M1 — Processus Stochastiques

Partiel de mi-semestre, 8 novembre 2023 (durée : 1h30)

Exercice 1. 1. Montrer que si $(\varphi_k)_{1\le k\le n}$ sont des fonctions caractéristiques de variables aléatoires réelles et si $(\alpha_k)_{1\le k\le n}$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_k = 1$, alors $\psi_n(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k\varphi_k(t)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle.

2. Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(t) := \frac{2}{t^2}(1 - e^{-\frac{1}{2}t^2}) = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}xt^2}\mathrm{d}x$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle.

Correction de l'exercice 1. 1. Notons $(\mu_k)_{1\le k\le n}$ les lois de probabilité de fonctions caractéristiques φ_k, c'est-à-dire $\varphi_k(t) = \int e^{itx}\mu_k(\mathrm{d}x)$. Alors, si on pose $\nu := \sum_{k=1}^n \alpha_k\mu_k$, il s'agit d'une loi de probabilité car $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, et sa fonction caractéristique est

$$\varphi(t) = \int e^{itx}\nu(\mathrm{d}x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int e^{itx}\mu_k(\mathrm{d}x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k\varphi_k(t)\,.$$

Remarque : si $(X_k)_{1\le k\le n}$ sont des v.a. de lois μ_k, on peut représenter la v.a. Y de loi ν comme $Y = X_K$, où K est une v.a. à valeurs dans $\{1,\dots,n\}$ de loi $\mathbb{P}(K=k) = \alpha_k$, indépendante de $(X_k)_{1\le k\le n}$. En effet, $\mathbb{P}(Y\in A) = \mathbb{P}(X_K\in A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k\in A, K=k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k\mathbb{P}(X_k\in A)$.

2. On va montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)$, où les φ_n sont des fonctions caractéristiques : comme φ est continue en 0, le théorème de continuité de Lévy permettra de conclure.

Il suffit pour cela de voir que par approximation de Riemann, on a

$$\varphi(t) = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}xt^2}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t), \qquad \text{où } \varphi_n(t) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}e^{-\frac{1}{2}\frac{k}{n}t^2}\,.$$

Comme pour tout $n\ge 1$ $\varphi_k^{(n)}(t) := e^{-\frac{1}{2}\frac{k}{n}t^2}$ est la fonction caractéristique d'une gaussienne $\mathcal{N}(0,\frac{k}{n})$, la question précédente permet de conclure que $\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\varphi_k^{(n)}(t)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle.

Exercice 2. Soit (X,Y) un couple de v.a. dont la densité jointe est donnée par

$$f(x,y) = e^{-y}\mathbf{1}_{\{0<x<y\}}\,.$$

1. Donner les densités marginales de X et Y.
2. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[Y|X]$.

Correction de l'exercice 2. 1. Il suffit d'intégrer la densité par rapport à l'autre variable :

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y = \mathbf{1}_{\{x>0\}}\int_x^\infty e^{-y}\mathrm{d}y = e^{-x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}\,,$$
$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x = \mathbf{1}_{\{y>0\}}\int_0^y e^{-y}\mathrm{d}x = ye^{-y}\mathbf{1}_{\{y>0\}}\,.$$

2. Deux options.

a) On a les densités conditionnelles

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathbf{1}_{\{f_Y(y)>0\}} = \frac{1}{y}\mathbf{1}_{\{0<x<y\}}\mathbf{1}_{\{y>0\}}$$

$$\text{et} \quad f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\mathbf{1}_{\{f_X(x)>0\}} = e^{-(y-x)}\mathbf{1}_{\{y-x>0\}}\mathbf{1}_{\{x>0\}}\,.$$

Autrement dit, conditionnellement à $Y = y$, X suit une loi uniforme sur $[0, Y]$; de plus, conditionnellement à $X = x$, $Y - x$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

