M1 — Processus Stochastiques

Devoir maison, à rendre au plus tard le 21 décembre.

Problème (Autour de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$).
On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire la chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}^2$ de matrice de transition $(Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{Z}^2}$ donnée par

$$Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } \boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici, on a noté $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ si $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ sont voisins dans $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire si $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1 = 1$; on notera $\mathbf{0}$ l'origine de $\mathbb{Z}^2$. Dans la suite, pour $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2$, on notera $T_{\boldsymbol{x}} := \inf\{n\geq 0, X_n = \boldsymbol{x}\}$.

1. Montrer que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible. Donner une mesure invariante de la chaîne de Markov.
2. Montrer que la chaîne est récurrente.
   On pourra utiliser le résultat suivant (du cours) : si n est impair, on a $Q_n(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$; si n est pair ($n = 2k$), on a $Q_{2k}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(X_{2k} = \mathbf{0}) = \big(\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\big)^2 \sim \frac{1}{\pi k}$ quand $k\to\infty$.

Partie A. La fonction potentiel. On introduit, pour $n\geq 0$ et $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2$, la fonction

$$h_n(\boldsymbol{x}) := \sum_{k=0}^{n}\big[Q_k(\mathbf{0},\mathbf{0}) - Q_k(\mathbf{0},\boldsymbol{x})\big] = \mathbb{E}_{\mathbf{0}}\big[N_n(\mathbf{0}) - N_n(\boldsymbol{x})\big]\,,$$

où $N_n(\boldsymbol{x}) := \sum_{k=0}^{n}\mathbf{1}_{\{X_n=\boldsymbol{x}\}}$.

3. Montrer que $Qh_n(\boldsymbol{x}) := \sum\limits_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{Z}^2} Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})h_n(\boldsymbol{y}) = h_n(\boldsymbol{x}) - \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(X_{n+1}=\boldsymbol{x}) + \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(X_0=\boldsymbol{x})$.

On admet ici que la limite

$$h(\boldsymbol{x}) := \lim_{n\to\infty} h_n(\boldsymbol{x})$$

existe et est finie[1] pour tout $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2$, et vérifie $h(\boldsymbol{x}) > 0$ pour tout $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ (et $h(\mathbf{0}) = 0$).

4. Montrer que $Qh(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}) + \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{x}=0\}}$. En déduire que $h(\boldsymbol{x}) = 1$ pour tout $\boldsymbol{x}$ voisin de $\mathbf{0}$.
5. Montrer que pour tout $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$, sous $\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}$, $(M_n := h(X_{n\wedge T_{\mathbf{0}}}))_{n\geq 0}$ est une martingale (relativement à la filtration canonique $\mathscr{F}_n$ associée à $(X_n)_{n\geq 0}$).
6. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. mais pas dans L^1 quand $n\to\infty$. En déduire que $\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2} h(\boldsymbol{x}) = +\infty$.

Partie B. Propriétés de la fonction potentiel et lien avec la probabilité d'éviter $\mathbf{0}$.

7. Soit $n\geq 0$ et soient $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{Z}_2$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$. Montrer que

$$\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\big[\big(N_n(\boldsymbol{y}) - N_n(\boldsymbol{x})\big)\mathbf{1}_{\{T_{\boldsymbol{y}}<T_{\boldsymbol{x}}\}}\big] = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}_{\mathbf{0}}\big[\mathbf{1}_{\{T_{\boldsymbol{y}}=k\}}h_{n-k}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\mathbf{1}_{\{T_{\boldsymbol{y}}<T_{\boldsymbol{x}}\}}\big]\,.$$

1. Il s'agit d'un résultat un peu technique : si vous êtes intéressé·e, vous pouvez allez voir la Section 3.2 du cours de S. Popov.

8. En déduire que

$$h(\boldsymbol{x}) - h(\boldsymbol{y}) = \mathbb{E}_{\mathbf{0}}\big[h(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\mathbf{1}_{\{T_{\boldsymbol{y}}<T_{\boldsymbol{x}}\}}\big] - \mathbb{E}_{\mathbf{0}}\big[h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathbf{1}_{\{T_{\boldsymbol{x}}<T_{\boldsymbol{y}}\}}\big]\,,$$

puis que $|h(\boldsymbol{x})-h(\boldsymbol{y})| \le 1$ pour tout $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$.

