. En appliquant ce résultat à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$, on voit que pour tout $|x| < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

La convergence de la série vers $\frac{1}{(1-x)^2}$ est illustrée figure 3.6.
D'une part, on voit que le raisonnement ci-dessus s'applique à nouveau à la série dérivée $\sum n a_n x^{n-1}$.
D'autre part, on savait déjà que $a_0 = f(0)$, on vient d'obtenir $a_1 = f'(0)$. On généralise tout ceci.

Proposition 3.5 (DSE $\Rightarrow \mathcal{C}^\infty$)
Si f est développable en série entière sur $]-R, R[$, alors f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, avec :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

En particulier, on a la relation entre coefficients du développement en série entière et dérivées successives de f en 0 :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Exemple : Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$?
Le critère de d'Alembert montre que $R = 1$. Il suffit alors de siouxer un peu pour faire apparaître des séries dérivées : puisque $n^2 = n(n-1) + n$ et que les séries entières $\sum n(n-1)x^n$ et $\sum n x^n$ sont aussi de rayon 1, on a pour tout $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = x^2 \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

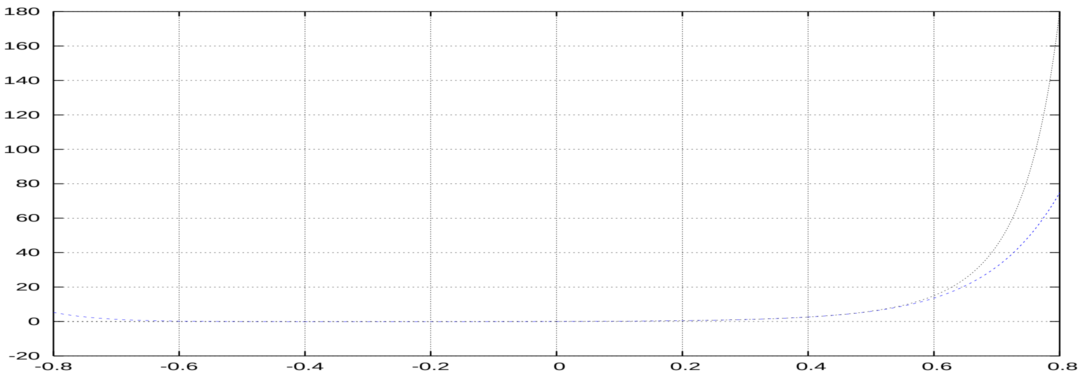

FIG. 3.7 – Somme partielle $x + 4x^2 + \cdots + 100x^{10}$ et fonction $\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$.

On reconnaît les dérivées première et seconde de la série harmonique $\sum_{n\geq 0} x^n$, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = x^2 \cdot \frac{2}{(1-x)^3} + x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

La convergence est représentée sur la figure 3.7.

Remarque. En particulier, si f est développable en série entière au voisinage de 0, elle admet un développement limité à tout ordre en 0 et les coefficients des deux développements coïncident. Réciproquement, la question naturelle est alors : si f est $\mathcal{C}^\infty$, est-elle développable en série entière ? La réponse est non.

Définition 3.3 (Série de Taylor)
La série $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ *est appelée série de Taylor de* f *en* 0.

Ainsi, si f est développable en série entière en 0, son développement de Taylor correspond à son développement en série entière.

Note Bene. On peut avoir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sans que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. En atteste l'exemple donné par Cauchy (1823), connu sous le nom de fonction plateau (figure 3.8) :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

f est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Il reste à voir la régularité en 0. La continuité ne pose pas problème. On veut montrer que pour tout $n \geq 0$: $f_g^{(n)}(0) = f_d^{(n)}(0)$. Pour les dérivées successives à gauche, on a bien sûr :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_g^{(n)}(0) = 0.$$

A droite, on montre par récurrence que les dérivées successives de f sont de la forme :

$$\forall x > 0 \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

où P_n est un polynôme, de sorte que l'exponentielle impose sa limite et :

$$\forall n \geq 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = 0 = f_d^{(n)}(0).$$

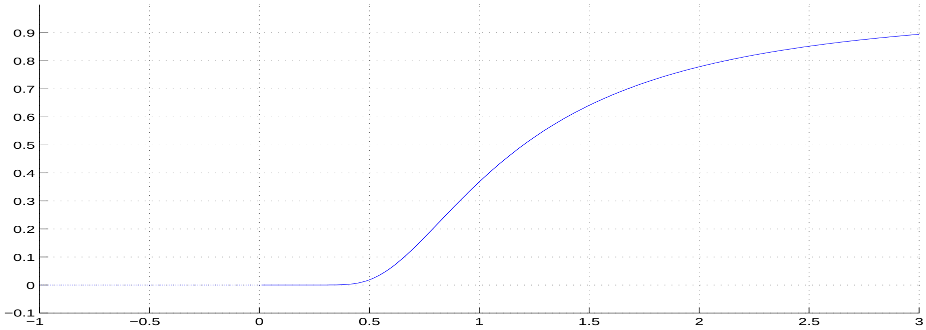

FIG. 3.8 – Graphe de la fonction plateau.

Ainsi pour tout n, on a $f_g^{(n)}(0) = f_d^{(n)}(0) = 0$, i.e. f est indéfiniment dérivable en 0, toutes ses dérivées étant nulles en ce point. Le développement en série de Taylor de f correspond à la série $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, donc ici à la série nulle. Il ne peut coïncider avec la fonction f, qui n'est identiquement nulle sur aucun intervalle de type $]-R,R[$.

Cet exemple montre qu'il faut une condition supplémentaire à l'aspect $\mathcal{C}^\infty$ pour qu'une fonction soit développable en série entière. Rappelons la formule de Taylor avec reste intégral vue en première année : si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\,dt = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_N(x).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que f soit développable en série entière en 0 est donc que :

$$\forall x \in]-R,R[\qquad \lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0,$$

ce qui n'est pas commode à vérifier, vue la façon dont le reste R_N est défini... On peut toutefois donner une condition suffisante.

Proposition 3.6 ($\mathcal{C}^\infty$ et dérivées bornées $\Rightarrow$ DSE)
Si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et s'il existe une constante M telle que :

$$\forall x \in]-R,R[,\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f^{(n)}(x)| \leq M,$$

alors f est développable en série entière en 0.

Preuve. Avec les notations précédentes, il suffit de vérifier que pour tout $x \in]-R,R[$, la suite $(R_N(x))_{N\geq 0}$ tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

$$|R_N(x)| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\,dt\right| \leq \int_0^x \left|\frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\right| dt \leq M \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!}\,dt,$$

intégrale facile à calculer :

$$|R_N(x)| \leq M \left[\frac{(x-t)^{N+1}}{(N+1)!}\right]_0^x = M\frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

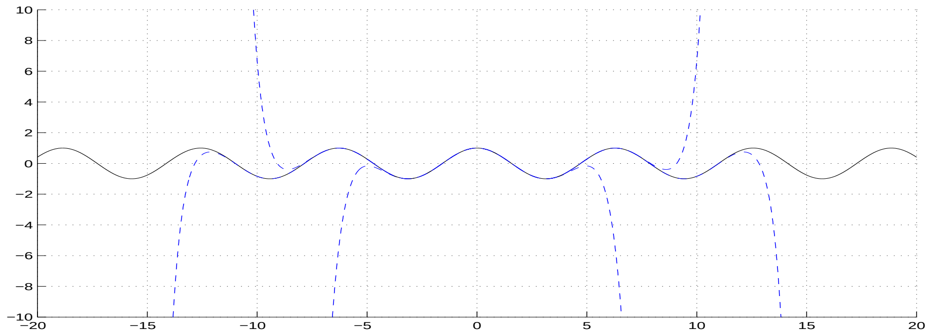

FIG. 3.9 – Fonction cosinus et ses approximations successives en série entières : s_{10}, s_{20} et s_{30}.

■

Exemple : la fonction cosinus
Le développement en série entière de $\cos x$ peut s'obtenir simplement à partir de celui de $\exp z$, via la formule d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Le résultat précédent donne une autre méthode : en remarquant que les dérivées successives de $\cos x$ sont au signe près $\cos x$ ou $\sin x$, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\cos^{(n)}(x)| \leq 1,$$

donc le résultat précédent s'applique et la fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Or $\cos^{(2n+1)}(0) = 0$ et $\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

On remarque sur cet exemple que dans le développement en série entière de la fonction cosinus n'apparaissent que des puissances paires. D'où vient-ce ? De la parité de la fonction cosinus. C'est un résultat général.

Proposition 3.7 (Parité, imparité)
Une fonction f développable en série entière en 0 est paire (resp. impaire) si et seulement si tous les coefficients d'ordre impair (resp. pair) de son développement sont nuls. Autrement dit :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} \qquad (\textit{resp. } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1})$$

Preuve (laborieuse). Soit f paire et développable en série entière en 0. Il existe donc $R > 0$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Raisonnons par l'absurde : soit a_{2n_0+1} le plus petit coefficient impair non nul. La fonction g définie par :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad g(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{2n_0} a_n x^n = \sum_{n=2n_0+1}^{+\infty} a_n x^n$$

est la différence de deux fonctions paires donc elle est paire. Par ailleurs elle s'écrit :

$$g(x) = a_{2n_0+1} x^{2n_0+1} + \left(\sum_{n=2n_0+2}^{+\infty} a_n x^{n-(2n_0+1)} \right) x^{2n_0+1} = (a_{2n_0+1} + \varepsilon(x)) x^{2n_0+1},$$

avec :

$$\varepsilon(x) = x \sum_{n=2n_0+2}^{+\infty} a_n x^{n-(2n_0+2)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

En particulier, il existe $\delta \in]0, R[$ tel que :

$$\forall x \in]-\delta, \delta[\qquad |\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2} |a_{2n_0+1}|.$$

De même : $g(-x) = -(a_{2n_0+1} + \varepsilon(-x)) x^{2n_0+1}$. D'où :

$$\forall x \in]-\delta, \delta[\qquad g(x) - g(-x) = (2a_{2n_0+1} + \varepsilon(x) + \varepsilon(-x)) x^{2n_0+1},$$

mais par l'inégalité triangulaire :

$$|2a_{2n_0+1} + \varepsilon(x) + \varepsilon(-x)| \geq 2|a_{2n_0+1}| - |\varepsilon(x)| - |\varepsilon(x)| \geq |a_{2n_0+1}|,$$

d'où l'on tire :

$$\forall x \in]-\delta, \delta[\qquad |g(x) - g(-x)| \geq |a_{2n_0+1}| \cdot |x|^{2n_0+1}.$$

Or g était sensée être paire, donc vérifier :

$$\forall x \in]-\delta, \delta[\qquad |g(x) - g(-x)| = 0.$$

On aboutit donc à une contradiction : tous les coefficients impairs a_{2n+1} sont nuls.
Si maintenant f est impaire et développable en série entière, elle est $\mathcal{C}^\infty$. Le développement de sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Or la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire (dériver membre à membre l'égalité : $f(-x) = -f(x)$). Donc, par ce qu'on vient de voir, tous les coefficients impairs du développement $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ sont nuls, c'est-à-dire : $2a_2, 4a_4, \ldots$, bref tous les a_{2n}.

■

3.3.2 Applications

a - Développements usuels

Les développements en série entière des fonctions usuelles sont tout simplement les développements limités "illimités" vus en première année. Ils se déduisent presque tous de trois développements à connaître (cf chapitre 1) : $\frac{1}{1-x}$, e^x et $(1+x)^\alpha$. En voici quelques-uns :

$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + \dots$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 + \dots$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	$R = 1$
$\frac{1}{(1-x)^2}$	$= 1 + 2x + 3x^2 + \dots$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$	$R = 1$
$\ln(1-x)$	$= -x - \frac{x^2}{2} - \dots$	$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	$R = 1$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \dots$	$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$R = 1$
$\arctan x$	$= x - \frac{x^3}{3} + \dots$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
e^x	$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\cos x$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\sin x$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\cosh x$	$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\sinh x$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$	$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$R = 1$

Exercices.

1. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \arg\tanh x$.
2. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

b - Equations différentielles

Pour déterminer le développement en série entière d'une fonction, on peut partir d'une équation différentielle dont elle est solution. Voyons ceci sur un exemple.

Exemple : les fonctions puissances
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rl}]-1, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto (1+x)^\alpha \end{array} \right.$$

f est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition. On a de plus :

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Leftrightarrow (1+x)f'(x) = \alpha f(x).$$

Sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, f est donc solution de l'équation différentielle :

$$y' - \frac{\alpha}{1+x} y = 0.$$

Cette équation est linéaire homogène, c'est-à-dire du type $y' - a(x)y = 0$, avec a continue. Donc il existe une unique solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$: c'est f. Supposons f développable en série entière en 0, i.e. il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

alors l'équation différentielle dont f est solution s'écrit :

$$(1+x)\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n)x^n = 0.$$

Or le résultat suivant est clair :

Lemme 3.2 (Nullité d'une fonction développable en série entière)
Une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a pour somme la fonction nulle sur $]-R, R[$ si et seulement si tous les a_n sont nuls.

Preuve. Si les a_n sont nuls, il est clair que la série est convergente sur $\mathbb{R}$, de somme la fonction nulle. Réciproquement, sur $]-R, R[$, le lien entre dérivées successives de la fonction en 0 et les coefficients de son développement en série entière donnent :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{0^{(n)}(0)}{n!} = 0,$$

et les a_n sont bien tous nuls.

■

Ce qui donne ici une infinité d'équations

$$\begin{cases} a_1 & = \alpha a_0 \\ a_2 & = \frac{\alpha-1}{2}a_1 \\ \dots & = \dots \\ a_{n+1} & = \frac{\alpha-n}{n+1}a_n \\ \dots & = \dots \end{cases}$$

La condition initiale impose $a_0 = 1$ et de façon générale on obtient à partir de ces équations :

$$a_{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}.$$

On note que :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha-n|}{n+1} = 1,$$

donc f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ avec :

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

On a bien retrouvé le développement en série entière des fonctions puissances donné précédemment.

Remarque. Si α est un entier naturel, la formule ci-dessus est encore valable : à partir d'un certain rang, tous les a_n sont nuls et on retrouve donc la formule du binôme.

Exemple. On déduit de cette formule générale les développements en série entière de $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos x$, $\arg\sinh x$, etc.

Inversement, cette méthode permet parfois de déterminer la solution d'une équation différentielle. On suppose cette solution développable en série entière, donc de la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on écrit les équations que doivent vérifier les a_n pour que l'équation soit vérifiée, on en déduit les a_n et, quand les sourires de la vie ne sont pas pleins de fausses dents, on retombe sur un développement que l'on peut exprimer à partir de fonctions usuelles.

Exemple. Déterminer par cette méthode la solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' + y & = x \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

c - Un résultat de passage à la limite

On clôt ce chapitre par un résultat dû à Abel et qui consiste, en gros, à passer la limite sous le signe somme. Il permet en particulier de calculer la somme de certaines séries numériques.

