M1 — Processus Stochastiques

Examen final, 17 janvier 2023

L'examen comporte 6 exercices. Les trois premiers sont plus abordables : vrai/faux sur des questions proches du cours, espérance conditionnelle, un exercice classique de chaîne de Markov. Les exercices 4, 5 et 6 sont un peu plus difficiles (thèmes : martingale, chaîne de Markov, mouvement brownien). Il est conseillé de se concentrer sur un ou deux de ces exercices : un bonus sera alloué aux étudiants qui feront un exercice en entier plutôt que de piocher des questions faciles dans les différents exercices (en pratique j'appliquerai un facteur 1, 2/3 et 1/3 aux notes obtenues à ces trois exercices rangées dans l'ordre).

Dans tout l'examen, si cela n'est pas précisé :

- Une (sur-/sous-)martingale $(X_n)_{n\geq 0}$ sera munie de sa filtration canonique $\mathscr{F}_n := \sigma((X_k)_{k\leq n})$.
- Une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sera à valeur dans un espace dénombrable E et sa matrice de transition sera notée Q. On utilisera l'espace canonique et pour $x \in E$ on notera $\mathbb{P}_x$ la loi de la chaîne de Markov issue de x.
- Un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ sera considéré sur l'espace canonique, muni de la filtration canonique $\mathscr{F}_t = \sigma((B_s)_{s\in[0,t]})$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on notera $\mathbb{P}_x$ la loi d'un mouvement brownien issu de x ; on notera plus simplement $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0$.

Exercice 1 (Vrai/Faux) (15 points)**.** Répondez par vrai ou faux aux affirmations suivantes. Veillez à justifier votre réponse, soit par une démonstration, soit par un exemple.

1. Soient (U,V) et (X,Y) deux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^2$. Si (U,V) et (X,Y) ont la même loi, alors $\mathbb{E}[U \mid V]$ et $\mathbb{E}[X \mid Y]$ ont la même loi.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale à valeurs dans $[-1,\infty[$ avec $X_0 = 1$. Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^n X_i$ converge presque sûrement.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale telle que $\mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors X_n converge presque sûrement.
4. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Alors $(\frac{1}{\sqrt{t}} B_{t^2})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
5. Il existe une marche aléatoire irréductible $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, où les $(\xi_k)_{k\geq 1}$ sont i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$) qui est récurrente positive.

Exercice 2 (15 points)**.** Soient X, Y deux v.a. indépendantes, de même loi d'espérance finie.

1. Déterminer $\mathbb{E}[X \mid X+Y]$.
2. On suppose que $X, Y \sim \mathrm{Exp}(1)$, c'est-à-dire de densité $f_X(x) = f_Y(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. On admet que $Z := X+Y$ a pour densité $f_Z(z) = ze^{-z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$.
   Pour $n \geq 2$, déterminer $\mathbb{E}[X^n \mid X+Y]$.
3. La formule trouvée dans la question précédente dépend-elle de la loi de X, Y ? Si la réponse est non, donner une démonstration ; si la réponse est oui, donner un contre-exemple.

On suppose que X, Y sont positives (indépendantes et de même loi) : on interprète X comme la *qualité* d'un premier joueur et Y comme la *qualité* d'un deuxième. Conditionnellement à X, Y, le jeu est gagné par le premier joueur avec probabilité $\frac{X}{X+Y}$ et par le deuxième joueur avec probabilité $\frac{Y}{X+Y}$. On note W la qualité du joueur qui gagne le jeu, c'est-à-dire X si le premier joueur gagne et Y si c'est le deuxième.

4. Calculer $\mathbb{E}[W \mid X, Y]$. En déduire $\mathbb{E}[W]$ dans le cas où $X, Y \sim \mathrm{Exp}(1)$.

Exercice 3 (20 points)**.** Soit $(\xi_k)_{k\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi Bern(p), c'est-à-dire $\mathbb{P}(\xi_k = 1) = p$, $\mathbb{P}(\xi_k = 0) = 1-p$, pour un $p \in]0,1[$. On interprète $(\xi_k)_{k\geq 1}$ comme une suite de 'Pile' (si $\xi_k = 1$) ou 'Face' (si $\xi_k = 0$) et on s'intéresse aux séries de 'Pile' consécutifs dans cette suite. Pour $n \geq 0$, on note

