M1 — Processus Stochastiques

Examen final, 18 janvier 2024. Durée : 2h30.

Pour les 3 derniers exercices (thèmes : martingale, chaîne de Markov, mouvement brownien), choisissez de traiter en priorité l'un des exercices. J'appliquerai un barême adaptatif suivant vos résultats à ces exercices (un coefficient 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ aux notes obtenues rangées par ordre décroissant), pour favoriser le fait de faire un exercice en entier plutôt que de piocher des questions faciles dans les trois exercices.

Dans tout l'examen, si cela n'est pas précisé :

- Une (sur-/sous-)martingale $(X_n)_{n\geq 0}$ sera munie de sa filtration canonique $\mathscr{F}_n := \sigma((X_k)_{k\leq n})$.
- Une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sera à valeur dans E dénombrable et sa matrice de transition sera notée Q. Pour $x \in E$ on notera $\mathbb{P}_x$ la loi de la chaîne de Markov issue de x.
- Un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ sera considéré sur l'espace canonique, muni de la filtration canonique $\mathscr{F}_t = \sigma(B_s, s \in [0,t])$, et on note $\mathcal{G}_t := \mathscr{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on notera $\mathbb{P}_x$ la loi d'un mouvement brownien issu de x ; on notera plus simplement $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0$.

Exercice 1 (12 points)**.** Répondez *Vrai* ou *Faux* aux affirmations suivantes. Justifiez vos réponses soit par une démonstration soit par un contre-exemple.

1. Pour $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de densité $f_n(x) = \frac{n+1}{n} x^{-2-\frac{1}{n}} \mathbf{1}_{\{x>1\}}$. La suite $(\frac{1}{n} X_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.
2. Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, alors $Y_n := \sum_{k=1}^n X_k$ est une martingale.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sous-martingale *positive*, bornée dans L^p pour un $p > 1$, c'est-à-dire telle que $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[|X_n|^p] < +\infty$. Alors $\mathbb{E}\big[\sup_{n\geq 0} |X_n|^p\big] < +\infty$.
4. Pour tout $t > 0$, $\int_0^t (B_s)^2 \mathrm{d}s$ a la même loi que $t^2 \int_0^1 (B_s)^2 \mathrm{d}s$.

Exercice 2 (9 points)**.** Soit (X,Y) une variable aléatoire de loi uniforme sur le demi-disque unité, c'est-à-dire de densité $f(x,y) = \frac{2}{\pi} \mathbf{1}_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \mathbf{1}_{\{y\geq 0\}}$.

1. Calculer la densité marginale de X.
2. Calculer $\mathbb{E}[Y \,|\, X]$. Quelle valeur serait-il naturel de donner à $\mathbb{E}[Y \,|\, X = 0]$?

Passons en coordonnées polaire : on pose $X = R\cos\Theta$, $Y = R\sin\Theta$ et on admet que les variables aléatoires R, Θ sont indépendantes de densités respectives $f_R(r) = 2r\mathbf{1}_{[0,1]}(r)$, $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{[0,\pi]}(\theta)$.

3. Calculer $\mathbb{E}[R \,|\, \Theta]$. Quelle valeur serait-il naturel de donner à $\mathbb{E}[Y \,|\, \Theta = \frac{\pi}{2}]$?
   Faire un dessin pour expliquer pourquoi les questions 2 et 3 donnent des réponses différentes.

Exercice 3 (12 points)**.** Soit Q une matrice de transition sur E et soit π une mesure de probabilité invariante telle que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$. Soit Q^* définie par

$$Q^*(x,y) := \frac{\pi(y)}{\pi(x)} Q(y,x), \qquad x,\, y \in E.$$

1. Montrer que Q^* est une matrice de transition sur E et que π est une mesure de probabilité invariante pour Q^*.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov avec matrice de transition Q et soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. Pour $0 \leq n \leq N$, on pose $X_n^* := X_{N-n}$. Calculer $\mathbb{P}_\pi(X_0^* = x_0, \cdots, X_N^* = x_N)$ pour $x_1, \ldots, x_N \in E$. En déduire que, sous $\mathbb{P}_\pi$, $(X_n^*)_{0\leq n\leq N}$ est une chaîne de Markov de loi initiale π et matrice de transition Q^*. Interpréter
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $Q^* = Q$.
4. *Un exemple.* Soit $p \in]0, 1[$ et Q la matrice de transition sur $\mathbb{N}$ donnée par

$$Q(x,y) = p\mathbf{1}_{\{y=x+1\}} + (1-p)\mathbf{1}_{\{y=0\}}, \qquad x, y \in \mathbb{N}.$$

Calculer une mesure de probabilité invariante π et dire si elle est unique. Calculer Q^* et vérifier que dans ce cas $Q^*(x,y) = \mathbf{1}_{\{y=x-1\}} + \pi(y)\mathbf{1}_{\{x=0\}}$, pour $x, y \in \mathbb{N}$. Dessiner les trajectoires typiques de X et X^* dans ce cas.

Exercice 4 (6 points)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov. On suppose que,

$$\forall x, y \in E\,, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n(x,y) = \nu(y)\,,$$

où ν est une probabilité sur E et ne dépend pas de x.