Théorème 3.5 (Convergence au bord de l'intervalle)
Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$, avec :

$$\forall x \in]-R,R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Si la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ converge, alors f est continue au point R et :

$$\lim_{x\to R^-} f(x) = f(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Preuve. On montre que la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est uniformément convergente sur $[0,R]$ (on sait pour l'instant qu'elle est simplement convergente sur cet intervalle). Puisque les fonctions $x \mapsto a_n x^n$ sont continues, ceci assurera la continuité de la fonction somme sur cet intervalle, donc le résultat voulu.
On prouve cette convergence uniforme grâce au critère de Cauchy uniforme. On commence par réécrire cette série sous la forme $\sum a_n R^n (\frac{x}{R})^n$. On effectue alors une transformation d'Abel comme au chapitre 1 pour majorer :

$$S_{N+p}(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{N+p} a_n x^n = \sum_{n=N+1}^{N+p} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

On note pour $n \geq N$: $\sigma_{N,n} = \sum_{k=N}^{n} a_k R^k$. On a alors après calculs :

$$S_{N+p}(x) - S_N(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^{N+p} \sigma_{N,N+p} - \left(\frac{x}{R}\right)^{N+1} \sigma_{N,N} + \sum_{n=N+1}^{N+p-1} \sigma_{N,n} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}\right).$$

Or la série $\sum a_n R^n$ étant convergente, elle vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall N \geq N_0,\ \forall n \geq N \qquad |\sigma_{N,n}| < \varepsilon.$$

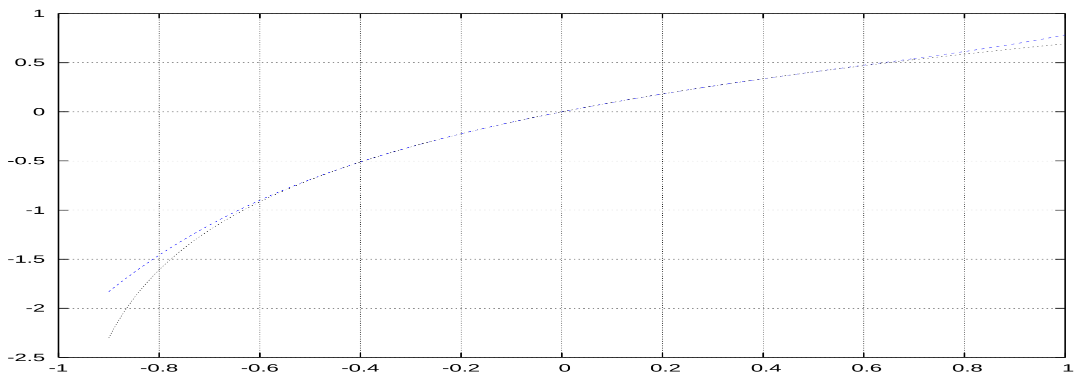

FIG. 3.10 – Somme partielle $x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^5}{5}$ et fonction $\ln(1+x)$.

De plus, puisque $x \in [0, R]$, les termes $(\frac{x}{R})^n - (\frac{x}{R})^{n+1}$ sont positifs, donc :

$$|S_{N+p}(x) - S_N(x)| \leq \left(\frac{x}{R}\right)^{N+p} \varepsilon + \left(\frac{x}{R}\right)^{N+1} \varepsilon + \sum_{n=N+1}^{N+p-1} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}\right) \varepsilon = 2\varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{N+1} \leq 2\varepsilon.$$

Et le critère de Cauchy uniforme est vérifié : la somme de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est continue sur $[0, R]$. Cette somme vaut f sur $[0, R[$ et est donc prolongeable par continuité en R :

$$\lim_{x \to R^-} f(x) = f(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

■

Ce résultat est aussi valable, mutatis mutandis, au point $x = -R$.

Exemple. On a vu que :

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

or $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est une série alternée convergente, donc on retrouve à peu de frais le résultat vu dans le chapitre sur les séries numériques :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0.69$$

La convergence est illustrée figure 3.10.

“ Il n’y a pas d’enseignement mathématique sans une certaine méchanceté de la raison.” Gaston Bachelard.

“ Il n’y a pas d’enseignement mathématique sans une certaine méchanceté de la raison.” Gaston Bachelard.

3.4 Exercices

Exercice 3.1 (Rayons et domaines de convergence)
On considère les séries entières suivantes :

$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n2^n}$	$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n^n}$
$\sum_{n\geq 0}\frac{\sinh n}{\cosh n}x^n$	$\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n x^n}{\ln n}$
$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}x^n$	$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{\cosh n}$
$\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n\ln n}$	$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$
$\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2^n}$	$\sum_{n\geq 0}x^{n!}$
$\sum_{n\geq 1}\frac{n+\ln n}{n^2+1}x^n$	$\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!n^{2n}}{2^n n!(3n)!}x^n$

1. Pour chacune des séries entières, déterminer le rayon de convergence R.
2. Pour chacune (sauf les deux dernières), déterminer le comportement au bord de l'intervalle de convergence, c'est-à-dire pour $x=\pm R$.

Exercice 3.2 (Fraction rationnelle)
1. Donner les rayons des séries entières suivantes $\sum_{n\geq 0}\frac{2^{n+1}}{5}x^n$ et $\sum_{n\geq 0}\frac{-1}{5\ .\ 3^{n+1}}x^n$. En déduire le rayon de la série entière :
$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2^{n+1}}{5}-\frac{1}{5\ .\ 3^{n+1}}\right)x^n.$$
Comportement au bord ?
2. Réduire en éléments simples la fraction rationnelle : $f(x)=\frac{1}{2x^2-7x+3}$.
3. On rappelle que, pour tout $x\in]-1,1[$: $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$. En déduire que :
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{5}-\frac{1}{5\ .\ 3^{n+1}}\right)x^n.$$
On précisera pour quelles valeurs de x cette identité est valable.

Exercice 3.3 (Dérangements)
On appelle dérangement d'ordre n toute permutation de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ sans point fixe. On note d_n le nombre de dérangements d'ordre n, avec la convention $d_0=1$.
1. Déterminer d_1,d_2,d_3.
2. Donner en fonction des d_k le nombre de permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ n'ayant aucun point fixe, ayant exactement un point fixe, ayant exactement deux points fixes, etc. En déduire la valeur de :
$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k d_{n-k}.$$
3. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{d_n}{n!}x^n$. Expliquer pourquoi $d_n\leq n!$, et montrer que la série entière converge absolument pour $x\in]-1;+1[$.

4. Que pouvez-vous dire du rayon R de la série entière ?
5. Rappeler les expressions de e^x et de $\frac{1}{1-x}$ sous formes de séries entières.
6. Grâce au produit de séries entières, établir que pour $|x| < 1$:

$$e^x \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

7. Grâce au produit de séries entières, donner l'expression sous forme de série entière de $\frac{e^{-x}}{1-x}$.
8. En déduire d_n.
9. Un facteur doit distribuer n lettres à n destinataires distincts. D'humeur facétieuse, il décide de le faire au hasard : quelle est la probabilité p_n que personne ne reçoive sa lettre ?
10. Quelle est la limite de cette probabilité p_n lorsque n tend vers l'infini ?
11. Supposons que $n = 9$. Ordre de grandeur de l'erreur si on dit que la probabilité est $1/e$?

Exercice 3.4 (Suite de Fibonacci)
Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0$, on a $0 \leq a_n \leq 2^n$.
2. En déduire que si $x \in]-1/2, +1/2[$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est absolument convergente.
3. Que dire alors du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$?
4. Pour $|x| < R$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Calculer la série $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$, produit des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $1 - x - x^2$.
5. En déduire une expression simple de $f(x)$.
6. Réduire en éléments simples la fraction rationnelle : $\frac{x}{1-x-x^2}$. Pour la suite, on pourra noter α et β les racines de $1 - x - x^2$.
7. En déduire a_n pour tout $n \geq 0$. La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est appelée suite de Fibonacci.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de juin 2004.

Exercice 3.5 (Sommes de séries entières)
Déterminer l'intervalle de convergence et la somme de chacune des séries entières suivantes :

$$\textstyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n+2)}{n!} x^n \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n}{(n+1)(n+2)} x^n$$

$$\textstyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{3^n} x^n \qquad \sum_{n\geq 2} \frac{(-3)^{n-1}}{n(n-1)} x^n$$

$$\textstyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(-2)^n(n-1)} x^n \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!} x^n$$

Exercice 3.6 (Variables aléatoires)
1. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{var}(X)$.

2. Généralisation : on dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique, de paramètre $p \in]0,1[$, si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^{n-1}.$$

   Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{var}(X)$.
3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec : $\mathbb{P}(X=n) = e^{-5}\,\frac{5^n}{n!}$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{var}(X)$.
4. Généralisation : on dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

   Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{var}(X)$.

Exercice 3.7 (Problème de natalité)
Supposons qu'à la naissance, la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est de $1/2$. Supposons encore que tout couple engendre jusqu'à obtention d'un garçon. Le but est de trouver la proportion de garçons dans ce modèle théorique.

1. Notons X le nombre d'enfants d'un couple. Donner la loi de la variable aléatoire X.
2. Soit P la proportion de garçons parmi les enfants d'un couple. Exprimer P en fonction de X.
3. En déduire que $\mathbb{E}[P] = \ln 2 \approx 0.69$.

Exercice 3.8 (Développements en série entière)
Donner le développement en série entière de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. Comment s'appelle cette fonction ?
2. $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.
3. $f(x) = \ln(2+x)$.
4. $f(x) = (1+x)e^{-x}$.
5. $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.
6. $f(x) = \cos^2 x$.
7. $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$ (on calculera d'abord une primitive de f).

Exercice 3.9 (Valeur approchée de π)

1. Rappeler le développement en série entière de $\arctan x$, ainsi que le rayon de convergence R.
2. Que dire en $x = R$? En déduire une expression de π comme somme de série numérique.
3. Dans cette somme, combien de termes faut-il prendre en compte pour obtenir une valeur approchée de π à 0.01 près ?

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de juin 2004.

Exercice 3.10 (Somme d'une série numérique via une série entière)

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière :

$$\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n^2-1}.$$

   On note $S(x)$ sa somme.

2. Prouver que si $0<|x|<1$, $S(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$S(x)=\left(\frac{1}{2x}-\frac{x}{2}\right)\ln(1-x)+\frac{1}{2}+\frac{x}{4}.$$

3. En déduire que $\sum_{n>1}\frac{1}{n^2-1}=\frac{3}{4}$.

Exercice 3.11 (Sommes de séries numériques)
Donner la somme de chacune des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)!}\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n3^n}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{2n}}\qquad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$$

Exercice 3.12 (Série entière et convergence au bord du domaine)
Considérons la série entière

$$\sum_{n\geq 0}(-3)^n(n+1)x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. Notons g sa somme.
2. Calculer une primitive de g.
3. En déduire une expression de $g(x)$ comme fraction rationnelle. Que vaut $\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^-} g(x)$?
4. Que dire de la série numérique $\sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)$?
5. Ceci est-il en contradiction avec le résultat d'Abel (dernier théorème du cours) ?

Exercice 3.13 (Courbe de croissance)

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{(-2)^n x^n}{n!}$. Exprimer à l'aide d'une fonction usuelle :

$$f(x)=3\left(1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n x^n}{n!}\right).$$

   Représenter la fonction f.

2. Soit l'équation différentielle $g'=2(3-g)$, avec la condition initiale $g(0)=0$. On suppose que g est développable en série entière :

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n \qquad \text{si } |x|<R$$

   Déterminer les coefficients a_n et exprimer simplement g.

3. On généralise l'étude précédente : soit H et τ deux constantes strictement positives et l'équation différentielle
$$\begin{cases} g' & = \tau(H-g) \\ g(0) & = 0 \end{cases}$$
Sans reprendre les calculs précédents, donner la fonction g solution. La représenter sur $\mathbb{R}^+$.
4. Cette fonction g est une courbe de croissance classique en biologie et très utilisée en statistiques. A votre avis, que représentent les paramètres τ et H en termes de croissance ?

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2005.

Exercice 3.14 (Série entière)
On considère la série entière
$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)}.$$

1. Déterminer son rayon de convergence R.
2. Préciser le comportement au bord.
3. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+2)}$.
4. Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ en 0.
5. Pour tout $x \in]-R, R[$, en déduire :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}.$$
6. Montrer que :
$$\forall x \in]-R,0[\cup]0,R[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{(1-x^2)\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}}{2x^2}.$$
7. Via un équivalent de $\ln(1-x)$, vérifier que l'on peut prolonger cette dernière expression en 0.
8. En utilisant la question 6, déterminer :
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$
9. Retrouver ces deux derniers résultats en considérant directement les séries numériques et la décomposition en éléments simples de la question 3.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2006.

Exercice 3.15 (Equation différentielle)
On considère l'équation différentielle :
$$f''(x) - f(x) = 0,$$
avec les conditions initiales :
$$\begin{cases} f(0) & = 2 \\ f'(0) & = 0 \end{cases}$$

On suppose qu'il existe une fonction solution f développable en série entière, c'est-à-dire $R \in]0, +\infty]$ et une suite de réels $(a_n)_{n\geq 0}$ tels que :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Que dire de a_0 et a_1 ?
2. Etablir une relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n. En déduire a_n pour tout $n \geq 0$.
3. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
4. Rappeler le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique. En déduire une expression plus simple de f.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2006.

Exercice 3.16 (Equation différentielle linéaire)
On considère l'équation différentielle linéaire avec second membre :

$$\begin{cases} f'(x) + f(x) & = -x \\ f(0) & = 2 \end{cases}$$

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction solution.
2. Donner son rayon de convergence.
3. Prouver que sa somme est égale à $e^{-x} - x + 1$.

Exercice 3.17 (Equation différentielle non linéaire)
On considère l'équation différentielle $y' = y^2$, dont on cherche une solution développable en série entière, c'est-à-dire sous la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

avec un rayon de convergence R strictement positif.

1. Exprimer en fonction des a_n les coefficients b_n du développement en série entière de y^2 :
$$y^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$
2. Donner les équations que doivent vérifier a_0, a_1, ... pour que l'équation différentielle soit satisfaite.
3. On impose de plus la condition initiale $y(0) = 1$. En déduire a_0, a_1, ... et exprimer y comme une fonction usuelle.
4. Retrouver directement le résultat en intégrant l'équation par la méthode des variables séparables.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de juin 2004.

Exercice 3.18 (Equations diophantiennes)
Soit p_n le nombre de façons de payer n euros avec des pièces de 1 et 2 euros. Pour déterminer p_n, on considère la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n x^n$.

