M1 — Processus Stochastiques

Partiel de mi-semestre, 9 novembre 2022

Exercice 1. *Le but de l'exercice est de montrer que, pour $\alpha \in \,]0,2[$, la fonction définie par $\varphi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ pour $t \in \mathbb{R}$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire Z.*

Soit $\alpha \in \,]0,2[$ et soit X une variable aléatoire aléatoire de densité donnée par

$$f(x) = \frac{\alpha}{2|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{\{|x|\geq 1\}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

On note φ_X sa fonction caractéristique.

1. Montrer que pour $u \in \mathbb{R}$, on a $1 - \varphi_X(u) = \alpha \displaystyle\int_1^\infty \frac{1-\cos(ux)}{x^{1+\alpha}} \mathrm{d}x$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{1-\varphi_X(u)}{|u|^\alpha} = c_\alpha$, avec $c_\alpha = \alpha \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(v)}{v^{1+\alpha}} \mathrm{d}v$.
   On prendra soin de montrer que $c_\alpha < +\infty$.

Soient maintenant $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Pour $n \geq 1$, on pose $Z_n = n^{-1/\alpha} \sum_{i=1}^n X_i$.

3. Montrer que $\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_X(n^{-1/\alpha} t)^n$. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = e^{-c_\alpha |t|^\alpha}$.
4. Conclure que $\varphi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle Z et montrer que Z est infiniment divisible.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Z = \max(X,Y)$.

1. Calculer $\mathbb{E}[Z \,|\, Y]$.
2. Déterminer la densité de Z et calculer $\mathbb{E}[Y \,|\, Z]$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale telle que $\mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$ pour tout n. Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n - X_{n-1}$ et on suppose que $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{a_k^2} \mathbb{E}[Y_k^2] < +\infty$, où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de réels positifs telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

1. On pose $W_n := \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} Y_k$. Montrer que $(W_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
2. Calculer $\mathbb{E}[W_n^2]$ et en déduire que $(W_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans L^2.
3. En déduire que $\frac{1}{a_n} X_n$ converge vers 0 p.s. *On pourra utiliser sans démonstration le lemme de Kronecker : soit $(u_n)_{n\geq 1}$ le terme général d'une série convergente et soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite* croissante *de réels positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k u_k = 0$.*
4. On suppose qu'il existe une constante C et $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{E}[X_n^2] \leq C n^\alpha$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que pour tout $\beta > \alpha/2$, $\frac{1}{n^\beta} X_n$ converge vers 0 presque sûrement

Exercice 4. Soit $(\xi_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées). On suppose qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{\alpha\xi}] = 1$. Montrer que

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad \mathbb{P}\big(\exists\, n \geq 0 \text{ tel que } \xi_1 + \cdots + \xi_n \geq x\big) \leq e^{-\alpha x}\,.$$

Indication : introduire la bonne martingale.

Exercice 5. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 2\pi[$. Soit $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration associée à cette famille. On souhaite étudier le processus aléatoire $(Z_n)_{n\geq 0}$ dans le plan complexe défini par : $Z_0 = i$ et pour $n \geq 0$

$$Z_{n+1} = Z_n + \mathcal{I}m(Z_n)e^{iU_{n+1}}\,.$$

En notant $X_n = \mathcal{R}e(Z_n)$ et $Y_n = \mathcal{I}m(Z_n)$, on obtient facilement (on ne demande pas de le démontrer) la récurrence suivante : $X_0 = 0$, $Y_0 = 1$, puis pour $n \geq 0$

$$X_{n+1} = X_n + Y_n \cos(U_{n+1}), \quad Y_{n+1} = Y_n(1 + \sin(U_{n+1}))\,.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont des martingales.
2. Montrer que $\mathbb{E}[\sqrt{Y_n}] = \theta^n$ pour une constante $\theta \in]0, 1[$ (on ne demande pas de la calculer explicitement). En déduire que (Y_n) tend vers 0 p.s. La martingale (Y_n) est-elle fermée ?
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n)^2] = \infty$. La martingale (X_n) converge-t-elle dans L^2 ?
4. Montrez que $\mathbb{E}[\sqrt{|X_{n+1} - X_n|}] \leq \theta^n$ avec $\theta \in]0, 1[$ donné dans la question 2.
5. Soit $a \in]\,\theta^2, 1[$. Montrer que presque sûrement, il existe $n_0 = n_0(\omega)$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|X_n - X_{n-1}| \leq a^n$. Conclure que X_n converge presque sûrement vers une variable X_∞.
6. On souhaite calculer la loi de X_∞. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on introduit

$$M_n(\lambda) = \exp\big(i\lambda X_n - |\lambda| Y_n\big) \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Montrer que si U est de loi uniforme sur $[0, 2\pi[$ alors on a $\mathbb{E}[e^{w\, e^{iU}}] = 1$ pour tout $w \in \mathbb{C}$. *On pourra utiliser la formule des résidus.*