$$X_n = \max\left\{0 \leq k \leq n, \xi_n = \xi_{n-1} = \cdots = \xi_{n-k+1} = 1, \xi_{n-k} = 0\right\},$$

avec par convention $\xi_{-1} = 0$. Ainsi, X_n représente la longueur de la série de 'Pile' (ou de 1) consécutifs en cours à l'instant n.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$, de matrice de transition donnée par $Q(x, x+1) = p$, $Q(x,0) = 1-p$ pour $x \in \mathbb{N}$.
2. La chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est-elle irréductible ? apériodique ?
3. Déterminer une mesure de probabilité invariante. Cette mesure est-elle réversible ?
4. Soit $\ell \geq 1$.
   (a) On note $Z_n(\ell)$ le nombre de séries de ℓ 'Pile' consécutifs entre 0 et n, *avec superposition* (par exemple, on compte trois blocs de 3 'Pile' consécutifs dans la suite 11111 et quatre dans la suite 111111). Déterminer la limite presque sûre $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Z_n(\ell)$.
   (b) On note $\widehat{Z}_n(\ell)$ le nombre de séries de ℓ 'Pile' consécutifs entre 0 et n, *sans superposition* (dans ce cas, on ne compte qu'un seul bloc de 3 'Pile' consécutifs dans la suite 11111 et deux dans la suite 111111). Déterminer la limite presque sûre $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \widehat{Z}_n(\ell)$.

Exercice 4 (30 points)**.** Soit $\{(U_k, V_k); k \geq 1\}$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants identiquement distribués, où chaque U_k et V_k prend ses valeurs dans $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$. On suppose que $\mathbb{E}[U_1] = \mathbb{E}[U_1] = 0$, que $\mathrm{Var}(U_1) = \sigma_1^2 < +\infty$ et $\mathrm{Var}(V_1) = \sigma_2^2 < +\infty$, et que $\mathbb{E}[U_1 V_1] = c$ (en particulier, on ne suppose pas que U_1 et V_1 sont indépendants). Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{N}^*$ et soit

$$X_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k \qquad \text{et} \qquad Y_n = v_0 + \sum_{k=1}^{n} V_k .$$

On interprète $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ comme une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$ et on considère la filtration naturelle $\mathscr{F}_n = \sigma(U_1, V_1, \ldots, U_n, V_n)$ pour $n \geq 1$ (et $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$).

1. Montrer que $M_n := X_n Y_n - cn$ est une martingale.
2. Soit $T = \min\{n \geq 0, X_n Y_n = 0\}$ le premier temps où la marche aléatoire (X_n, Y_n) touche l'un des axes de $\mathbb{R}^2$. Montrer que T est un temps d'arrêt et que $T = \min\{n \geq 0, X_n Y_n \leq 0\}$.
3. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov irréductible et récurrente. En déduire que $T < +\infty$ presque sûrement.
4. Montrer que, si $c < 0$, on a $\mathbb{E}[T \wedge n] \leq u_0 v_0 / |c|$ pour tout n. En déduire que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.
5. D'un autre côté, supposons que l'on a $\mathbb{E}[T] < +\infty$.
   (a) Justifier que $X_T - u_0 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} U_i \mathbf{1}_{\{T\geq i\}}$. En déduire que $\mathbb{E}[X_T - u_0] = 0$ (on justifiera que $X_T - u_0$ est intégrable) et que $\mathbb{E}[(X_T - u_0)^2] = \sigma_1^2 \mathbb{E}[T]$.
   (b) Montrer que $\mathbb{E}[(X_T + Y_T - u_0 - v_0)^2] = (\sigma_1^2 + 2c + \sigma_2^2)\mathbb{E}[T]$. En déduire que $c\mathbb{E}[T] = -u_0 v_0$.
6. Conclure que $\mathbb{E}[T] < +\infty$ si et seulement si $c < 0$.

Exercice 5 (30 points)**.** On considère une chaine de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur E dénombrable, de matrice de transition Q. Pour $z \in E$, on note $T_z := \min\{n \geq 0, X_n = z\}$. On dit que $z \in E$ est un état absorbant si $Q(z,z) = 1$.