1. Montrer qu'elle converge pour $|x| < 1$.
2. Établir que pour $|x| < 1$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}.$$
3. Décomposer $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ en éléments simples.
4. En déduire le développement de f en série entière sur $]-1, 1[$, puis p_n.
5. Retrouver p_n de façon très simple.
6. Généralisation : soit $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des entiers naturels strictement positifs et premiers entre eux dans leur ensemble. On note p_n le nombre de $m-$uplets d'entiers positifs vérifiant :
$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = n.$$
Donner la méthode pour calculer p_n. On montre qu'un équivalent de p_n lorsque n tend vers l'infini est :
$$p_n \sim \frac{n^{m-1}}{\alpha_1 \dots \alpha_m \cdot (m-1)!}.$$

Exercice 3.19 (Séries de Bertrand)

1. On considère la fonction
$$F : \left\{ \begin{array}{rl} [3, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(\ln x) \end{array} \right.$$
   – Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Quelle est la dérivée f de F ? Montrer que f est décroissante et positive sur $[3, +\infty[$.
   – En déduire la nature de la série :
$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n \ln n}.$$
   – Notons $S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n \ln n}$. Donner un équivalent de S_N.
2. Donner la nature de la série :
$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$$
Plus généralement, soit $\alpha \leq 1$, quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$?
3. Etudions la série $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n(\ln n)^2}$. Par un raisonnement voisin du point 3, montrer qu'on peut se ramener à l'étude d'une intégrale généralisée. Grâce au changement de variable $u = \ln x$, montrer alors la convergence de la série :
$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$
4. On considère la série entière :
$$\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}.$$

– Déterminer son rayon de convergence R. On note g sa somme.
– Etudier la convergence de la série en $x = R$ et $x = -R$.
– La fonction g est-elle continue sur $]-R, R[$? sur $[-R, R]$?

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2005.

Exercice 3.20 (Equation différentielle du second ordre)
On considère l'équation différentielle :

$$x(x^2+1)f''(x) - 2(x^2+1)f'(x) + 2xf(x) = 0,$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f^{(3)}(0) &= 1 \end{cases}$$

1. Utiliser l'équation différentielle pour calculer $f'(0)$.
2. Déterminer le développement en série entière de la fonction solution.
3. Préciser le rayon de convergence, ainsi que le comportement au bord.
4. On considère la série entière :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)} x^{2n+1}.$$

   Déterminer son rayon de convergence et le comportement au bord. On note $S(x)$ sa somme sur le domaine de convergence.
5. Calculer la somme de la dérivée $S'(x)$.
6. Grâce à une intégration par parties, déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto x \arctan x$ qui vaut 0 en $x = 0$.
7. En déduire une expression plus simple de $S(x)$.
8. En déduire $f(x)$. Que peut-on dire du domaine de définition de f ?

Corrigé
1. En remplaçant x par 0 dans l'équation différentielle, on obtient $f'(0) = 0$.
2. Supposons qu'il existe un réel $R > 0$ et une suite de réels $(a_n)_{n\geq 0}$ tels que :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

   Après calculs, on trouve que nécessairement :

$$f(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n-1)} x^{2n+1}.$$

3. Le rayon de convergence est $R = 1$ et il y a convergence en $x = 1$ et $x = -1$.
4. Le rayon de convergence et le comportement au bord sont les mêmes que pour la série entière définissant f. Plus précisément, on a :

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad f(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}S(x).$$

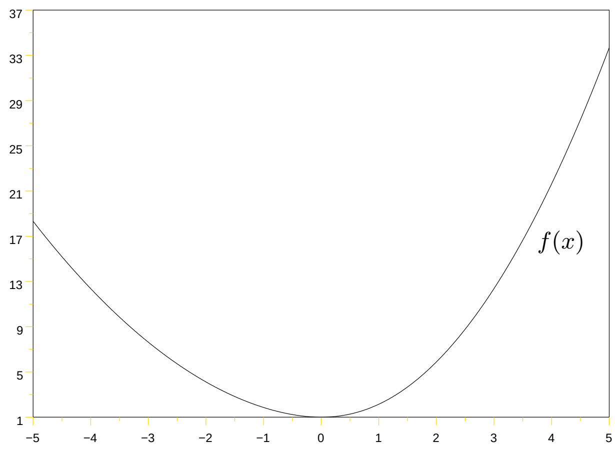

FIG. 3.11 – Représentation de la fonction f.

5. La fonction S est $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} x^{2n} = x \arctan x.$$

6. On peut effectuer une intégration par parties en prenant $u'(t) = t$, $v(t) = \arctan t$, $u(t) = \frac{1}{2}(1+t^2)$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$:

$$\int_0^x t \arctan t \, dt = \left[\frac{1}{2}(1+t^2)\arctan t\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{x}{2}.$$

7. La primitive de $x \mapsto x \arctan x$ qui vaut 0 en $x = 0$ est exactement S puisque $S(0) = 0$.
8. On en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{4}(1+x^2)\arctan x - \frac{x}{4}.$$

Sous cette forme, f est définie sur $\mathbb{R}$ et non pas simplement sur $]-,1,1[$ (voir figure 3.11), et vérifie l'équation différentielle initiale en tout réel x. Le développement en série entière n'est défini que sur $]-1,1[$ parce que la fonction arctan n'est développable en série entière que sur $]-1,1[$.

Exercice 3.21 (Janvier 2007)
On considère l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} f'(x) &= 2xf(x) \\ f(0) &= 1 \end{cases}$$

On suppose qu'il existe une fonction solution f développable en série entière en 0, c'est-à-dire $R \in]0,+\infty]$ et une suite de réels $(a_n)_{n\geq 0}$ tels que :

$$\forall x \in]-R,+R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Utiliser l'équation différentielle et la condition initiale pour déterminer $f'(0)$.
2. Que dire de a_0 et a_1 ?
3. Etablir une relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n. En déduire a_n pour tout $n \geq 0$.
4. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
5. Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto e^x$ et en déduire une expression simple de f.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2007.

Exercice 3.22 (Développement en série entière)
On considère la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{n!} x^n.$$

1. Déterminer son rayon de convergence R. On note $S(x)$ la somme de la série entière sur $]-R,+R[$.
2. En remarquant par exemple que $n^2+1 = n(n-1)+n+1$, montrer que pour tout $x \in]-R,+R[$, on a :
$$S(x) = (x^2+x+1)e^x.$$
3. Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{2^n n!}.$$
4. Donner le développement en série entière en 0 de la fonction f définie par :
$$f(x) = (x^2+3x+2)e^x.$$

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2007.

Exercice 3.23 (Valeur approchée)
1. Donner le développement en série entière en 0 de $\ln(1+x^2)$.
2. Préciser le rayon de convergence de la série obtenue, ainsi que le comportement au bord.
3. En déduire une expression de $\ln 2$ comme somme de série numérique.
4. Dans cette série, combien de termes suffit-il de prendre en compte pour obtenir une expression de $\ln 2$ au centième près ?
5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 1 + x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x.$$
   (a) Calculer la dérivée f' de cette fonction.
   (b) En déduire le développement en série entière de f.

Corrigé
Cet exercice est corrigé en annexe, sujet de janvier 2007.

Annexe A

Annales non corrigées

Université de Rennes 2
DEUG MASS $2^{ème}$ année
Dominique Dehay

Années 1995-2000

Examens d'Analyse

- Natures de séries (décembre 1995)
Etudiez la convergence des séries dont les termes généraux sont :

$$a_n = \frac{2n^2+3}{n^4-5} \qquad b_n = \frac{n^2+\sin n}{n^3+1} \qquad c_n = 3^{-n} n!$$

$$d_n = n!\; n^{-n} \qquad e_n = 5^n n^{-n} \qquad (\text{rappel : } \lim_{n\to\infty} n \ln(1+\tfrac{1}{n}) = 1)$$

$$f_n = 2^n n \qquad g_n = \frac{(-1)^{n+1}(3+\ln n)}{n} \qquad h_n = \frac{\sin[(n+\frac{1}{n})\pi]}{n}.$$

- Lien série/intégrale (décembre 1995)
Considérons une fonction $f : [0;\infty[\mapsto [0;\infty[$ continue décroissante et telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Notons formellement :

$$I_A = \int_0^A f(t)\sin(\pi t)\,dt \qquad I = \int_0^\infty f(t)\sin(\pi t)\,dt \qquad u_n = \int_n^{n+1} f(t)\sin(\pi t)\,dt.$$

1. Prouvez que :
$$|I_A - I_{[A]}| \le f([A]),$$
où $[A]$ désigne la partie entière du réel $A > 0$.
2. En déduire que l'intégrale I et la série de terme général u_n sont de même nature.
3. Montrez que la série de terme général u_n est alternée.
4. En déduire la nature de l'intégrale I.

5. Préciser la nature de l'intégrale :

$$\int_0^{\infty} \frac{t}{1+t^2} \sin t \, dt.$$

- Séries entières (juin 1996)
Considérons les séries entières :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n} x^n.$$

1. Déterminer leurs rayons de convergence.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n\geq 2} a_n x^n,$$

   où $a_n = \frac{1}{n^n} + \frac{(-1)^n}{\ln n}$.
3. Montrer que cette série entière converge pour $x = 1$. Cette convergence est-elle absolue ? Que dire pour $x = -1$?
4. Pour $x \in]-1;1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[-a;a]$, $0 < a < 1$, et sur $[0;1]$. Que peut-on dire de la fonction limite ?

- Equation différentielle linéaire (juin 1996)
On considère l'équation différentielle linéaire avec second membre :

$$\left\{ \begin{array}{rl} f'(x) + f(x) & = -x \\ f(0) & = 2 \end{array} \right.$$

1. Déterminer la série entière dont la somme vérifie cette équation.
2. Donner son rayon de convergence.
3. Vérifier que sa somme est égale à $e^{-x} - x + 1$.

- Convergence normale, convergence uniforme (septembre 1996)

1. En utilisant le développement en série entière de $\ln(1-x)$, prouver que pour tout x non nul, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x^2)^n}.$$

2. Soit $a > 0$ quelconque fixé. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ est normalement convergente sur $[a;\infty[$. Que peut-on en déduire sur la continuité de la somme, et sur les propriétés de ses primitives ?
3. En utilisant la première question, donner une expression simple de cette somme.
4. Prouver que la convergence de la série n'est pas uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

- Natures de séries (décembre 1996)

Donner la nature de chacune des séries numériques dont les termes généraux suivent

$$u_n = (3+n)^n e^{-n^2} \qquad v_n = ne^{-n} \qquad w_n = \frac{e^n}{n!}.$$

- Valeur approchée (décembre 1996)

Considérons la série numérique de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}.$$

1. Montrez que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est semi-convergente. Notons sa somme S.
2. Trouvez n tel que $|S_n - S| \leq 0,1$. En déduire des valeurs approchées de S à $0,1$ près par défaut et par excès.
3. A partir de l'encadrement de S par S_{10} et S_{11}, pouvez-vous obtenir une valeur approchée de S à $0,1$ près par excès par un nombre décimal ayant 1 chiffre après la virgule ?

- Séries numériques liées (décembre 1996)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres positifs et posons :

$$v_n = u_n/(1+u_n).$$

Etudions selon la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ celle de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$.

1. Prouvez que si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, alors les deux séries sont de même nature.
2. Que pouvez-vous dire si la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0 ?
3. Posons $w_n = u_n/(1+u_n^2)$. Prouvez que si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge.
4. Prouvez que si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et si la suite $(u_n)_n$ est bornée, alors il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout $n > 0$:
$$w_n \geq \frac{u_n}{1+c^2}.$$
Que dire de la nature de la série $\sum_{n\geq 0} w_n$?
5. Etudiez la nature des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} w_n$ lorsque $u_n = \sqrt{n}$, puis lorsque $u_n = n^2$.

- Somme d'une série numérique via une série entière (juin 1997)

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n^2-1}$.
2. Prouver que si $0 < |x| < 1$, la somme $S(x)$ peut s'écrire sous la forme :
$$S(x) = \left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right) \ln(1-x) + \frac{1}{2} + \frac{x}{4}.$$
3. En déduire que :
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}.$$

- Convergence uniforme non absolue (juin 1997)
Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(t)$, avec :

$$u_n(t) = \frac{(-1)^n}{n+|t|}$$

n'est pas absolument convergente, mais est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

- Série de fonctions alternée (septembre 1997)
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications positives définies sur un ensemble X, convergeant uniformément vers l'application nulle et telle que $u_n(x) \geq u_{n+1}(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$.

1. – Prouver que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ converge simplement sur X.
   – En utilisant la majoration du reste d'une série alternée, établir que la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ est uniforme sur X.
2. Application : montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

- Fraction rationnelle (septembre 1997)

1. Donner les rayons des séries entières suivantes $\sum_{n\geq 0} \frac{2^{n+1}}{5} x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{-1}{5\ .\ 3^{n+1}} x^n$. En déduire le rayon de la série entière :
$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2^{n+1}}{5} - \frac{1}{5\ .\ 3^{n+1}} \right) x^n.$$
Comportement au bord ?
2. Réduire en éléments simples la fraction rationnelle : $f(x) = \frac{1}{2x^2-7x+3}$.
3. On rappelle que, pour tout $x \in]-1, 1[$: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. En déduire que :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{5} - \frac{1}{5\ .\ 3^{n+1}} \right) x^n.$$
On précisera pour quelles valeurs de x cette identité est valable.

- Natures de séries (décembre 1997)

1. Etudier la nature des séries dont les termes généraux suivent :
$$u_n = e^{-n} n^3 \qquad v_n = \frac{2n^3-5}{n^5+\ln n} \qquad w_n = (-1)^n \frac{3+\ln n}{n}.$$
2. Préciser la nature de la série de terme général :
$$u_n = (-1)^n \frac{n}{5n^2+3}.$$
Comment peut-on déterminer la première décimale de l'écriture de la somme ? La trouver en justifiant la méthode utilisée.

- Séries de Riemann, séries de Bertrand (décembre 1997)
Nous considérons une série dont le terme général $(u_n)_{n\geq 0}$ est positif et décroissant. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Nous allons démontrer que les deux séries de termes généraux u_n et $v_n = k^n u_{k^n}$ sont de même nature.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$:
$$u_{k^n} + u_{k^n+1} + \cdots + u_{k^{n+1}-1} \leq (k-1)v_n,$$
et :
$$u_{k^n+1} + u_{k^n+2} + \cdots + u_{k^{n+1}} \geq (1-\frac{1}{k})v_{n+1}.$$
Pour cela, dénombrer les termes de chaque somme et utiliser la décroissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire que :
$$u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k^{n+1}-1} \leq (k-1)(v_1 + + \cdots + v_n),$$
et :
$$u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k^{n+1}} \geq (1-\frac{1}{k})(v_2 + \cdots + v_{n+1}).$$
3. Conclure.
4. Applications :
   - Retrouvez la nature des séries de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ (reconnaître en $\sum v_n$ une série géométrique).
   - Trouvez la nature des séries de Bertrand $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ (reconnaître en $\sum v_n$ une série de Riemann).

- Fonction Zeta de Riemann (avril 1998)

Considérons la suite de fonctions numériques de la variable réelle $(f_n)_{n\geq 1}$, où $f_n(x) = n^{-x}$.

1. Quel est l'ensemble des nombres réels x tels que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge ?
2. Etudier la convergence normale de cette série de fonctions.
3. Montrer que sa somme $\zeta = \sum_n f_n$ est une application dérivable sur la demi-droite $x > 1$ de $\mathbb{R}$.

- Série entière (avril 1998)

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{n!}$.
2. Exprimer sa somme à l'aide d'une fonction connue.
3. Que dire de la fonction dérivée ?