   (b) En déduire que $M_n(\lambda)$ est une martingale complexe, c'est-à-dire que la partie réelle et la partie imaginaire de $M_n(\lambda)$ sont des martingales. *On pourra utiliser directement l'espérance conditionnelle pour des variables aléatoires complexes.*

   (c) Montrer que $M_n(\lambda)$ converge presque sûrement et dans L^1, et en déduire que $\mathbb{E}[e^{i\lambda X_\infty}] = e^{-|\lambda|}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. *Il s'agit de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de Cauchy, de densité* $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ *sur* $\mathbb{R}$.
7. Aurions-nous pu utiliser le critère de convergence presque sûre $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$?

Correction de l'exercice 1.

1. On fait simplement le calcul avec la densité :

$$1-\varphi_X(u)=\alpha\int_{-\infty}^{-1}\frac{1-e^{iux}}{2|x|^{1+\alpha}}\mathrm{d}x+\alpha\int_1^{\infty}\frac{1-e^{iux}}{2|x|^{1+\alpha}}\mathrm{d}x=\alpha\int_1^{\infty}\frac{1-e^{-iux}+1-e^{iux}}{2|x|^{1+\alpha}}\mathrm{d}x\,,$$

où on a fait un changement de variable $x\to -x$ dans la première intégrale. Cela donne le résultat voulu en utilisant $\cos(ux)=\frac{1}{2}(e^{iux}+e^{-iux})$.

2. Avec un changement de variable $v=|u|x$, on obtient (par parité du cos)

$$1-\varphi_X(u)=|u|^\alpha\alpha\int_{|u|}^{\infty}\frac{1-\cos(v)}{v^{1+\alpha}}\mathrm{d}v\,.$$

Il reste à montrer que $\lim_{u\to 0}\alpha\int_{|u|}^{\infty}\frac{1-\cos(v)}{v^{1+\alpha}}\mathrm{d}v=c_\alpha<+\infty$. L'existence de la limite est donnée par convergence monotone. Le fait que la limite soit finie est dû au fait que : en 0, on a $\frac{1-\cos(v)}{v^{1+\alpha}}\sim\frac{1}{2}v^{1-\alpha}$, qui est intégrable car $\alpha<2$ (donc $1-\alpha>-1$) ; en $+\infty$, la fonction intégrée est bornée par $\alpha^{-1}v^{-(1+\alpha)}$ qui est intégrable car $\alpha>0$.

3. On a facilement, par indépendance :

$$\varphi_{Z_n}(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{n^{-1/\alpha}X_i}(t)=\mathbb{E}[e^{itn^{-1/\alpha}X}]^n=\varphi_X(n^{-1/\alpha}t)\,.$$

D'après la question précédente, pour tout $t\in\mathbb{R}$ fixé, $\varphi_X(n^{-1/\alpha}t)=1-(1+o(1))c_\alpha|n^{-1/\alpha}t|^\alpha=1-(1+o(1))\frac{c_\alpha|t|^\alpha}{n}$ quand $n\to\infty$. On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{Z_n}(t)=\lim_{n\to\infty}\left(1-(1+o(1))\frac{c_\alpha|t|^\alpha}{n}\right)^n=e^{-c_\alpha|t|^\alpha}\,.$$

4. Comme la fonction $\lim_{n\to\infty}\varphi_{Z_n}(t)=\tilde{\varphi}(t)=e^{-c_\alpha|t|^\alpha}$ est continue en 0, d'après le théorème de continuité de Lévy, il s'agit de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire $\tilde{Z}$. On en déduit que $\varphi(t)=e^{-|t|^\alpha}$ est la fonction caractéristique de $Z=(c_\alpha)^{-1/\alpha}\tilde{Z}$. Clairement, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(t)=\varphi_n(t)^n$, où $\varphi_n(t)=e^{-\frac{1}{n}|t|^\alpha}$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire (de $\frac{1}{n^{1/\alpha}}Z$) : donc Z a la même loi que $\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n^{1/\alpha}}$ où les Y_i sont i.i.d. de même loi que Z. On dit que Z suit une loi α-stable.

Correction de l'exercice 2.