On peut alors calculer $\mathbb{E}[X \mid Y] = \psi_1(Y)$, $\mathbb{E}[Y \mid X] = \psi_2(X)$, avec

$$\psi_1(y) = \int x f_{X|Y=y}(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathbf{1}_{\{y>0\}}}{y}\int_0^y x\mathrm{d}x = \frac{y}{2}\mathbf{1}_{\{y>0\}}\,,$$

$$\psi_2(x) = \int y f_{Y|X=x}(y)\mathrm{d}y = \int_x^\infty ye^{-(y-x)}\mathrm{d}x\mathbf{1}_{\{x>0\}} = \int_0^\infty (x+u)e^{-u}\mathrm{d}u\mathbf{1}_{\{x>0\}} = (x+1)\mathbf{1}_{\{x>0\}}\,.$$

On en conclut que $\mathbb{E}[X \mid Y] = \frac{1}{2}Y$, $\mathbb{E}[Y \mid X] = X + 1$ (car $X, Y > 0$ p.s.)

b) On calcule, pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Xh(Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} xh(y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^\infty \int_0^y xh(y)e^{-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty \tfrac{1}{2}y^2h(y)e^{-y}\mathrm{d}y = \mathbb{E}[\tfrac{1}{2}Yh(Y)]\,,\end{aligned}$$

où on a utilisé la forme de $f_Y(y)$ pour la dernière égalité. Cela montre que $\mathbb{E}[X \mid Y] = \frac{1}{2}Y$.

De même, pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Yh(X)] = \int_{\mathbb{R}^2} yh(x)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^\infty \int_x^{+\infty} yh(x)e^{-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty h(x)(x+1)e^{-x}\mathrm{d}x = \mathbb{E}[(X+1)h(X)]\,,\end{aligned}$$

où on a utilisé la forme de $f_X(x)$ pour la dernière égalité. Cela montre que $\mathbb{E}[Y \mid X] = X + 1$.

Exercice 3 (Un contre-exemple)**.** Soient $(U_n)_{n\geq 0}$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de loi uniforme sur $[-1, 1]$ et soit $T := \inf\{k \geq 0, |U_k| > \frac{1}{2}\}$. On pose

$$X_n = U_T\mathbf{1}_{\{T\leq n\}}\,.$$

1. Montrer que T est un temps d'arrêt et que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, dans les deux cas pour la filtration $\mathscr{F}_n = \sigma(U_0, \ldots, U_n)$.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement et dans L^p pour tout $p \geq 1$ vers une variable aléatoire X.

3. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^∞ qui ne converge pas dans L^∞, c'est-à-dire telle que $\|X_n - X\|_\infty \not\to 0$.

   On rappelle que pour une variable aléatoire Y, $\|Y\|_\infty = \inf\{y \geq 0, \mathbb{P}(|Y| \leq y) = 1\}$.

Correction de l'exercice 3. 1. Tout d'abord, On a $\{T \leq n\} = \bigcap_{k=1}^n \{|U_k| > \frac{1}{2}\} \in \mathscr{F}_n$, ce qui montre que T est un temps d'arrêt.

Ensuite, montrons que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

(i) En écrivant $X_n = U_T \mathbf{1}_{\{T\leq n\}} = \sum_{k=1}^n U_k \mathbf{1}_{\{T=k\}}$, on en conclut directement que X_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable (car $U_k \mathbf{1}_{\{T=k\}}$ est $\mathscr{F}_k$-mesurable, T étant un temps d'arrêt).

(ii) On a $|X_n| \leq 1$, donc pour tout $n \geq 0$ X_n est intégrable.

(iii) On peut écrire $X_{n+1} = U_T \mathbf{1}_{\{T\leq n+1\}} = U_T \mathbf{1}_{\{T\leq n\}} + U_T \mathbf{1}_{\{T=n+1\}} = X_n + U_{n+1}\mathbf{1}_{\{T=n+1\}}$. Comme X_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable on a $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = X_n + \mathbb{E}[U_{n+1}\mathbf{1}_{\{T=n+1\}} \mid \mathscr{F}_n]$ et il reste à montrer que le dernier terme est nul p.s.