- Convergence simple, convergence uniforme (juin 1998)

Considérons la suite de fonctions numériques $(f_n)_{n\geq 1}$ définies pour tout réel x par :
$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n>0}$ converge simplement vers la fonction exponentielle.
2. Pour tout entier $n > 0$, justifier les limites suivantes :
$$\lim_{x\to+\infty} |f_n(x) - \mathrm{e}^x| = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} |f_n(x) - \mathrm{e}^x| = +\infty$$
En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge uniformément sur aucun intervalle non borné de $\mathbb{R}$.

3. En utilisant le développement en série entière de $\ln(1+t)$, établir que pour tout $x > -\frac{n}{2}$ et tout $n \geq 1$:
$$x - \frac{x^2}{n} \leq n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x.$$
En déduire la convergence uniforme sur $[-a, a]$ de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$, pour tout $a > 0$.

- Equivalent du reste (septembre 1998)

Considérons la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$.

1. Justifier la convergence de cette série. Notons S_n la somme partielle des n premiers termes, S la somme de la série et $R_n = S - S_n$ le reste à l'ordre n.
2. Via le lien série/intégrale, établir la double inégalité :
$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq R_n \leq \frac{1}{2n^2}.$$
En déduire un équivalent de R_n.
3. En déduire que :
$$S_n + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
est une valeur approchée de la somme S à $\frac{1}{2n^3}$ près.
4. En déduire le nombre de termes à prendre en compte pour obtenir une valeur approchée de S à 10^{-8} près.

- Convergence et intégration (septembre 1998)

Pour tout entier $n \geq 1$, considérons la fonction numérique f_n définie sur $[0; 1]$, affine sur chacun des intervalles $[0; \frac{1}{2n}]$, $[\frac{1}{2n}; \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{2n}; 1]$, et telle que $f_n(0) = f_n(\frac{1}{n}) = f_n(1) = 0$ et $f_n(\frac{1}{2n}) = n$.

1. Représenter la fonction f_n.
2. Etudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n>0}$.
3. Déterminer :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) dt.$$
4. Conclure.

- Natures de séries (décembre 1998)

Etudier la nature des séries de termes généraux :
$$u_n = \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1} \qquad v_n = n^2 \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \qquad w_n = \frac{n}{5^n} - \frac{(-1)^n}{3n-1}.$$

- Série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et suite $(nu_n)_{n\geq 0}$ (décembre 1998)

1. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs décroissants qui converge. En utilisant la propriété de Cauchy, montrer que $\lim_{n\to\infty} nu_{2n} = 0$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$.
2. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :
$$u_n = \begin{cases} k^{-\frac{3}{2}} & \text{si } n = k^3,\ k \in \mathbb{N}^* \\ n^{-2} & \text{sinon} \end{cases}$$
Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente. Que dire de la suite $(nu_n)_{n\geq 1}$?

3. Considérons la série $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1}(-1)^n n^{-\frac{1}{5}}$. Est-elle convergente ? Que dire de la suite $(nu_n)_n$?
4. Considérons la série $\sum_{n\geq 2} u_n = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$. Est-elle convergente ? Que dire de la suite $(nu_n)_n$?

- Formule de Stirling ou presque (décembre 1998)
Posons :

$$u_n = \frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln u_n.$$

1. Montrer que la série de terme général $w_n = v_n - v_{n-1}$, $n \geq 2$, est convergente (on pourra utiliser le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1-x)$).
2. En déduire que la suite $(nu_n)_{n\geq 1}$ converge. Notons α sa limite.
3. Donner en fonction de α un équivalent de $n!$

- Valeur approchée (décembre 1998)

1. Etablir la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n}{(2n+1)5^n}$.
2. De l'inégalité $\frac{n}{2n+1} \leq \frac{1}{2}$, déduire la majoration du reste :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n \leq \frac{1}{8.5^n}.$$

3. Déterminer les entiers n pour que la valeur de la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ soit calculée respectivement à 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4} près par la somme des n premiers termes.

- Séries numériques liées (décembre 1998)
Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série à termes positifs, convergente et non identiquement nulle.

1. Montrer la convergence vers 0 de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$, où :

$$v_n = \frac{1}{n}\left(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right).$$

2. Montrer que la série de terme général v_n diverge.
3. Montrer que la série de terme général :

$$w_n = \frac{1}{n(n+1)}\left(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right)$$

converge, et que sa somme est égale à celle de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ (Indication : on pourra simplifier l'expression $w_n + w_{n+1}$ et décomposer la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$).

- Equation différentielle (juin 1999)
Trouver la série entière dont la somme vérifie l'équation différentielle avec condition initiale :

$$f'(x) + 3f(x) + 9x = 0 \qquad f(0) = 2.$$

1. Déterminer son rayon de convergence.
2. Prouver que sa somme est égale à $e^{-3x} - 3x + 1$.

- Convergence et intégrale (juin 1999)
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres positifs. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0;1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n(1-nx) & \text{pour } x \in]0; \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{pour } x \in \{0\} \cup [\frac{1}{n}; 1] \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n>0}$ converge simplement vers 0 sur $[0;1]$.
2. Déterminer $\int_0^x f_n(t)dt$ pour tout $x \in [0;1]$ et tout entier $n > 0$.
3. Montrer que nous pouvons choisir les réels a_n de sorte que pour tout $x \in]0;1]$ on ait :
   – Premier cas : $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = +\infty$.
   – Deuxième cas : $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = l$, avec $l \in \mathbb{R}$ fixé a priori.
   – Troisième cas : $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 0$.
4. Comment faut-il choisir les a_n pour que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $[0;1]$? Que dire de la suite des intégrales sur $[0;1]$ dans ce cas ?

- Série de fonctions et dérivation (septembre 1999)
On s'intéresse aux séries de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(t)$ et $\sum_{n\geq 0} g_n(t)$, avec :

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n}{t^2+n^2} \qquad g_n(t) = \frac{t}{(t^2+1)^n}.$$

1. Dans chacun des cas, donner l'ensemble de convergence de la série.
2. Préciser si la somme est dérivable.

- Valeur approchée (décembre 1999)
Considérons la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n(2n-1)}{5^{2n-1}}, \qquad n \geq 1.$$

1. Etudier la convergence de cette série.
2. Trouver un entier n tel que la valeur absolue du reste de rang n soit inférieure à $0,001$.
3. Donner une approximation à $0,001$ près par excès de la somme de cette série sous forme d'une fraction. Quels sont les trois premiers chiffres après la virgule de l'écriture décimale de cette somme ?

- Séries liées (décembre 1999)
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs divergente.

1. Nous allons montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge, avec :

$$v_n = \frac{u_n}{S_n} = \frac{u_n}{u_0+u_1+\cdots+u_n}.$$

   (a) Vérifier que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} \neq 1 \Longrightarrow \sum v_n \text{ diverge.}$$

   (b) Posons pour tout $n \geq 1$:

$$w_n = \ln S_n - \ln S_{n-1}.$$

   Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} w_n$. En utilisant l'équivalent $\ln(1+x) \sim_0 x$, en déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$.

(c) Conclure.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et posons :
$$x_n = \frac{u_n}{(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)^\alpha} = \frac{u_n}{(S_n)^\alpha}.$$
(a) Montrer que la série de terme général x_n diverge lorsque $\alpha \leq 1$.

(b) Supposons maintenant $\alpha > 1$.
– Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}_\alpha$ d'équation $y = \frac{1}{x^\alpha}$.
– Montrer que le terme x_n est représenté par l'aire d'un rectangle dont un côté est porté par l'axe Ox et dont un sommet se trouve sur la courbe $\mathcal{C}_\alpha$.
– En déduire une comparaison entre la somme $\sum_{k=2}^n x_n$ et l'intégrale :
$$\int_{u_0}^{S_n} x^{-\alpha} dx.$$
– Conclure quant à la nature de la série :
$$\sum_{n\geq 0} x_n = \sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{(S_n)^\alpha}.$$

- Série de fonctions (juin 2000)

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est convergente pour tout x de $]0;\infty[$. Notons $S(x)$ sa somme.
2. Vérifier que pour tout $x > 0$ on a :
$$\left| S(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{x+k} \right| \leq \frac{1}{x+n}.$$
En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $]0;\infty[$.
3. Trouver la limite de la somme $S(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
4. Montrer que cette série converge uniformément sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun des points $-n$, où $n \in \mathbb{N}$.
5. Etablir que la somme $S(x)$ de cette série est une fonction dérivable en x pour tout $x \neq -n$.

- Equation différentielle (juin 2000)

Considérons la série entière
$$\sum_{n\geq 0} C_{2n}^n x^n.$$

1. Déterminer son rayon de convergence.
2. Quel est l'ensemble de définition de la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n x^n$? Cette fonction est-elle dérivable ? Quelle est sa dérivée lorsqu'elle existe ?
3. Etablir une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f.
4. Intégrer l'équation ainsi obtenue. En déduire la valeur de :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n C_{2n}^n}{2^{2n}}.$$

- Série entière et convergence au bord du domaine (septembre 2000)
Considérons la série entière de terme général $(-3)^n(n+1)x^n$, pour $n \geq 0$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. Notons g sa somme.
2. Exprimer une primitive de g comme la somme d'une série entière dans le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geq 0}(-3)^n(n+1)x^n$.
3. En déduire une expression de $g(x)$ comme fonction rationnelle de x. Montrer l'existence de :

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^-} g(x).$$

Que dire de la série numérique $\sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)$?

Annexe B

Annales corrigées

Université de Rennes 2
DEUG MASS $2^{ème}$ année
Arnaud Guyader

Mercredi 21 Avril 2004
durée : 1 heure

Contrôle continu d'Analyse

Les exercices sont indépendants.

I. Natures de séries
Préciser la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1}(\frac{n}{n+1})^n$;
2. $\sum_{n\geq 1}\ln(n\sin\frac{1}{n})$;
3. $\sum_{n\geq 3}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

II. Somme de série
On considère la série :

$$\sum_{n\geq 2}\frac{n}{(n^2-1)^2}.$$

1. Quelle est sa nature ?
2. Décomposer le terme général en fonction de $\frac{1}{(n+1)^2}$ et $\frac{1}{(n-1)^2}$.
3. En déduire la somme de la série.

III. Suite de fonctions
Soit la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \frac{ne^x}{n+x}.$$

1. Déterminer la limite simple des f_n.
2. Y a-t-il convergence uniforme ?
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}\, dx$.

IV. Équivalent de somme partielle (bonus)
On considère la série :

$$\sum_{n\geq 3} \frac{\ln n}{n}.$$

1. Quelle est sa nature ?
2. Soit s_N la somme partielle d'ordre N : $s_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{\ln n}{n}$. Encadrer s_N par deux intégrales.
3. En déduire un équivalent de la suite (s_N).

Université de Rennes 2
DEUG MASS 2ème année
Arnaud Guyader

Mercredi 21 Avril 2004
durée : 1 heure

Corrigé du Contrôle d'Analyse

I. Natures de séries

1. La série $\sum_{n\geq 1}(\frac{n}{n+1})^n$ est trivialement divergente puisque la limite de son terme général n'est pas nulle. En effet :
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{e}\neq 0.$$

2. On utilise le développement limité de la fonction sinus en 0 : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, ce qui donne :
$$\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right) = \ln\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) = \ln\left(1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
la dernière égalité découlant du développement limité du logarithme en 0 : $\ln(1-x) = -x+o(x)$. Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc les deux séries $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{6n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sont absolument convergentes. Par suite, la série d'origine est convergente.

   Remarque. Rappelons que si une suite (u_n) tend vers un réel L, on peut écrire $u_n\sim L$ si $L\neq 0$, mais attention au cas où $L=0$: l'écriture $u_n\sim 0$ signifie que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang. En particulier, pour cet exemple, on a une suite $(u_n = n\sin\frac{1}{n})$ qui tend vers 1, ce qu'on peut écrire $u_n\sim 1$, donc $(\ln u_n)$ tend vers 0, mais on n'a pas $\ln u_n \sim \ln 1 = 0$: ceci voudrait dire que $n\sin\frac{1}{n}$ est nulle pour n assez grand, ce qui est clairement faux ! Dans ce genre de situation, il est toujours préférable d'écrire un développement limité.

3. $\sum_{n\geq 3}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ est une série alternée. Pour pouvoir appliquer le critère des séries alternées, il faut vérifier que la suite $(\frac{\ln n}{n})_{n\geq 3}$ est décroissante vers zéro. Pour la limite, on a a priori une forme indéterminée "$\frac{\infty}{\infty}$", mais on sait que $\ln n = o(n)$ donc ça tend bien vers zéro. Pour la décroissance, il suffit de vérifier que la fonction $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ est décroissante sur $[3,+\infty[$. Or $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, quantité négative dès que x est supérieur à $e\approx 2.72$, donc a fortiori pour $x\geq 3$. Au total, le critère s'applique et la série est convergente (mais clairement non absolument convergente).

II. Somme de série

On considère la série $\sum_{n\geq 2}\frac{n}{(n^2-1)^2}$.

1. Puisque $n^2-1 \sim n^2$, on a $\frac{n}{(n^2-1)^2} \sim \frac{1}{n^3}$. Les termes généraux sont positifs. La série considérée est donc de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$, qui est convergente.
2. On obtient : $\frac{n}{(n^2-1)^2} = \frac{1}{4}(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2})$.
3. Si on note $s_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{n}{(n^2-1)^2}$ la somme partielle d'ordre N de la série, la décomposition ci-dessus donne une somme télescopique et il reste : $s_N = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{N^2} - \frac{1}{(N+1)^2}$, d'où l'on déduit que : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2} = \lim_{N\to\infty} s_N = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.

III. Suite de fonctions

Soit la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \frac{ne^x}{n+x}$.

1. La limite simple ne pose pas problème, puisque pour tout x de $[0,1]$: $\lim_{n\to\infty} \frac{ne^x}{n+x} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{1+x/n} = e^x$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge donc simplement vers la fonction exponentielle sur le segment $[0,1]$.
2. Pour établir la convergence uniforme, considérons $g_n(x) = |e^x - f_n(x)| = \frac{xe^x}{n+x}$. Il faut montrer que $\alpha_n = \sup_{x\in[0,1]} g_n(x)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Pour ce faire, on peut étudier les variations de g_n : le calcul de g_n' montre que cette dérivée est positive donc g_n est croissante sur $[0,1]$ et $\alpha_n = g_n(1) = \frac{e}{n+1}$. On a bien $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ donc la convergence est uniforme. On pouvait aussi tout simplement remarquer que pour tout x dans $[0,1]$, $xe^x \leq e$ et $n + x \geq n$, donc $\alpha_n \leq \frac{e}{n}$.
3. La convergence des fonctions intégrables f_n vers la fonction exponentielle est uniforme sur le segment $[0,1]$, donc on peut passer la limite sous le signe somme :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

IV. Équivalent de somme partielle

On considère la série $\sum_{n\geq 3} \frac{\ln n}{n}$.