1. On applique la formule du cours : Z est une fonction de X,Y avec X et Y indépendantes, donc $\mathbb{E}[Z\mid Y]=\psi(Y)$, avec

$$\psi(y)=\mathbb{E}[\max(X,y)]=y\mathbb{P}(X<y)+\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X\geq y\}}].$$

Un calcul facile donne, pour $y\in\,]0,1[$, $\psi(y)=y^2+\int_y^1 x\mathrm{d}x=y^2+\frac{1}{2}[1-y^2]=\frac{1}{2}(1+y^2)$, donc $\mathbb{E}[Z\mid Y]=\frac{1}{2}(1+Y^2)$ p.s.

2. On a $\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t, Y \leq t) = t^2$ pour $t \in [0,1]$, donc on en déduit que Z admet pour densité $2t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$. Pour calculer $\mathbb{E}[Y \mid Z]$, calculons $\mathbb{E}[Yh(Z)]$ pour une fonction h mesurable positive arbitraire. En utilisant la formule de transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Yh(Z)] &= \int_{[0,1]^2} yh(\max(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 y\Big(\int_0^y h(y)\mathrm{d}x + \int_y^1 h(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y^2 h(y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \Big(\int_0^x y\mathrm{d}y\Big)h(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 z^2 h(z)\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

où on a appliqué Fubini pour l'avant-dernière égalité. En utilisant la densité de Z, on a donc montré que $\mathbb{E}[Yh(Z)] = \mathbb{E}[\frac{3}{4}Zh(Z)]$, pour tout fonction h mesurable positive. Cela montre que $\mathbb{E}[Y \mid Z] = \frac{3}{4}Z$.

Correction de l'exercice 3.

1. Montrer que c'est une martingale est facile : (i) adapté car les Y_k sont $\mathscr{F}_k$-mesurables, (ii) intégrable car les X_k le sont, donc les Y_k aussi, (iii) martingale car $M_n - M_{n-1} = \frac{1}{a_n}Y_n$ et $\mathbb{E}[Y_n \mid \mathscr{F}_{n-1}] = 0$ par construction de Y_n (car X_n est une martingale).

2. En développant le carré et en utilisant la linéarité de l'espérance (tous les Y_k sont de carré intégrables), on a

$$\mathbb{E}[W_n^2] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2}\mathbb{E}[Y_k^2] + 2\sum_{1\leq j<k\leq n} \frac{1}{a_j a_k}\mathbb{E}[Y_j Y_k]\,.$$

Mais pour $j<k$, on a $\mathbb{E}[Y_jY_k \mid \mathscr{F}_j] = Y_j\mathbb{E}[Y_k \mid \mathscr{F}_j] = 0$, par définition de Y_k, en utilisant que si $j<k$ $\mathbb{E}[X_k \,|, \mathscr{F}_j] = \mathbb{E}[X_{k-1} \,|, \mathscr{F}_j] = X_j$ p.s. En prenant l'espérance, on en conlut que $\mathbb{E}[Y_jY_k] = 0$, donc

$$\mathbb{E}[W_n^2] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2}\mathbb{E}[Y_k^2], \qquad \text{d'où } \sup_n \mathbb{E}[W_n^2] = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{a_k^2}\mathbb{E}[Y_k^2] < +\infty\,.$$

3. On sait que $(W_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2, donc elle converge presque sûrement. Ainsi, p.s. la série de terme général $\frac{1}{a_n}Y_n$ converge. D'après le lemme de Kronecker, on obtient que, presque sûrement,

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^n a_k\,\frac{1}{a_k}Y_k = \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1}) = \frac{1}{a_n}X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

4. Essayons de montrer que $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{a_k}\mathbb{E}[Y_k^2] < +\infty$, avec $a_k = k^\beta$ (qui vérisie bien les hypothèses). Remarquons que $\mathbb{E}[Y_k^2] = \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] = \mathbb{E}[X_k^2] - \mathbb{E}[X_{k-1}^2]$ (en utilisant que $\mathbb{E}[X_kX_{k-1}] = \mathbb{E}[X_{k-1}^2]$ car $\mathbb{E}[X_kX_{k-1} \mid \mathscr{F}_{k-1}] = X_{k-1^2}$ par la propriété de martingale). On a alors par "sommation par partie" (transformation d'Abel, en posant $1/a_0^2 = 0$)

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{a_k^2}\mathbb{E}[Y_k^2] = \sum_{k=2}^n \frac{1}{a_k^2}\big(\mathbb{E}[X_k^2] - \mathbb{E}[X_{k-1}^2]\big) = \frac{1}{a_n^2}\mathbb{E}[X_n^2] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2]\Big(\frac{1}{a_{k-1}^2} - \frac{1}{a_k^2}\Big)$$

En utilisant le fait que $\mathbb{E}[X_k^2] \leq Ck^\alpha$ et que $\frac{1}{(k-1)^{2\beta}} - \frac{1}{k^{2\beta}} \leq C'k^{-2\beta-1}$, on en conclut que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{a_k^2}\mathbb{E}[Y_k^2] \leq Cn^{\alpha-2\beta} + CC'\sum_{k=1}^n k^{-1+\alpha-2\beta}$, qui converge donc si $2\beta > \alpha$.