9. Pour $r>1$, on note $\Lambda_r := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\,, h(\boldsymbol{x})<r\}$ qui est un ensemble fini (on admet que $\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} h(\boldsymbol{x}) = +\infty$) et on introduit le temps d'arrêt $\tau_r := \min\{n\ge 0, X_n\notin\Lambda_r\}$. En considérant la martingale $(M_{n\wedge\tau_r})$ où $(M_n)_{n\ge0}$ est la martingale de la question 5, montrer que pour tout $\boldsymbol{x}\in\Lambda_r$,
$$\frac{h(x)}{r+1} \le \mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}\big(T_{\mathbf{0}}>\tau_r\big) \le \frac{h(x)}{r}\,.$$
Indication : on pourra montrer que $r\le h(\boldsymbol{x})\le r+1$ si $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2\setminus\Lambda_r$ possède un voisin dans Λ_r.

Partie C. La h-transformée et la marche conditionnée. On considère maintenant la chaîne de Markov $(\widehat{X}_n)_{n\ge0}$ sur $E=\mathbb{Z}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ de matrice de transition $(\widehat{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E}$ donnée par

$$\widehat{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{h(\boldsymbol{y})}{h(\boldsymbol{x})}Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad \text{pour } \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E=\mathbb{Z}^2\setminus\{\mathbf{0}\}\,.$$

On note $\widehat{\mathbb{P}}_{\boldsymbol{x}}$ la loi de la chaîne de Markov issue de $\boldsymbol{x}$.

10. Vérifier que $\widehat{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ est bien une matrice de transition sur $\mathbb{Z}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ et que la chaîne de Markov est irréductible. Montrer que $\lambda(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x})^2$ est une mesure réversible pour cette chaîne de Markov.

11. Montrer que pour tout chemin $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0\sim\boldsymbol{x}_1\sim\cdots\sim\boldsymbol{x}_n$ tel que $\boldsymbol{x}_i\in\Lambda_r\setminus\{\mathbf{0}\}$ pour tout $0\le i\le n-1$ et $\boldsymbol{x}_n\notin\Lambda_r$, on a

$$\widehat{\mathbb{P}}_{\boldsymbol{x}}\big(\widehat{X}_0=\boldsymbol{x}_0,\dots,\widehat{X}_n=\boldsymbol{x}_n\big) = \frac{h(\boldsymbol{x}_n)}{h(\boldsymbol{x})}\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}(X_0=\boldsymbol{x}_0,\dots,X_n=\boldsymbol{x}_n)\,.$$

En utilisant la question 9, en déduire que

$$\widehat{\mathbb{P}}_{\boldsymbol{x}}\big(\widehat{X}_0=\boldsymbol{x}_0,\dots,\widehat{X}_n=\boldsymbol{x}_n\big)\begin{cases}\le \frac{r+1}{r}\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}\big(X_0=\boldsymbol{x}_0,\dots,X_n=\boldsymbol{x}_n \mid T_{\mathbf{0}}>\tau_r\big)\,,\\ \ge \frac{r}{r+1}\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}}\big(X_0=\boldsymbol{x}_0,\dots,X_n=\boldsymbol{x}_n \mid T_{\mathbf{0}}>\tau_r\big)\,.\end{cases}$$

En prenant $r\to\infty$, comme $\frac{r+1}{r}\to 1$ (et $\tau_r\to\infty$), on peut interpréter cela comme le fait que la loi de $(\widehat{X}_n)_{n\ge0}$ est celle de $(X_n)_{n\ge0}$ conditionnée[2] à avoir $T_{\mathbf{0}}=+\infty$. On dit que $(\widehat{X}_n)_{n\ge0}$ est « la marche simple sur $\mathbb{Z}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ conditionnée à ne jamais toucher $\mathbf{0}$ ».

12. Montrer que pour $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, sous $\widehat{\mathbb{P}}_{\boldsymbol{x}}$, $(W_n := \frac{1}{h(\widehat{X}_n)})_{n\ge0}$ est une sur-martingale (relativement à la filtration canonique $\widehat{\mathscr{F}}_n$ associée à $(\widehat{X}_n)_{n\ge0}$).

13. Montrer que la chaîne $(\widehat{X}_n)_{n\ge0}$ est transiente.

2. Il s'agit bien évidemment d'une définition formelle (mais naturelle) car il s'agit d'un conditionnement par un événement de probabilité nulle.