1. Soit $z \in E$ un état absorbant. Pour $x \in E$, on définit $h(x) = \mathbb{P}_x(T_z < +\infty)$. Montrer que h est Q-harmonique.
2. Soit $h : E \to [0,\infty)$ une fonction harmonique. On note $E' := \{x \in E : h(x) > 0\}$ et
$$Q_h(x,y) := \frac{Q(x,y)h(y)}{h(x)} \qquad x, y \in E'.$$
Montrer que Q_h est une matrice de transition.
3. Soit z un état absorbant. On note $E'' := \{x \in E : U(x,z) > 0\}$, où $U(\cdot,\cdot)$ est la fonction potentiel (ou fonction de Green).
   (a) On pose $h(x) = \mathbb{P}_x(T_z < +\infty)$. Montrer que $h(x) > 0$ si et seulement si $x \in E''$.
   (b) Montrer que, pour $x \in E''$, sous la loi conditionnelle
   $$\widetilde{\mathbb{P}}_x(\,\cdot\,) := \mathbb{P}_x(\,\cdot \mid T_z < +\infty),$$
   le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est un processus de Markov de matrice de transition Q_h (pour la fonction h de la question précédente).
4. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition donnée par $Q(x,x+1) = \frac{2x-1}{4x}$, $Q(x,x-1) = \frac{2x+1}{4x}$ pour $x \geq 1$ et $Q(0,0) = 1$. Soit $x \geq 1$ un entier fixé et soit $N \geq x$. On note $\tau = \min\{T_0, T_N\}$ et on pose $Y_n = X_{n\wedge\tau}$, qui est sous $\mathbb{P}_x$ une chaîne de Markov sur $\{0,\dots,N\}$.
   (a) Montrer que $h(x) = \mathbb{P}_x(T_N < T_0) = \frac{x^2}{N^2}$ pour tout $x \in \{0,\dots,N\}$.
   On pourra montrer que la fonction $u(x) = x^2$ est Q-harmonique.
   (b) Donner la loi de $(Y_n)_{n\geq 0}$ sous la loi conditionnelle $\widetilde{\mathbb{P}}_x^{(N)}(\,\cdot\,) := \mathbb{P}_x(\,\cdot \mid T_N < T_0)$.
   (c) Montrer que pour tout x on a $\mathbb{P}_x(T_0 = +\infty) = 0$, mais que l'on peut donner un sens à "la loi de $(X_n)_{n\geq 0}$ conditionnée à ne jamais atteindre 0".

Exercice 6 (30 points)**.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. On note $T_x := \inf\{t, B_t = x\}$ et on considère $(T_x)_{x\geq 0}$ comme un processus aléatoire (positif et croissant).

1. Montrer que $(T_x)_{x\geq 0}$ possède des incréments stationnaires : pour tous réels $0 \leq x < y$, $T_y - T_x$ a la même loi que T_{y-x}.
2. Montrer que $(T_x)_{x\geq 0}$ possède des incréments indépendants : pour tous réels $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k$, les variables aléatoires $(T_{x_i} - T_{x_{i-1}})_{1\leq i\leq k}$ sont indépendantes.
3. Montrer que si $(V_x)_{x\geq 0}$ est un processus à incréments stationnaires et indépendants, alors pour tout $x > 0$, la loi de V_x est infiniment divisible.
4. Montrer que l'on a la relation suivante d'invariance par changement d'échelle : pour tout $u > 0$, $(T_{ux})_{x\geq 0}$ a la même loi que $(u^2 T_x)_{x\geq 0}$ (au sens des lois finies-dimensionelles).
5. Montrer que presque sûrement la fonction $x \mapsto T_x$ n'est pas continue.
6. Soit $(\widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien indépendant de $(B_t)_{t\geq 0}$. On pose $Z_x = \widetilde{B}_{T_x}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, Z_x suit une loi de Cauchy.
   On rappelle que l'on a montré en cours que $\mathbb{E}[e^{-\lambda T_x}] = e^{-x\sqrt{2\lambda}}$ pour tout $\lambda > 0$.
   (b) Montrer que $(Z_x)_{x\geq 0}$ a des incréments indépendants et stationnaires. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $(Z_{\alpha x})_{x\geq 0}$ a la même loi que $(\alpha Z_x)_{x\geq 0}$.