Correction de l'exercice 4. On introduit le processus $X_n = e^{\alpha(\xi_1+\cdots+\xi_n)}$, pour $n \geq 0$ ($X_0 = 0$). Il s'agit clairement d'une martingale (multiplicative), qui plus est positive. La fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$ étant strictement croissante (d'inverse strictment croissante) peut alors reformuler l'énoncé à prouver en termes de (X_n) : on doit montrer que

$$\text{pour tout } x \geq 0\,, \qquad \mathbb{P}\big(\exists\, n \text{ tel que } X_n \geq e^{\alpha x}\big) \leq e^{-\alpha x}\,.$$

Mais pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Doob (on rappelle que X_n est positive) donne

$$\mathbb{P}\big(\exists\, n \leq k \text{ tel que } X_n \geq a\big) = \mathbb{P}\big(\exists\, n \leq k \text{ tel que } X_n \geq a\big) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{a}\,.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(\exists\, n \leq k \text{ tel que } X_n \geq e^{\alpha x}) \leq e^{-\alpha x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En prenant la limite quand $k \to \infty$, on obtient le résultat voulu (par convergence monotone).

Correction de l'exercice 5.

1. On vérifie facilement les trois conditions (i) $\mathscr{F}_n$-mesurabilité par récurrence, (ii) intégrabilité en s'apercevant que $Y_n \leq 2^n$, et (iii) $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = X_n$, $\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = Y_n$, en utilisant le fait que $\mathbb{E}[\cos(U_1)] = \mathbb{E}[\sin(U_1)] = 0$.

2. Comme Y_n est une martingale positive, elle converge p.s. vers une variable $Y_\infty \geq 0$. On écrit $Y_n = \prod_{k=1}^n (1 + \sin(U_k))$, de sorte que par indépendance des $(U_k)_{k\geq 1}$, on obtient

$$\mathbb{E}[\sqrt{Y_n}] = \mathbb{E}[\sqrt{1 + \sin(U_1)}]^n = \theta^n,$$

avec $\theta := \mathbb{E}[\sqrt{1 + \sin(U_1)}] < \mathbb{E}[(1 + \sin(U_1))]^{1/2} = 1$ (inégalité de Cauchy-Schwarz, en dehors du cas d'égalité). En fait, θ est calculable, on trouve $\theta = 2\sqrt{2}/\pi$.

On a donc que $\mathbb{E}[\sqrt{Y_n}] \to 0$ quand $n \to \infty$. Pour conclure, plusieurs options :

- soit en utilisant Fatou : $\mathbb{E}[\sqrt{Y_\infty}] = \mathbb{E}[\liminf Y_n] \leq \liminf \mathbb{E}[\sqrt{Y_n}] = 0$. Ainsi, $\sqrt{Y_\infty}$ est une variable positive d'intégrale nulle, et $Y_\infty = 0$ p.s.

- soit en utilisant l'inégalité de Markov : pour tout $\varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\mathbb{E}[\sqrt{Y_n}] \to 0$. Ainsi, Y_n converge en probabilité vers 0, et par unicité de la limite $Y_\infty = 0$ p.s.

3. On a $(X_{n+1})^2 = (X_n)^2 + 2X_nY_n\cos(U_{n+1}) + (Y_n)^2\cos(U_{n+1})^2$, de sorte que, en utilisant l'indépendance de la suite (U_n)

$$\mathbb{E}[(X_{n+1})^2] = \mathbb{E}[(X_n)^2] + 2\mathbb{E}[X_nY_n]\mathbb{E}[\cos(U_{n+1})] + \mathbb{E}[(Y_n)^2]\mathbb{E}[\cos(U_{n+1})^2]\,.$$

En ré-utilisant que $Y_n = \prod_{k=1}^n (1 + \sin(U_k))$, on a donc que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_{n+1})^2] &= \mathbb{E}[(X_n)^2] + y^2\mathbb{E}[\cos(U_{n+1})^2]\mathbb{E}[(1 + \sin(U_1)^2]^n \\ &\geq \mathbb{E}[\cos(U_{n+1})^2]\gamma^n \to +\infty,\end{aligned}$$

avec $\gamma := \mathbb{E}[(1+\sin(U_1)^2] > 1$ (calcul explicite ou inégalité de Jensen hors du cas d'égalité).