1. Pour tout $n \geq 3$, on a $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} > 0$, or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc la série considérée $\sum_{n\geq 3} \frac{\ln n}{n}$ diverge également.
2. Pour tout $n \geq 3$, puisque $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$ (cf Exercice I), on a l'encadrement vu en cours :
$$\int_3^{N+1} \frac{\ln x}{x}\,dx \leq s_N \leq \frac{\ln 3}{3} + \int_3^N \frac{\ln x}{x}\,dx.$$
3. On en déduit en particulier l'équivalence entre somme partielle et intégrale :
$$s_N \sim \int_3^N \frac{\ln x}{x}\,dx.$$
Il reste à remarquer que $\frac{\ln x}{x}$ est la dérivée de $\frac{1}{2}\ln^2 x$ pour obtenir :
$$s_N \sim \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_3^N = \frac{1}{2}(\ln^2 N - \ln^2 3),$$
ce qui donne finalement : $s_N \sim \frac{1}{2}\ln^2 N$.

Université de Rennes 2
DEUG MASS 2ème année
Arnaud Guyader

Lundi 14 juin 2004
durée : 2 heures

Examen d'Analyse

Les exercices sont indépendants.

I. Suite de fonctions
On considère la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} [-1,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x}{1+n^2x^2} \end{cases}$$

1. La suite (f_n) converge-t-elle simplement ?
2. La convergence est-elle uniforme ?
3. Calculer f_n'. La suite (f_n') converge-t-elle simplement ? uniformément ?

II. Somme de série
Soit a et b deux réels. On considère la série numérique :

$$\sum_{n\geq 1}(\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)).$$

1. Déterminer a et b pour que cette série converge (on pourra utiliser des développements limités).
2. Pour ces valeurs de a et b, calculer alors la somme partielle :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}(\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)).$$

3. En déduire la somme de la série.

III. Valeur approchée de π

1. Rappeler le développement en série entière de $\arctan x$, ainsi que son rayon de convergence R.
2. Que dire en $x = R$? En déduire une expression de π comme somme de série numérique.
3. Dans cette somme, combien de termes faut-il prendre en compte pour obtenir une valeur approchée de π à 0.01 près ?

IV. Equation différentielle
On considère l'équation différentielle $y' = y^2$, dont on cherche une solution développable en série entière, c'est-à-dire sous la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

avec un rayon de convergence R strictement positif.

1. Exprimer en fonction des a_n les coefficients b_n du développement en série entière de y^2 :
$$y^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$
2. Donner les équations que doivent vérifier a_0, a_1, ... pour que l'équation différentielle soit satisfaite.
3. On impose de plus la condition initiale $y(0) = 1$. En déduire a_0, a_1, ... et exprimer y comme une fonction usuelle.
4. Retrouver directement le résultat en intégrant l'équation par la méthode des variables séparables.

V. Fonction Zeta de Riemann
Pour $n \geq 1$, considérons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$.

1. Pour quelles valeurs de x la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est-elle convergente ? On note alors $\zeta(x)$ la fonction somme.
2. Soit $a > 1$ fixé. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. En déduire que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
3. Soit $x > 1$ fixé. Calculer :
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\, dt.$$
4. En comparant à une intégrale, montrer que pour tout $x > 1$:
$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{x}{x-1}.$$
5. En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque $x \to 1^+$.

VI. Suite de Fibonacci
Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

1. Montrer que $\forall n \geq 0$, on a $0 \leq a_n \leq 2^n$. En déduire que le rayon R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.
2. Pour $|x| < R$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que :
$$\forall |x| < R \qquad (1 - x - x^2) f(x) = x.$$
3. En déduire a_n en fonction des racines du polynôme $X^2 + X - 1$.

Université de Rennes 2
DEUG MASS 2ème année
Arnaud Guyader

Lundi 14 Juin 2004
durée : 2 heures

Corrigé de l'Examen d'Analyse

I. Suite de fonctions
On considère la suite de fonctions

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll} [-1,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x}{1+n^2x^2} \end{array} \right.$$

1. Pour $x \neq 0$, on a $\lim_{n\to\infty}(1+n^2x^2) = +\infty$, donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ceci est encore clairement vrai pour $x = 0$. En résumé, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle $f = 0$ sur l'intervalle $[-1,1]$.
2. Pour savoir si (f_n) converge uniformément vers f, il convient d'étudier la suite de fonctions (g_n) définies par $g_n = |f_n - f| = |f_n|$. Chaque fonction g_n est paire, donc on se restreint à l'intervalle $[0,1]$. On obtient :
$$g_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$
Donc $g_n'(x) = 0$ pour $x = 1/n$. Ainsi g_n est positive, croissante de 0 à $1/n$, décroissante de $1/n$ à 1. Son maximum est donc atteint au point $1/n$ et vaut :
$$\alpha_n = g_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}.$$
On a bien $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-1,1]$.
3. On a donc
$$f_n' : \left\{ \begin{array}{ll} [-1,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \end{array} \right.$$
Pour $x \neq 0$, on a $(1+n^2x^2)^2 \sim n^4x^4$ et $1 - n^2x^2 \sim -n^2x^2$, donc :
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} -\frac{n^2x^2}{n^4x^4} = 0.$$
Par contre, si $x = 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 1$. Au total, la suite de fonctions (f_n') converge simplement vers la fonction
$$g : \left\{ \begin{array}{ll} [-1,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$
Les fonctions f_n' sont toutes continues, alors que g ne l'est pas, donc la convergence ne peut être uniforme.

II. Somme de série

Soit a et b deux réels. On considère la série numérique :

$$\sum_{n\geq 1}(\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)).$$

1. Pour que cette série converge, il faut déjà qu'elle ne diverge pas trivialement, c'est-à-dire qu'on doit avoir $\lim_{n\to\infty}(\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)) = 0$. Or :

$$\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) = (1+a+b)\ln n + a\ln(1+\frac{1}{n}) + b\ln(1+\frac{2}{n}).$$

   Les deux derniers termes tendent vers zéro, le premier si et seulement si $a+b=-1$. C'est donc la première condition à respecter. Dans ce cas, un développement limité du terme général de la série est :

$$\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) = \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

   qui est le terme général d'une série convergente si et seulement si $a+2b=0$: c'est la seconde condition à respecter. La résolution du système d'équations :

$$\begin{cases} a+b &= -1 \\ a+2b &= 0 \end{cases}$$

   donne $a=-2$ et $b=1$.

2. La somme partielle :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}(\ln n - 2\ln(n+1) + \ln(n+2))$$

   est télescopique et on obtient tout simplement :

$$S_N = -\ln 2 - \ln(N+1) + \ln(N+2).$$

3. La somme de la série est donc :

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty}\left(-\ln 2 + \ln\frac{N+2}{N+1}\right) = -\ln 2.$$

III. Valeur approchée de π

1. Le développement en série entière de $\arctan x$ est :

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

   Son rayon de convergence est $R=1$.

2. En $x=1$, on obtient la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. C'est une série alternée convergente puisque la suite $(\frac{1}{2n+1})_{n\geq 0}$ décroît vers zéro. Donc d'après le théorème de passage à la limite, on a :

$$\arctan 1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

   Par ailleurs $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ donc π s'exprime comme la somme de la série alternée :

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{2n+1}.$$

3. Pour obtenir une valeur approchée de π à 0.01 près, on applique le résultat de majoration du reste d'une série alternée : avec les notations usuelles $|R_N| \leq a_{N+1}$. Ici :

$$\frac{4}{2N+3} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow N \geq 198.5$$

Il suffit donc de sommer les 199 premiers termes.

IV. Equation différentielle

On considère l'équation différentielle $y' = y^2$, dont on cherche une solution développable en série entière, c'est-à-dire sous la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

avec un rayon de convergence R strictement positif.

1. Considérons le développement en série entière de y^2 :

$$y^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Le produit de Cauchy du développement en série entière de y par elle-même donne pour tout $x \in]-R, R[$:

$$y^2(x) = y(x) \cdot y(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0) x^n,$$

ce qui donne pour tout $n \geq 0$:

$$b_n = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0.$$

2. D'autre part, le développement de la série dérivée est pour tout $x \in]-R, R[$:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Pour que y satisfasse l'équation différentielle $y' = y^2$, il faut donc que les a_n vérifient

$$\left\{\begin{array}{ll} a_1 & = a_0^2 \\ 2a_2 & = 2a_0 a_1 \\ 3a_3 & = a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0 \\ \ldots & = \ldots \\ (n+1)a_{n+1} & = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0 \\ \ldots & = \ldots \end{array}\right.$$

3. La condition initiale $y(0) = 1$ donne $a_0 = 1$. Introduit dans le système d'équations ci-dessus, ceci donne de proche en proche $a_n = 1$ pour tout n. Donc le développement en série entière de y est tout simplement :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

de rayon de convergence $R = 1$.

4. Ce résultat peut se retrouver en intégrant l'équation par la méthode des variables séparables. On commence par noter que la fonction nulle est une solution maximale de l'équation $y' = y^2$; d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, toute autre solution ne s'annule pas et on peut donc diviser sans scrupule par y^2, ce qui donne :

$$y' = y^2 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x + \lambda \Leftrightarrow y = \frac{-1}{x+\lambda}.$$

La prise en compte de la condition initiale $y(0) = 1$ donne :

$$y(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x < 1.$$

V. Fonction Zeta de Riemann

Pour $n \geq 1$, considérons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$.

1. D'après le critère de Riemann, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge pour tout $x > 1$, i.e. elle est simplement convergente sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
2. Soit $a > 1$ fixé. Pour $x \in [a, +\infty[$, la majoration $0 \leq \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$ et la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ montrent que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Puisque les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ sont continues sur $[a, +\infty[$, on en déduit que ζ est continue sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
3. Soit $x > 1$ fixé. Alors :
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}.$$
4. Soit $x > 1$ fixé. Pour tout $t \in [n, n+1]$, $n \geq 1$, l'encadrement :
$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$
donne en intégrant membre à membre :
$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \frac{1}{n^x},$$
donc pour tout $n > 1$:
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,dt,$$
et en considérant le cas $n = 1$ à part, on en déduit :
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt,$$
c'est-à-dire précisément :
$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{x}{x-1}.$$

5. On en déduit que pour tout $x > 1$:
$$1 \leq \zeta(x) \cdot (x-1) \leq x$$
donc $\lim_{x\to 1^+} \zeta(x)\cdot(x-1) = 1$, c'est-à-dire qu'en 1^+ :
$$\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}.$$

VI. Suite de Fibonacci

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \geq 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

1. Pour montrer que $\forall n \geq 0$, on a $0 \leq a_n \leq 2^n$, on raisonne par récurrence :
   - c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
   - supposons la relation vraie jusqu'à l'ordre $(n-1)$, alors :
   $$0 \leq a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \leq 2^{n-1} + 2^{n-2} \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n,$$
   et la relation est encore vraie à l'ordre n.

   Alors pour tout $|x| < \frac{1}{2}$:
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (2|x|)^n < +\infty,$$
   i.e. la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente : ceci assure que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.
2. Pour $|x| < R$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors $(1-x-x^2)f(x)$ est une série entière :
   $$(1-x-x^2)f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}.$$
   En réindexant les deux dernières sommes et en faisant attention aux premiers termes, on obtient :
   $$(1-x-x^2)f(x) = a_0 + a_1 x - a_0 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (a_n - a_{n-1} - a_{n-2}) x^n.$$
   Puisque $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et via la relation de récurrence définissant a_n, on a bien pour tout $|x| < R$:
   $$(1-x-x^2)f(x) = x.$$
3. Notons $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ les racines du polynôme $X^2 + X - 1$. On a donc :
   $$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = -\frac{x}{(x-\alpha)(x-\beta)},$$
   or la fraction rationnelle du membre de droite peut se réduire en éléments simples. Après calculs :
   $$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{\alpha-x} - \frac{\beta}{\beta-x}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-(x/\alpha)} - \frac{1}{1-(x/\beta)}\right),$$

et pour tout $|x| < \min(|\alpha|, |\beta|) = \alpha$, le développement de la série géométrique donne :

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} \right) x^n.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} \right) = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \left(\left(\sqrt{5}+1 \right)^n + (-1)^{n+1} \left(\sqrt{5}-1 \right)^n \right).$$

Université de Rennes 2
Licence MASS 2
Arnaud Guyader

Mercredi 1er Décembre 2004
durée : 1 heure

Contrôle continu d'Analyse

Les exercices sont indépendants.

I. Valeur approchée
On considère la série

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right).$$

1. Montrer qu'elle est convergente. On note S sa somme.
2. Est-elle absolument convergente ?
3. Soit S_{49} la somme des 50 premiers termes de la série. Majorer l'erreur d'approximation :

$$|S-S_{49}|.$$

II. Suite de fonctions
Soit la suite de fonctions $f_n : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x)=\ln\left(e^x+\frac{x}{n}\right).$$

1. Déterminer la limite simple f des f_n.
2. Montrer que $f_n(x)-f(x)\geq 0$ pour tout $x\geq 0$. A-t-on convergence uniforme de (f_n) vers f ?
3. Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \ln\left(e^x+\frac{x}{n}\right)\,dx.$$

III. Natures de séries
Préciser la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0}\frac{n+\sin n}{n^2+1}$
2. $\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$
3. $\sum_{n\geq 1}\left(1-(\cos\frac{1}{n^2})^n\right)$

IV. Convergence de suite via une série (bonus)

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2}u_n$, avec :

$$u_n=\frac{1}{n}+\ln\frac{n-1}{n}.$$

2. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$, définie par :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Déduire de la question précédente que (v_n) admet une limite γ.

Université de Rennes 2
Licence MASS 2
Arnaud Guyader

Mercredi 1er Décembre 2004
durée : 1 heure

Corrigé du contrôle d'Analyse

I. Valeur approchée

On considère la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

1. Via l'expression conjuguée, le terme général se réécrit sous la forme :
$$(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}+n}=(-1)^n a_n.$$
La série est alternée et :
$$\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)\geq\sqrt{n^2+1}+n,$$
donc $a_{n+1}<a_n$ et la suite (a_n) est décroissante. Sa limite est clairement 0. Elle est donc convergente par le critère des séries alternées.
2. On a cette fois :
$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}+n}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right|\sim\frac{1}{2n}$$
Et la série $\sum\frac{1}{2n}$ est divergente, donc la série n'est pas absolument convergente.
3. Pour une série alternée vérifiant le critère des séries alternées, on a :
$$|R_{49}|=|S-S_{49}|\leq a_{50}=\frac{1}{\sqrt{50^2+1}+50}\leq\frac{1}{100}.$$
L'erreur d'approximation est donc inférieure à 10^{-2}.

II. Suite de fonctions

Soit la suite de fonctions $f_n:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définies par $f_n(x)=\ln(e^x+\frac{x}{n})$.