1. En appliquant le lemme de Fatou, montrer que, pour $y \in E$, $\sum_{z\in E} \nu(z)Q(z,y) \leq \nu(y)$.
2. Montrer que ν est une probabilité invariante.

Barême adaptatif (coeff. 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$) pour les trois exercices suivants

Exercice 5 (15 points)**.** Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. intégrables, et $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ la filtration canonique associée. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et on considère T un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.

1ère identité de Wald. On suppose les $(X_k)_{k\geq 1}$ intégrables et $T < +\infty$ p.s. On note $m := \mathbb{E}[X_1]$.

1. Montrer que $(S_n - mn)_{n\geq 0}$ est une martingale. En déduire que $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}] = m\mathbb{E}[n \wedge T]$ pour tout $n \geq 0$.
2. On suppose que les X_k sont positifs. Montrer que $\mathbb{E}[S_T] = m\mathbb{E}[T]$.
3. On ne suppose plus les X_k positifs, mais on suppose que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.
   (a) Montrer que $W := |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_T|$ est intégrable.
   (b) En déduire que S_T est intégrable et que $\mathbb{E}[S_T] = m\mathbb{E}[T]$.

2ème identité de Wald. On suppose les $(X_k)_{k\geq 1}$ de carré intégrables, que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$ (ce qui implique que $T < +\infty$ p.s.). On note $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X_1)^2] < +\infty$.

4. Montrer que $(S_n^2 - \sigma^2 n)_{n\geq 0}$ est une martingale. En déduire que $\mathbb{E}[(S_{n\wedge T})^2] = \sigma^2\mathbb{E}[n \wedge T]$ pour tout $n \geq 0$.
5. Montrer que $\mathbb{E}[(S_T)^2] = \sigma^2\mathbb{E}[T]$.
   Indication : on pourra montrer que $(S_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2.

Exercice 6 (15 points)**.** Soient $(\xi_k)_{k\geq 0}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{Z}$, dont on note la loi μ. On notera ξ une variable aléatoire de même loi que ξ_k : on supposera que $\mathbb{P}(\xi > 0) > 0$ et $\mathbb{P}(\xi = -1) > 0$ et que ξ est intégrable.

On considère le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ défini de manière itérative de la façon suivante : $X_0 = x \in \mathbb{N}$ et pour $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+ , \qquad \text{où } z^+ = \max\{z, 0\} .$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition donnée par

$$Q(x,y) = \begin{cases} \mu(y-x) & \text{si } y \neq 0 , \\ \mathbb{P}(\xi \leq -x) & \text{si } y = 0 . \end{cases}$$

   La chaîne est-elle irréductible ? Est-elle apériodique ?

On considère la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ pour $n \geq 0$.

2. Montrer que $X_n \geq x + S_n$ pour tout $n \geq 0$. En déduire que si $\mathbb{E}[\xi] > 0$ alors la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est transiente.
3. Montrer que $X_n = x + S_n$ pour tout $n < \tau$, où $\tau = \min\{n \geq 0, S_n \leq -x\}$. En déduire que si $\mathbb{E}[\xi] \leq 0$, alors pour tout $x \geq 1$, $\mathbb{P}_x(T_0 < +\infty) = 1$, où $T_0 := \min\{n \geq 0, X_n = 0\}$.
   On pourra utiliser, sans démonstration, que si $\mathbb{E}[\xi] \leq 0$ *alors* $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$.
   Conclure que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est récurrente.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $X_n = \max\{0, \xi_n, \xi_n+\xi_{n-1}, \ldots, \xi_n+\cdots+\xi_2, \xi_n+\cdots+\xi_1+x\}$. En déduire que X_n a la même loi que $Y_n = Y_n(x) := \max\{0, S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}, S_n + x\}$.
5. On suppose que $\mathbb{E}[\xi] < 0$.
   (a) Montrer que, pour tout x, Y_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y_∞ (où Y_∞ ne dépend pas de $x \in E$).
   (b) En déduire que, pour tout $x \in E$, $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers Y_∞. Conclure que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est récurrente positive. *(On pourra utiliser l'Exercice 4.)*

Exercice 7 (15 points)**.** Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale continue relativement à une filtration continue à droite $(\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. On suppose que $X_0 = x > 0$ et pour $y > 0$, on note

$$T_y := \inf\{t > 0, X_t = y\} .$$

1. Montrer que $\mathbb{E}[X_{t\wedge T_y}] = x$ pour tout $t \geq 0$.
2. On suppose que $X_t \geq 0$ pour tout $t > 0$ et que $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ presque sûrement. Montrer que, pour $y > x$, $\mathbb{P}(T_y < +\infty) = \frac{x}{y}$.
3. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien issu de 1 et soit $T_0 := \inf\{t > 1, B_t = 0\}$. On pose $S = \sup_{0\leq t\leq T_0} B_t$. Déterminer $\mathbb{P}(S \geq y)$ pour tout y réel, et en déduire la densité de la variable aléatoire S.

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien issu de 0 et soit $\alpha > 0$. Pour $t > 0$, on pose $Y_t = B_t - \alpha t$.

4. Montrer que $(X_t := \exp(2\alpha Y_t))_{t\geq 0}$ est une martingale.
5. Montrer que $\sup_{t\geq 0} Y_t$ suit une loi exponentielle, dont on donnera le paramètre.