Ainsi, X_n ne peut converger dans L^2, sinon X_n serait bornée dans L^2.

4. En écrivant $|X_{n+1} - X_n| \leq Y_n$, on obtient avec un calcul précédent que

$$\mathbb{E}[\sqrt{|X_{n+1} - X_n|}] \leq \mathbb{E}[\sqrt{Y_n}] = \theta^n\,.$$

5. Appelons A_n l'événement $\{|X_{n+1}-X_n| \geq a^n\}$. Alors l'inégalité de Markov donne
$$\mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{(a^n)^{1/2}}\mathbb{E}[\sqrt{|X_{n+1}-X_n|}] \leq \left(\frac{\theta}{a^{1/2}}\right)^n .$$
Et comme $a^{1/2} > \theta$, on a donc que $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, et le lemme de Borel-Cantelli donne que $\mathbb{P}$-p.s. il existe $n_0 = n_0(\omega)$ tel que $|X_{n+1}-X_n| \leq a^n$ pour tout $n \geq n_0$. Alors, pour tout $m > n \geq n_0$
$$|X_m - X_n| \leq \sum_{i \geq n} |X_{i+1}-X_i| \leq a^n \times \frac{1}{1-a} \overset{n\to+\infty}{\to} 0.$$
Ainsi, p.s., X_n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, et donc X_n converge. On a donc montré que $X_n \to X_\infty$ p.s.

6. (a) On a
$$\mathbb{E}\big[e^{w\, e^{iU}}\big] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{w\, e^{it}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{C_1} e^{w\, z}\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$
où $C_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ est le cercle unité (en parametrant le cercle par son angle t, $z = e^{it}$, $\mathrm{d}t = ie^{it}\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}t =$). Maintenant, la formule des résidus donne $\frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\frac{e^{itz}}{z}\mathrm{d}z = 1$, ce qui conclut le démonstration.

(b) Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est adapté et intégrable est facile. Pour la propriété de martingale, on utilise le fait que $X_{n+1} = X_n + Y_n\cos(U_{n+1})$, $Y_{n+1} = Y_n + Y_n\sin(U_{n+1})$ pour avoir
$$M_{n+1} = M_n e^{i\lambda Y_n\cos(U_{n+1}) - |\lambda| Y_n \sin(U_{n+1})} .$$
Ainsi,
$$\mathbb{E}[M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n] = M_n \mathbb{E}\Big[e^{i\lambda Y_n\cos(U_{n+1}) - |\lambda| Y_n \sin(U_{n+1})} \,\Big|\, \mathscr{F}_n\Big] .$$
Comme Y_n est $\mathscr{F}_n$ mesurable et que U_{n+1} est indépendant de $\mathscr{F}_n$, on en déduit par un résultat du cours que
$$\mathbb{E}\Big[e^{i\lambda Y_n\cos(U_{n+1}) - |\lambda| Y_n \sin(U_{n+1})} \,\Big|\, \mathscr{F}_n\Big] = \psi(Y_n) , \qquad \psi(y) = \mathbb{E}\big[e^{i\lambda y\cos(U_{n+1}) - |\lambda| y \sin(U_{n+1})}\big] .$$
Si $\lambda > 0$, on a $\psi(y) = \mathbb{E}[e^{we^{iU}}]$ avec $w = iy$; si $\lambda < 0$, on a $\psi(y) = \mathbb{E}[e^{we^{-iU}}]$ avec $w = iy$ (à noter que e^{iU} et e^{-iU} ont la même loi : uniforme sur le cercle unité). La question précédente montre que l'on a $\psi(y) = 1$ pour tout y : cela conclut la démonstration que M_n est une martingale.

(c) On a $|M_n| \leq 1$ pour tout n, donc c'est une martingale bornée : elle converge p.s. et dans L^p pour tout $p \geq 1$. En particulier elle converge dans L^1. Comme $Y_n \to 0$ et $X_n \to X_\infty$ p.s., on a $\lim_{n\to\infty} e^{i\lambda X_\infty}$ p.s.

Grâce à la convergence and L^1 et au fait que $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] = e^{-|\lambda|}$, on obtient
$$e^{-|\lambda|} = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} M_n] = \mathbb{E}[e^{i\lambda X_\infty}].$$
On a donc montré que la fonction caractéristique de X_∞ est égale à $e^{-|\lambda|}$, qui est la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy.

7. La variable aléatoire X_n converge en loi vers une variable X_∞ qui n'est pas dans L^1. On n'aurait donc pas pu avoir $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|]$.