1. Soit $x\geq 0$: $\lim_{n\to\infty}\ln(e^x+\frac{x}{n})=\ln(e^x)=x$. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f:x\mapsto x$ sur $[0,+\infty[$.
2. Soit $x\geq 0$: $f_n(x)-f(x)=\ln(e^x+\frac{x}{n})-\ln(e^x)=\ln(1+\frac{x}{ne^x})\geq 0$. On considère maintenant les variations de la fonction $g_n=|f_n-f|=f_n-f$.
$$g_n'(x)=\frac{e^x+\frac{1}{n}}{e^x+\frac{x}{n}}-1=\frac{1-x}{n(e^x+\frac{x}{n})},$$
donc $g_n'(x)\geq 0$ pour $x\in[0,1]$ et $g_n'(x)\leq 0$ pour $x\in[1,+\infty[$. Le maximum M_n de g_n est donc atteint en $x=1$ et vaut :
$$M_n=\ln\left(e+\frac{1}{n}\right)-1\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$
La convergence de (f_n) vers f est uniforme sur $[0,+\infty[$.

3. A fortiori, (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$ donc on peut passer la limite sous le signe somme :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \ln\left(e^x+\frac{x}{n}\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

III. Natures de séries

1. La série $\sum_{n\geq 0}\frac{n+\sin n}{n^2+1}$ est à termes positifs. Le numérateur est équivalent à n, le dénominateur à n^2, donc :

$$\frac{n+\sin n}{n^2+1}\sim\frac{1}{n}.$$

Or la série harmonique est divergente, donc $\sum_{n\geq 0}\frac{n+\sin n}{n^2+1}$ est divergente.

2. La série $\sum_{n\geq 0}(\sqrt{n^2+n}-n)$ est en fait trivialement divergente puisque son terme général tend vers $1/2$:

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{(\sqrt{n^2+n}+n)\cdot(\sqrt{n^2+n}-n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}.$$

3. Puisque $0<\cos\frac{1}{n^2}<1$ pour tout $n\geq 0$, la série $\sum_{n\geq 1}(1-(\cos\frac{1}{n^2})^n)$ est à termes positifs. On se sert des développements limités :

$$\left(\cos\frac{1}{n^2}\right)^n=e^{n\ln\left(\cos\frac{1}{n^2}\right)}=e^{n\ln\left(1-\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)}=e^{-\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)},$$

où sont successivement intervenus, pour x au voisinage de 0 : $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ et $\ln(1-x)=-x+o(x)$. Il reste à voir qu'au voisinage de 0, la fonction exponentielle admet pour développement limité : $e^x=1+x+o(x)$. Ceci donne :

$$1-\left(\cos\frac{1}{n^2}\right)^n=\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\sim\frac{1}{2n^3}.$$

Or la série $\sum\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum_{n\geq 1}(1-(\cos\frac{1}{n^2})^n)$ est convergente.

IV. Convergence de suite via une série

1. On utilise un développement limité :

$$u_n=\frac{1}{n}+\ln\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série $\sum\frac{1}{2n^2}$ est convergente, donc la série $\sum o(\frac{1}{n^2})$ est absolument convergente et $\sum u_n$ est convergente.

2. Notons $S_n=\sum_{k=2}^n u_k$ la somme partielle, alors :

$$S_n=\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\ln 1-\ln 2+\ln 2-\ln 3+\cdots+\ln(n-1)-\ln n=\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=v_n-1.$$

Or la suite (S_n) est convergente par la question précédente, donc (v_n) aussi.

Université de Rennes 2
Licence MASS 2
Pierre-André Cornillon

Mardi 25 janvier 2005
durée : 2 heures

Examen d'Analyse

Les exercices sont indépendants.

I. Suite de fonctions
On considère la suite de fonctions

$$f_n : \left\{ \begin{array}{rl}]0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n \ln x \end{array} \right.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $]0,1]$ vers une fonction f.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $]0,1]$?
3. Calculer f_n'. La suite (f_n') converge-t-elle simplement sur $]0,1]$? uniformément ?

II. Série de fonctions
Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2}$.

1. Montrer qu'elle est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Notons f sa somme.
2. La fonction f est-elle continue ?
3. On admet que pour tout réel x : $f(x) = \frac{1}{4}(\frac{\pi^2}{3} - x^2)$. En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

III. Série entière

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{(-2)^n x^n}{n!}$? Exprimer avec une fonction usuelle :

$$f(x) = 3\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n!}\right).$$

   Représenter la fonction f.
2. Soit l'équation différentielle $g' = 2(3 - g)$, avec la condition initiale $g(0) = 0$. On suppose que g est développable en série entière :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{si } |x| < R.$$

   Déterminer les coefficients a_n et exprimer simplement g.

3. On généralise l'étude précédente : soit H et τ deux constantes strictement positives et l'équation différentielle :
$$\begin{cases} g' & = \tau(H-g) \\ g(0) & = 0 \end{cases}$$
Sans reprendre les calculs précédents, donner la fonction g solution. La représenter sur $\mathbb{R}^+$.
4. Cette fonction g est une courbe de croissance classique en biologie et très utilisée en statistiques. A votre avis, que représentent les paramètres τ et H en termes de croissance ?

IV. Séries de Bertrand

1. On considère la fonction
$$F : \begin{cases} [3,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(\ln x) \end{cases}$$
   - Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Quelle est la dérivée f de F ? Montrer que f est décroissante et positive sur $[3,+\infty[$.
   - En déduire la nature de la série :
   $$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n\ln n}.$$
   - Notons $S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln n}$. Donner un équivalent de S_N.
2. Grâce au point 3, donner la nature de la série :
$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$$
Plus généralement, soit $\alpha \leq 1$, quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$?
3. Etudions la série $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n(\ln n)^2}$. Par un raisonnement voisin du point 3, montrer qu'on peut se ramener à l'étude d'une intégrale généralisée. Grâce au changement de variable $u = \ln x$, montrer alors la convergence de la série :
$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$
4. On considère la série entière
$$\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}.$$
   - Déterminer son rayon de convergence R. On note g sa somme.
   - Etudier la convergence de la série en $x = R$ et $x = -R$.
   - La fonction g est-elle continue sur $]-R,R[$? sur $[-R,R]$?

Université de Rennes 2
Licence MASS 2
Arnaud Guyader

Mardi 25 Janvier 2005
durée : 2 heures

Corrigé de l'Examen d'Analyse

I. Suite de fonctions
On considère la suite de fonctions

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ll}]0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n \ln x \end{array} \right.$$

1. Pour tout x de $]0,1]$: $\lim_{n\to\infty} x^n \ln x = 0$. Donc (f_n) converge simplement vers la fonction $f = 0$ sur $]0,1]$.
2. On doit trouver $M_n = \sup_{x\in]0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in]0,1]} -f_n(x) = \sup_{x\in]0,1]} -x^n \ln x$. Or $-f_n$ est dérivable sur $]0,1]$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-f'_n(x) = -x^{n-1}(n \ln x + 1)$. Donc $-f'_n(x) \geq 0$ si $0 < x \leq e^{-\frac{1}{n}}$ et $-f'_n(x) \leq 0$ si $e^{-\frac{1}{n}} \leq x \leq 1$. Autrement dit le maximum de $|f_n - f|$ sur $[0,1[$ est atteint au point $e^{-\frac{1}{n}}$ et vaut :
$$M_n = -\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \ln\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{ne} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
Donc la convergence de (f_n) vers la fonction nulle est uniforme.
3. On a vu que sur $]0,1]$:
$$f'_n(x) = x^{n-1}(n \ln x + 1),$$
donc la suite de fonctions (f'_n) converge simplement vers la fonction g nulle sur $]0,1[$ et valant 1 en $x = 1$. La convergence ne peut être uniforme puisque les fonctions f'_n sont continues alors que g ne l'est pas.

II. Série de fonctions
Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} \cos nx}{n^2}$.

1. Pour tout x réel, on a : $|\frac{(-1)^{n-1} \cos nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$. Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} \cos nx}{n^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, de somme f.
2. Les fonctions $x \mapsto \frac{(-1)^{n-1} \cos nx}{n^2}$ sont toutes continues sur $\mathbb{R}$ et il y a convergence normale, donc la somme est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On admet que pour tout réel x : $f(x) = \frac{1}{4}(\frac{\pi^2}{3} - x^2)$. Il suffit alors de remarquer que $\cos(n\pi) = (-1)^n$, donc d'une part :
$$f(\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

D'autre part, d'après l'expression donnée pour f :

$$f(\pi) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{3} - \pi^2\right) = -\frac{\pi^2}{6},$$

d'où le résultat voulu.

III. Série entière

1. Le critère de d'Alembert donne :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2}{n+1}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc le rayon de convergence vaut $+\infty$. La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{(-2)^n x^n}{n!}$ converge absolument pour tout réel x. On sait par ailleurs que :

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 3\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n!}\right) = 3\left(1 - e^{-2x}\right).$$

2. Soit l'équation différentielle $g' = 2(3 - g)$, avec la condition initiale $g(0) = 0$. On suppose que g est développable en série entière :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{si } |x| < R$$

On a alors :

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_n x^n,$$

donc :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad g'(x) + 2g(x) - 6 = (a_1 + 2a_0 - 6) + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + 2a_n)x^n = 0,$$

ce qui donne un système d'inconnues $(a_n)_{n\geq 0}$. Puisque $g(0) = 0$, on a $a_0 = 0$. La première équation donne : $a_1 = 6 = -3 \times \frac{(-2)^1}{1!}$. On obtient ensuite : $a_2 = -a_1 = -3\frac{(-2)^2}{2!}$, puis $a_3 = -\frac{2}{3}a_2 = -3\frac{(-2)^3}{3!}$ etc. Finalement, on a $a_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$: $a_n = -3\frac{(-2)^n}{n!}$. Ainsi :

$$g(x) = -3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n = 3\left(1 - e^{-2x}\right).$$

On retrouve la fonction de la question précédente. En particulier, l'égalité est valable pour tout réel x.

3. On généralise l'étude précédente : soit H et τ deux constantes strictement positives et l'équation différentielle :

$$\begin{cases} g' &= \tau(H - g) \\ g(0) &= 0 \end{cases}$$

En reprenant les calculs ci-dessus, on obtient pour fonction solution :

$$g(x) = H(1 - e^{-\tau x})$$

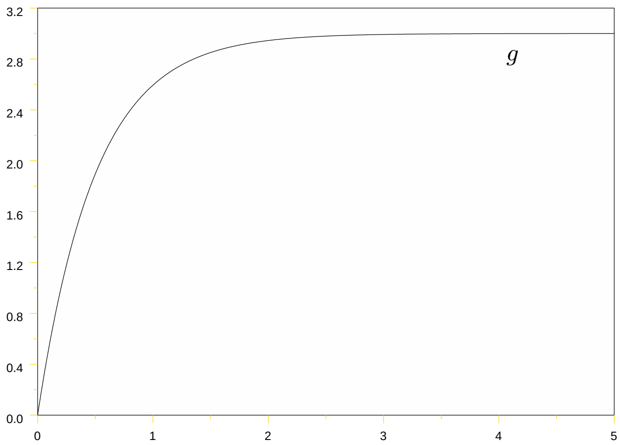

FIG. B.1 – Fonction $g : x \mapsto 3(1 - e^{-2x})$.

4. Cette fonction g est une courbe de croissance classique en biologie et très utilisée en statistiques. Si on considère la reproduction de cellules, H représente la population maximale possible en fonction de l'environnement (ressources disponibles etc.) et τ correspond à la vitesse de convergence vers cette population maximale (la constante $\frac{\ln 2}{\tau}$ est le temps nécessaire pour arriver à la moitié de cette population). Si on considère la taille d'un arbre, H représente la hauteur maximale possible de l'arbre et τ correspond à la vitesse de convergence vers cette hauteur maximale. On trouve le même genre d'équations dans les phénomènes de radioactivité, de charge d'un condensateur, etc.

IV. Séries de Bertrand

1. On considère la fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{rl} [3, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(\ln x) \end{array} \right.$$

– On a $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$, puisque $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$. La dérivée f de F est :

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

Il est clair que f est décroissante et positive sur $[3, +\infty[$, puisque $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ sont toutes deux croissantes et positives sur $[3, +\infty[$.

– La série $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \ln n}$ a donc même nature que l'intégrale généralisée :

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} \, dx = [\ln \ln x]_3^{+\infty} = +\infty,$$

c'est-à-dire divergente.

– Notons $S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n \ln n}$. La propriété de sommation des relations de comparaison donne :

$$S_N \sim \int_3^N \frac{1}{x \ln x} \, dx = \ln \ln N.$$

2. Pour tout $n \geq 3$, on a :
$$0 \leq \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$$
Puisque la série minorante est divergente, la série $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ l'est aussi. Plus généralement, si $\alpha \leq 1$, le raisonnement ci-dessus est encore valable et la série $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ est divergente.
3. Etudions la série $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n(\ln n)^2}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$ est positive décroissante sur $[3, +\infty[$, donc la série a même nature que l'intégrale généralisée :
$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx.$$
Le changement de variable $u = \ln x$ donne :
$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{1}{u^2}\, du = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln 3}^{+\infty} = \frac{1}{\ln 3},$$
donc la série est convergente.
4. On considère la série entière :
$$\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}.$$
   – La règle de d'Alembert donne :
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1}\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^2 \sim \frac{n}{n}\left(\frac{\ln n}{\ln n}\right)^2 = 1.$$
   Donc le rayon de convergence est $R = 1$.
   $$\forall x \in]-1, 1[\qquad g(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}.$$
   – En $x = 1$: la série $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ est convergente d'après ce qui a été vu plus haut. En $x = -1$, la série $\sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ est convergente puisqu'elle est absolument convergente.
   – En tant que somme d'une série entière de rayon 1, la fonction g est continue sur $]-1, 1[$ (théorème de cours). Puisque la série définissant g est convergente aux deux extrémités du domaine, il y a aussi continuité en ces deux points. La fonction g est donc continue sur $[-1, 1]$.

Université de Rennes 2
Licence MASS 2
Pierre-André Cornillon

Mardi 8 Novembre 2005
Durée : 1 heure

Contrôle continu d'Analyse

I. QCM
Chaque réponse correcte rapporte 0.5 point, chaque réponse incorrecte enlève 0.25 point.

1. La série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série convergente. Est-ce que l'on peut dire que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$?
   ☐ Oui.
   ☐ Non.
2. On suppose que $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$. A-t-on nécessairement $u_n + v_n \sim a_n + b_n$?
   ☐ Oui.
   ☐ Non.
3. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. Cette série est-elle convergente ?
   ☐ Oui.
   ☐ Non.
4. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. Cette série est-elle convergente ?
   ☐ Oui.
   ☐ Non.
5. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1}(1+\sin(\frac{1}{n}))$. Cette série est-elle convergente ?
   ☐ Oui.
   ☐ Non.
6. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Cette série est-elle absolument convergente ?
   ☐ Oui.
   ☐ Non.
7. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} e^{-n}$. Cette série est-elle convergente ?
   ☐ Oui.
   ☐ Non.
8. Que vaut la somme $S_N = \sum_{n=1}^{N} (\frac{3}{4})^n$?
   ☐ $S_N = 3(1-(\frac{3}{4})^{N+1})$.
   ☐ $S_N = 4(1-(\frac{3}{4})^{N+1})$.
   ☐ $S_N = 3(1-(\frac{3}{4})^{N})$.
   ☐ $S_N = 4(1-(\frac{3}{4})^{N})$.
9. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente quand
   ☐ $L > 1$.
   ☐ $L \geq 1$.
   ☐ $L < 1$.
   ☐ $L \leq 1$.

II. Question de cours
Enoncer le critère des séries alternées. Donner un exemple de série numérique vérifiant ce critère. Que peut-on dire du reste R_N à l'ordre N d'une telle série ?

III. Exercice
Etudier la nature de chacune des séries suivantes

1. $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n\sqrt{n}}$.

2. $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$
3. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2\left(\sqrt{2n^2+n+1}-\sqrt{2n^2-n+4}\right)}$
4. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$

IV. Problème
On considère la série numérique

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}.$$

1. Préciser la nature de cette série.
2. Soit $N \geq 1$. Encadrer

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

par deux intégrales, et calculer ces intégrales.
3. Combien de termes suffit-il de prendre en compte dans la somme partielle pour obtenir une valeur approchée à 0.01 près de la somme de la série ?
4. Donner un équivalent de R_N.

Université de Rennes 2
Licence MASS 2
Arnaud Guyader

Mardi 8 Novembre 2005
Durée : 1 heure

Corrigé du contrôle d'Analyse

I. QCM

1. La série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série convergente. Est-ce que l'on peut dire que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$?
   ☒ Oui.
   ☐ Non.
2. On suppose que $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$. A-t-on nécessairement $u_n + v_n \sim a_n + b_n$?
   ☐ Oui.
   ☒ Non.
3. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. Cette série est-elle convergente ?
   ☒ Oui.
   ☐ Non.
4. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. Cette série est-elle convergente ?
   ☒ Oui.
   ☐ Non.
5. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1}(1+\sin(\frac{1}{n}))$. Cette série est-elle convergente ?
   ☐ Oui.
   ☒ Non.
6. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Cette série est-elle absolument convergente ?
   ☐ Oui.
   ☒ Non.
7. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} e^{-n}$. Cette série est-elle convergente ?
   ☒ Oui.
   ☐ Non.
8. Que vaut la somme $S_N = \sum_{n=1}^{N} (\frac{3}{4})^n$?
   ☐ $S_N = 3(1-(\frac{3}{4})^{N+1})$.
   ☐ $S_N = 4(1-(\frac{3}{4})^{N+1})$.
   ☒ $S_N = 3(1-(\frac{3}{4})^{N})$.
   ☐ $S_N = 4(1-(\frac{3}{4})^{N})$.
9. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente quand
   ☐ $L > 1$.
   ☐ $L \geq 1$.
   ☒ $L < 1$.
   ☐ $L \leq 1$.

II. Question de cours. Voir cours.

III. Exercice

1. On a :

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n\sqrt{n}} = e^{-n\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)},$$

or $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$, donc :

$$-n\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n\sqrt{n}} = e^0 = 1,$$

donc la série est trivialement divergente.

2. Le terme général est la somme de $a_n = (-1)^n\sqrt{n}$ et $b_n = (-1)^n\frac{1}{n\sqrt{n}}$. La série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est trivialement divergente, tandis que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ est convergente par le critère des séries alternées. Par conséquent, la série initiale est divergente.

3. On peut utiliser l'expression conjuguée :

$$\frac{1}{n^2\left(\sqrt{2n^2+n+1}-\sqrt{2n^2-n+4}\right)} = \frac{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2-n+4}}{n^2\,(2n-3)},$$

d'où l'on déduit l'équivalent du terme général :

$$\frac{1}{n^2\left(\sqrt{2n^2+n+1}-\sqrt{2n^2-n+4}\right)} \sim \frac{2\sqrt{2}n}{2n^3} = \frac{\sqrt{2}}{n^2},$$

séries à termes positifs. Via Riemann cette série est convergente, donc la série initiale aussi.

4. La série est à termes positifs, avec :

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n},$$

donc :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

et par la règle de Riemann cette série est convergente, donc la série initiale également.

IV. Problème

On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$.

1. C'est une série de Riemann convergente.

2. Soit $N \geq 1$. Puisque la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est positive continue décroissante sur $[1,+\infty[$, on a :

$$\int_{N+1}^{\infty}\frac{1}{x^3}\,dx \leq R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \leq \int_{n=N}^{\infty}\frac{1}{x^3}\,dx.$$

Une primitive de f étant $F : x \mapsto \frac{1}{2x^2}$, on obtient :

$$\frac{1}{2(N+1)^2} \leq R_N \leq \frac{1}{2N^2}.$$

3. On en déduit que pour obtenir une valeur approchée à 0.01 près de la somme de la série, il suffit d'avoir :

$$\frac{1}{2N^2} \leq .01 \;\Leftrightarrow\; N^2 \geq 50 \;\Leftrightarrow\; N \geq 8.$$

4. De l'encadrement de R_N, on déduit :

$$R_N \sim \frac{1}{2N^2}.$$

Université de Rennes 2
Licence MASS 2
Arnaud Guyader

Mercredi 18 Janvier 2006
Durée : 2 heures

Examen d'Analyse

I. Natures de séries

1. Préciser la nature de la série :
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)+\ln n}}.$$
2. Préciser la nature de la série :
$$\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right).$$
3. La série numérique :
$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$
est-elle convergente ? Est-elle absolument convergente ?

II. Suite de fonctions

On considère la suite de fonctions
$$f_n : \left\{\begin{array}{ll}\mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto xe^{-n^2x}\end{array}\right.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$?
3. Calculer f_n'. La suite (f_n') converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}^+$?
4. La suite (f_n') converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?
5. Soit $n > 0$ fixé. Grâce à une intégration par parties, calculer :
$$I_n = \int_0^1 xe^{-n^2x}\,dx.$$
Que vaut $\lim_{n\to+\infty} I_n$? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

III. Série entière

On considère la série entière :
$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n(n+2)}.$$

1. Déterminer son rayon de convergence R.
2. Préciser le comportement au bord.
3. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+2)}$.
4. Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ en 0.
5. Pour tout $x \in]-R, R[$, en déduire :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}.$$
6. Montrer que :
$$\forall x \in]-R, 0[\cup]0, R[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{(1-x^2)\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{2x^2}.$$
7. Via un équivalent de $\ln(1-x)$, vérifier que l'on peut prolonger cette dernière expression en 0.
8. En utilisant la question 6, déterminer :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$
9. (Bonus) Retrouver ces deux derniers résultats en considérant directement les séries numériques et la décomposition en éléments simples de la question 3.

IV. Equation différentielle

On considère l'équation différentielle :
$$f''(x) - f(x) = 0,$$
avec les conditions initiales :
$$\begin{cases} f(0) & = 2 \\ f'(0) & = 0 \end{cases}$$
On suppose qu'il existe une fonction solution f développable en série entière, c'est-à-dire $R \in]0, +\infty]$ et une suite de réels $(a_n)_{n\geq 0}$ tels que :
$$\forall x \in]-R, R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Que dire de a_0 et a_1 ?
2. Etablir une relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n. En déduire a_n pour tout $n \geq 0$.
3. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
4. Rappeler le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique. En déduire une expression plus simple de f.

Université de Rennes 2
Licence MASS 2
Arnaud Guyader

Mercredi 18 Janvier 2006
Durée : 2 heures

Corrigé de l'Examen

I. Natures de séries

1. La série
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)+\ln n}}$$
est à termes positifs et un équivalent du terme général est $\frac{1}{n}$, or la série $\sum\frac{1}{n}$ est divergente, donc la série initiale aussi.
2. La série
$$\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)$$
est elle aussi à termes positifs et un équivalent du terme général est $\frac{1}{n^2}$, or la série $\sum\frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série initiale aussi.
3. La série numérique
$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$
est alternée puisque pour tout $n\geq 1$, $\arctan\frac{1}{n}$ est positif. De plus, la fonction arctan étant croissante, la suite $(\arctan\frac{1}{n})$ est décroissante, avec :
$$\lim_{n\to+\infty}\arctan\frac{1}{n}=\arctan 0=0.$$
On peut donc appliquer le critère des séries alternées : la série est convergente.
Par contre, puisque $\arctan x\sim x$ au voisinage de 0, on a :
$$\left|(-1)^n\arctan\frac{1}{n}\right|=\arctan\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n},$$
d'où l'on déduit que la série n'est pas absolument convergente.

II. Suite de fonctions

On considère la suite de fonctions
$$f_n:\left\{\begin{array}{ll}\mathbb{R}^+ & \to\mathbb{R}\\ x & \mapsto xe^{-n^2x}\end{array}\right.$$

1. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout n. Pour $x > 0$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} xe^{-n^2x} = 0.$$
Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.
2. Considérons la suite de fonctions (g_n) de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associent :
$$g_n(x) = |f_n(x) - 0| = f_n(x).$$
Les fonctions g_n sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$, avec :
$$g_n'(x) = (1 - n^2x)e^{-n^2x},$$
donc g_n est croissante sur $[0, \frac{1}{n^2}]$, puis décroissante sur $[\frac{1}{n^2}, +\infty[$. Son maximum vaut :
$$M_n = g_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{en^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
donc il y a convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle.
3. On a vu que pour tout $n \geq 0$, on a :
$$f_n'(x) = (1 - n^2x)e^{-n^2x}.$$
Pour $x = 0$, on a $f_n'(0) = 1$, tandis que pour tout $x > 0$, l'exponentielle imposant sa limite, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = 0.$$
Ainsi la suite de fonctions (f_n') converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction h qui vaut 1 en 0 et 0 pour tout $x > 0$.
4. Les fonctions f_n' sont toutes continues sur $[0, +\infty[$ tandis que h ne l'est pas à l'origine, donc la convergence ne peut pas être uniforme.
5. Soit $n > 0$ fixé. Une intégration par parties donne :
$$I_n = \int_0^1 xe^{-n^2x}\,dx = \left[-\frac{x}{n^2}e^{-n^2x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-n^2x}}{n^2}\,dx,$$
ce qui donne encore :
$$I_n = -\frac{1}{n^2}e^{-n^2} - \left[\frac{e^{-n^2x}}{n^4}\right]_0^1 = \frac{1}{n^4} - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)e^{-n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
Résultat prévisible : puisque (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$, c'est a fortiori vrai sur $[0, 1]$, qui est un intervalle borné, donc on peut passer la limite sous le signe d'intégration :
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

III. Série entière

On considère la série entière
$$\sum_{n\geq1} \frac{x^n}{n(n+2)}.$$

1. Pour déterminer le rayon de convergence, on applique le critère de d'Alembert :
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}\right| = 1,$$
donc le rayon de convergence vaut $R = 1$.
2. En $x = 1$, on a à considérer la série de terme général $\frac{1}{n(n+2)}$, c'est-à-dire à termes positifs et d'équivalent $\frac{1}{n^2}$, avec $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente, donc il y a convergence en $x = 1$. En $x = -1$, il y a absolue convergence, donc convergence (on peut aussi invoquer le critère des séries alternées).
3. La réduction en éléments simples donne :
$$\frac{1}{X(X+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+2}).$$
4. Le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ en 0 est :
$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}.$$
5. Si $x = 0$, on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{0^n}{n+2} = 0.$$
Pour $x > 0$, on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = \frac{1}{x^2}\left(-x - \frac{x^2}{2} - \ln(1-x)\right).$$
6. Pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,1[$, la réduction en éléments simples donne :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\right),$$
et d'après le développement en série entière de $\ln(1-x)$, on en déduit :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{(1-x^2)\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{2x^2}.$$
7. Un équivalent de $\ln(1-x)$ en 0 est $-x - \frac{x^2}{2}$, donc le membre de droite de l'expression précédente est équivalent en 0 à :
$$\frac{(1-x^2)(-x-\frac{x^2}{2}) + x + \frac{x^2}{2}}{2x^2} \sim_0 \frac{-x^3}{2x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$
ce qui correspond bien à la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n(n+2)}$ quand $x = 0$. .
8. Puisque les séries numériques sont convergentes en $x = -1$ et $x = 1$, on peut appliquer le théorème d'Abel :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)} = \lim_{x\to -1^+}\frac{(1-x^2)\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{2x^2} = -\frac{1}{4}.$$

De même :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x^2)\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}}{2x^2},$$

or on sait que $\lim_{u\to 0^+} u\ln u = 0$, donc :

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x^2)\ln(1-x) = \lim_{x\to 1^-}(1+x)(1-x)\ln(1-x) = 2\lim_{u\to 0^+} u\ln u = 0.$$

On en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}.$$

9. Notons S_N la somme partielle d'ordre N de la série numérique en $x=1$, c'est-à-dire :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)}.$$

La réduction en éléments simples vue ci-dessus permet d'écrire :

$$S_N = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}\right),$$

qui est une somme télescopique :

$$S_N = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{3}{4},$$

et on a bien retrouvé le résultat de la question précédente. Le même raisonnement s'applique en $x=-1$.

IV. Equation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$f''(x) - f(x) = 0,$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} f(0) & = 2 \\ f'(0) & = 0 \end{cases}$$

On suppose qu'il existe une fonction solution f développable en série entière, c'est-à-dire $R \in]0,+\infty]$ et une suite de réels $(a_n)_{n\geq 0}$ tels que :

$$\forall x \in]-R,R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Puisque f est développable en série entière en 0, on sait qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, avec de façon générale :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Pour les premiers coefficients, ceci donne : $a_0 = f(0) = 2$ et $a_1 = f'(1) = 0$.

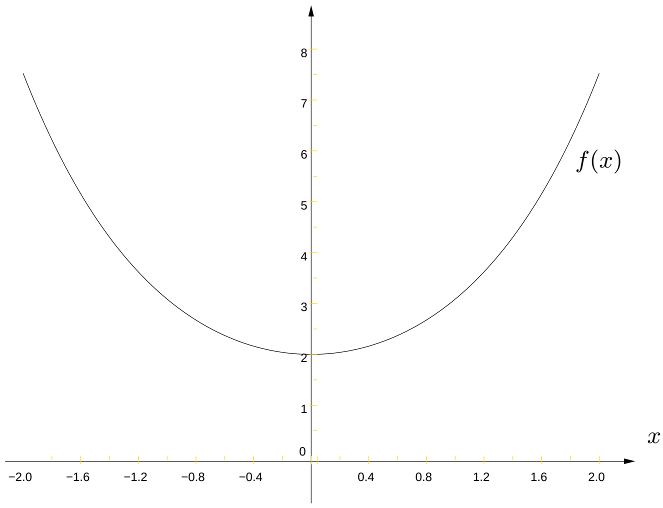

FIG. B.2 – Représentation de la fonction f.

2. f'' est développable en série entière sur $]-R,R[$, avec :
$$\forall x \in]-R,R[\qquad f''(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$
En identifiant les développements en série entière de f et f'', on obtient :
$$\forall n\geq 0 \qquad a_{n+2}=\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}.$$
Puisque $a_0=2$ et $a_1=0$, ceci donne $a_{2n+1}=0$ pour tout $n\geq 0$ et :
$$\forall n\geq 0 \qquad a_{2n}=\frac{2}{(2n)!}$$
donc la fonction solution développable en série entière est :
$$f(x)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$
3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est absolument convergente par le critère de d'Alembert :
$$\left|\left(\frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}\right)/\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\right|=\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$
On en déduit que le rayon de convergence de la série entière définissant f est $R=+\infty$.
4. Le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique est de rayon $+\infty$ et donné par :
$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \cosh x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$
On en déduit que f est tout simplement définie par :
$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad f(x)=2\cosh x=e^x+e^{-x}.$$
La représentation graphique de f est donnée figure $B.2$.

Université de Rennes 2
Licence MASS 2
Arnaud Guyader

Mardi 21 Novembre 2006
Durée : 1 heure

Contrôle continu d'Analyse

I. Question de cours

On considère deux séries numériques $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$.

1. Donner le terme général c_n du produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} c_n$ de ces deux séries. Enoncer le principal résultat du cours sur ce produit de Cauchy.
2. Application : on considère $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ pour tout $n \geq 0$. Calculer c_n et déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$.

II. Natures de séries

On rappelle que $e \approx 2.72$. Etudier la nature de chacune des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$;
2. $\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n^2+n} - n)$;
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{2\times 4\times\cdots\times 2n}$.

III. Valeur approchée et équivalent

On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que cette série est convergente.
2. Combien de termes faut-il prendre en compte dans la somme partielle pour obtenir une valeur approchée à 10^{-2} près de la somme de la série.
3. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est-elle absolument convergente ?
4. Bonus : donner un équivalent de $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

IV. Suite de fonctions

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. Justifier rapidement que pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \geq 0$:
$$xe^{\frac{x}{n}} - x \geq 0.$$
3. Montrer que la convergence de $(f_n)_{n\geq 1}$ vers une f est uniforme.

4. Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 xe^{\frac{x}{n}}\,dx.$$
5. Bonus : étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Université de Rennes 2
Licence MASS 2
Arnaud Guyader

Mardi 21 Novembre 2006
Durée : 1 heure

Corrigé du contrôle d'Analyse

I. Question de cours

On considère deux séries numériques $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$.

1. Le terme général c_n du produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} c_n$ de ces deux séries s'écrit :

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Si les deux séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum_{n\geq 0} c_n$ l'est aussi et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

2. Application : si on considère $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ pour tout $n \geq 0$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est géométrique de raison $-1/2$, donc absolument convergente, de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} c_n$ a pour terme général :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{(-1)^n (n+1)}{2^n}.$$

Par application du théorème, on a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^n} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

II. Natures de séries

1. La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$ est à termes positifs donc il suffit de regarder la nature d'une série équivalente, or $\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente, donc la série initiale aussi.
2. La série $\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n^2+n}-n)$ est trivialement divergente puisqu'en utilisant l'expression conjuguée on obtient :

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

3. On peut utiliser le critère de d'Alembert :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Mais puisque $\ln(1+u) \sim u$ au voisinage de 0, on a $\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{2} > 1$, et la série est divergente.

III. Valeur approchée et équivalent

1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est alternée, avec $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ suite décroissante de limite 0, donc le critère des séries alternées s'applique et la série est convergente.
2. On sait de plus que si on somme les N premiers termes de cette série, on obtient une valeur approchée S_N telle que :
$$|R_N| = |S - S_N| \leq \frac{1}{\sqrt{N+1}}.$$
Pour obtenir une erreur inférieure à 10^{-2}, il suffit donc de s'assurer que :
$$\frac{1}{\sqrt{N+1}} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \sqrt{N+1} \geq 100 \Leftrightarrow N+1 \geq 10000,$$
donc il suffit de sommer les 9999 premiers termes.
3. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas absolument convergente, puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente. En résumé, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente.
4. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante continue sur $[1, +\infty[$, donc on a l'encadrement classique de la somme partielle par deux intégrales :
$$\int_1^{N+1} f(x)\, dx \leq S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq f(1) + \int_1^N f(x)\, dx,$$
c'est-à-dire : $2\left(\sqrt{N+1} - 1\right) \leq S_N \leq 1 + 2\left(\sqrt{N} - 1\right)$, donc $S_N \sim 2\sqrt{N}$.

IV. Suite de fonctions

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}$.

1. Pour tout $x \in [0,1]$, on a : $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge donc simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f : x \mapsto x$.
2. Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \geq 0$, on a $\frac{x}{n} \geq 0$, donc $e^{\frac{x}{n}} \geq 1$, donc $xe^{\frac{x}{n}} \geq x$.
3. On considère sur $[0,1]$ la fonction d_n définie par : $d_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = |xe^{\frac{x}{n}} - x| = xe^{\frac{x}{n}} - x$, la dernière égalité venant du point précédent. On cherche le maximum de d_n sur $[0,1]$, on peut passer par le calcul de sa dérivée : $d_n'(x) = \frac{x}{n}e^{\frac{x}{n}} + \left(e^{\frac{x}{n}} - 1\right)$, qui est positive comme somme de deux termes positifs. Donc d_n est croissante sur $[0,1]$, le maximum M_n étant atteint au point $x = 1$:
$$M_n = d_n(1) = e^{\frac{1}{n}} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
Il y a donc convergence uniforme de (f_n) vers f.
4. Puisqu'il y a convergence uniforme, que les f_n sont continues, donc intégrables, et que l'intervalle d'intégration $[0,1]$ est borné, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 xe^{\frac{x}{n}}\, dx = \int_0^1 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$
5. Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, on a toujours convergence simple de (f_n) vers $f : x \mapsto x$. La fonction d_n est toujours définie de la même façon, sa dérivée est toujours positive, donc elle est croissante sur $[0, +\infty[$ et on en déduit que :
$$M_n = \sup_{[0,+\infty[} d_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{x}{n}} - 1\right) = +\infty.$$
Donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

Université de Rennes 2
Licence MASS 2
Arnaud Guyader

Mardi 16 Janvier 2007
Durée : 2 heures

Examen d'Analyse

Les exercices sont indépendants.

I. Suite de fonctions (5 points)
On considère la suite de fonctions

$$f_n : \left\{ \begin{array}{rl} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{nx^3}{1+nx} \end{array} \right.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in [0,1]$, on a :
$$x^2 - \frac{nx^3}{1+nx} \geq 0.$$
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[0,1]$?
4. Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx^3}{1+nx}\,dx.$$
5. Calculer f_n'. La suite (f_n') converge-t-elle simplement sur $[0,1]$?

II. Equation différentielle (5 points)
On considère l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\left\{ \begin{array}{rl} f'(x) & = 2xf(x) \\ f(0) & = 1 \end{array} \right.$$

On suppose qu'il existe une fonction solution f développable en série entière en 0, c'est-à-dire $R \in]0,+\infty]$ et une suite de réels $(a_n)_{n\geq 0}$ tels que :

$$\forall x \in]-R,+R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Utiliser l'équation différentielle et la condition initiale pour déterminer $f'(0)$.
2. Que dire de a_0 et a_1 ?

3. Etablir une relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n. En déduire a_n pour tout $n \geq 0$.
4. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
5. Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto e^x$ et en déduire une expression simple de f.

III. Série entière (4 points)
On considère la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{n!} x^n.$$

1. Déterminer son rayon de convergence R. On note $S(x)$ la somme de la série entière sur $]-R,+R[$.
2. En remarquant par exemple que $n^2+1 = n(n-1)+n+1$, montrer que pour tout $x \in]-R,+R[$, on a :
$$S(x) = (x^2+x+1)e^x.$$
3. Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{2^n n!}.$$
4. Donner le développement en série entière en 0 de la fonction f définie par :
$$f(x) = (x^2+3x+2)e^x.$$

IV. Valeur approchée (6 points)

1. Donner le développement en série entière en 0 de $\ln(1+x^2)$.
2. Préciser le rayon de convergence de la série obtenue, ainsi que le comportement au bord.
3. En déduire une expression de $\ln 2$ comme somme de série numérique.
4. Dans cette série, combien de termes suffit-il de prendre en compte pour obtenir une expression de $\ln 2$ au centième près ?
5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 1 + x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x.$$
   (a) Calculer la dérivée f' de cette fonction.
   (b) En déduire le développement en série entière de f.

Université de Rennes 2
Licence MASS 2

Mardi 16 Janvier 2007
Durée : 2 heures

Corrigé de l'Examen

I. Suite de fonctions
On considère la suite de fonctions

$$f_n : \left\{ \begin{array}{rl} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{nx^3}{1+nx} \end{array} \right.$$

1. Pour tout $x \in]0,1]$ fixé, on a $nx^3 \sim nx^3$ et $1 + nx \sim nx$, donc :

$$f_n(x) \sim \frac{nx^3}{nx} = x^2,$$

c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x^2$. Ceci est encore vérifié en $x = 0$, donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rl} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array} \right.$$

2. Pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$x^2 - \frac{nx^3}{1+nx} = \frac{x^2}{1+nx} \geq 0,$$

numérateur et dénominateur étant tous deux positifs.

3. On considère sur $[0,1]$ la fonction d_n définie par :

$$d_n(x) = |f(x) - f_n(x)| = x^2 - \frac{nx^3}{1+nx} = \frac{x^2}{1+nx}.$$

Sa dérivée est :

$$d_n'(x) = \frac{nx^2 + 2x}{(1+nx)^2},$$

qui est positive sur $[0,1]$, donc d_n est croissante, positive, et atteint son maximum au point 1 :

$$M_n = d_n(1) = \frac{1}{1+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La suite de fonctions (f_n) converge donc uniformément vers f sur $[0,1]$.

4. Puisqu'il y a convergence uniforme sur l'intervalle borné $[0, 1]$, on peut passer la limite sous le signe somme :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx^3}{1+nx}\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

5. Le calcul de f_n' donne :
$$f_n'(x) = \frac{2n^2x^3 + 3nx^2}{(1+nx)^2}.$$
Pour tout $x \in]0, 1]$ fixé, on a $2n^2x^3 + 3nx^2 \sim 2n^2x^3$ et $(1 + nx)^2 \sim n^2x^2$, donc :
$$f_n'(x) \sim \frac{2n^2x^3}{n^2x^2} = 2x,$$
c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = 2x$. Ceci est encore vérifié en $x = 0$, donc la suite de fonctions (f_n') converge simplement vers la fonction
$$g : \left\{ \begin{array}{ll} [0, 1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x \end{array} \right.$$

II. Equation différentielle

On considère l'équation différentielle avec condition initiale :
$$\left\{ \begin{array}{ll} f'(x) & = 2xf(x) \\ f(0) & = 1 \end{array} \right.$$

1. On a $f'(0) = 2 \times \times 0f(0) = 0$.
2. On sait que $a_0 = f(0) = 1$ et $a_1 = f'(0) = 0$.
3. La fonction dérivée f' est elle aussi développable en série entière, avec pour tout $x \in] - R, +R[$:
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1)a_{n+1}x^n.$$
Par ailleurs on peut écrire que pour tout $x \in] - R, +R[$:
$$2xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1}x^n.$$
Ainsi on a :
$$f'(x) - 2xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1}x^n,$$
ce qui s'écrit encore :
$$f'(x) - 2xf(x) = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n + 1)a_{n+1} - 2a_{n-1})x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} ((n + 1)a_{n+1} - 2a_{n-1})x^n.$$
Pour que cette série entière soit identiquement nulle sur $] - R, +R[$, il faut et il suffit que tous ses coefficients soient nuls, c'est-à-dire que $\forall n \geq 1$:
$$(n + 1)a_{n+1} - 2a_{n-1} = 0 \;\Leftrightarrow\; a_{n+1} = \frac{2}{n + 1}a_{n-1}.$$

Sachant que $a_1 = 0$, on en déduit de proche en proche que tous les termes impairs sont nuls : $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geq 0$. Pour les termes pairs, on obtient :

$$a_{2n} = \frac{2}{2n}a_{2n-2} = \frac{1}{n}a_{2n-2} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{2n-2}a_{2n-4} = \cdots = \frac{1}{n!}a_0 = \frac{1}{n!}.$$

L'unique solution développable en série entière est donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

4. Puisque la série est lacunaire, on revient au critère de d'Alembert pour les séries numériques :

$$\left| \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!} / \frac{x^{2n}}{n!} \right| = \frac{|x|^2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il y a donc absolue convergence de la série pour tout réel x, donc $R = +\infty$.

5. Pour tout réel x, on a :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Pour ce qui nous concerne, on a donc tout simplement $f(x) = e^{x^2}$.

III. Série entière

On considère la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{n!}x^n.$$

1. Le critère de d'Alembert pour les séries entières donne :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)(n^2+1)} \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Son rayon de convergence est donc $R = +\infty$. On note $S(x)$ la somme de la série entière sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout réel x, on a :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

ce qui s'écrit encore :

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

ou encore :

$$S(x) = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

d'où finalement :

$$S(x) = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = (x^2+x+1)e^x.$$

3. La quantité cherchée est tout simplement la valeur de la fonction S au point $x = -\frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{2^n n!} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) e^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{e}}.$$

4. On remarque que f est la dérivée de S. Puisque S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi et son développement s'obtient en dérivant terme à terme celui de S :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2+1}{n!} x^n.$$

IV. Valeur approchée

1. En partant par exemple du développement en série entière de $\ln(1+u)$, on obtient :

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n}.$$

2. Puisque le rayon de convergence de la série entière de $\ln(1+u)$ est $R = 1$, il en va de même pour celui de $\ln(1+x^2)$. Pour $x = 1$, on obtient une série alternée vérifiant le critère des séries alternées, idem en $x = -1$, donc il y a convergence aux deux extrémités de l'intervalle de convergence.
3. Puisque la série entière est convergente en $x = 1$, on peut appliquer le théorème d'Abel :

$$\ln 2 = \ln(1+1^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

4. Cette série vérifiant le critère des séries alternées, on en déduit que l'erreur R_N faite en s'arrêtant au terme N de la somme partielle vérifie :

$$|R_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{N+1}.$$

Pour obtenir une valeur approchée de $\ln 2$ au centième près, il suffit donc de sommmer 99 termes.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x.$$

   (a) On vérifie sans problème que $f'(x) = \ln(1+x^2)$.

   (b) Puisque $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est développable en série entière sur $]-1,+1[$, f l'est aussi. Le développement de f s'obtient en intégrant terme à terme celui de $\ln(1+x^2)$ et en tenant compte de la valeur de f en 0 :

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{n \times (2n+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{n \times (2n+1)}.$$

Bibliographie

[1] Francine Delmer. *Les séries*. Dunod, 1995.

[2] Jean Guégand, Jean-Louis Roque et Christian Lebœuf. *Cours d'analyse*. Ellipses, 1981.

[3] Dominique Liret et François Martinais. *Analyse 2ème année*. Dunod, 2004.

[4] Ernst Hairer et Gerhard Wanner. *L'analyse au fil de l'histoire*. Springer, 2000.

[5] Bernard Gostiaux. *Cours de mathématiques spéciales. Tome 3 : analyse fonctionnelle et calcul différentiel*. PUF, 1993.

[6] Jacques Harthong. *Cours d'analyse mathématique*. Format électronique, http ://moire4.u-strasbg.fr/bouquins/analyse/tabmat2.htm, 2001.