Notons que $\{T = n+1\} = \{T > n\} \cap \{|U_{n+1}| > \frac{1}{2}\}$, et comme $\{T > n\}$ est $\mathscr{F}_n$-mesurable et que U_{n+1} est indépendant de $\mathscr{F}_n$, on obtient

$$\mathbb{E}[U_{n+1}\mathbf{1}_{\{T=n+1\}} \mid \mathscr{F}_n] = \mathbf{1}_{\{T>n\}}\mathbb{E}[U_{n+1}\mathbf{1}_{\{|U_{n+1}|>\frac{1}{2}\}}] \qquad \text{p.s.}$$

Comme la loi de U_{n+1} est symmétrique, on a $\mathbb{E}[U_{n+1}\mathbf{1}_{\{|U_{n+1}|>\frac{1}{2}\}}] = 0$, ce qui conclut la preuve.

2. On a $|X_n| \leq 1$ pour tout n (p.s.), de sorte que pour tout $p > 1$, $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale bornée dans L^p, $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[|X_n|^p] \leq 1$. Le cours montre que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. et dans L^p vers une v.a. X. (On a la convergence $X_n \to X$ dans $L^{p'}$ pour tout $p' < p$.)

3. Comme $|X_n| \leq 1$ p.s. pour tout n, on a clairement $\sup_{n\geq 0} \|X_n\|_\infty \leq 1$, donc la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans L^∞. Notons aussi que $X_n \to X = U_T$ p.s., car $T < +\infty$ p.s. (en effet $\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(|U_k| \leq \frac{1}{2}\ \forall 0 \leq k \leq n) = 2^{-(n+1)} \to 0$). Ainsi, on a

$$X_n - X = U_T \mathbf{1}_{\{T>n\}}\,.$$

Comme par construction on a $|U_T| \geq \frac{1}{2}$, on obtient que $|X_n - X| \geq \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{T>n\}}$ de sorte que $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \frac{1}{2}) \geq \mathbb{P}(T > n) = 2^{-(n+1)} > 0$. Cela montre que $\|X_n - X\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ et donc $X_n \not\to X$ dans L^∞.

Exercice 4 (Les deux parties sont indépendantes)**.** Dans tout l'exercice, $p \in]1, 2]$ est fixé.

Partie 1. Pour une variable aléatoire positive $X \in L^p$, on pose $V_p(X) := \mathbb{E}[X^p] - \mathbb{E}[X]^p$. Soient $X, Y \in L^p$ deux variables aléatoires réelles indépendantes positives.

1. Montrer que

$$\mathbb{E}\big[(X+Y)^p - X^p - Y^p \mid Y\big] \leq \big(\mathbb{E}[X] + Y\big)^p - \mathbb{E}[X]^p - Y^p \qquad \text{p.s.}$$

   Indication : on pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto (x+t)^p - x^p - t^p$ est concave de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. En prenant l'espérance et en réutilisant l'indication précédente, en déduire que

$$V_p(X+Y) \leq V_p(X) + V_p(Y)\,.$$

3. Montrer que si $X_1, \dots, X_\ell \in L^p$ sont des variables aléatoires indépendantes positives, alors

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{\ell} X_k\Big)^p\Big] \le \Big(\sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{E}[X_k]\Big)^p + \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{E}\big[(X_k)^p\big]$$

Partie 2. On considère le processus de branchement habituel : $Z_0 = 1$ et pour $n \ge 0$,

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} \xi_k^{(n)} ,$$

où $(\xi_k^{(n)})_{k\ge1,n\ge0}$ sont des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$; on note ξ une variable aléatoire de la même loi et on suppose que $\mathbb{E}[\xi^p] < +\infty$. On note $m := \mathbb{E}[\xi]$ et on rappelle que $W_n := m^{-n} Z_n$ est une martingale pour la filtration $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_k^{(j)}, 0 \le j \le n-1, k \ge 1)$.

4. En utilisant la question 3, montrer que pour tout $n \ge 0$,

$$\mathbb{E}\big[(Z_{n+1})^p \mid \mathscr{F}_n\big] \le (mZ_n)^p + \mathbb{E}[\xi^p] Z_n .$$

5. En déduire que pour tout $n \ge 0$,

$$\mathbb{E}\big[(W_{n+1})^p\big] \le \mathbb{E}\big[(W_n)^p\big] + \frac{c_p}{m^{(p-1)n}} \qquad \text{où } c_p := \mathbb{E}[\xi^p]/m^p .$$

6. Conclure que si $m > 1$, la martingale $(W_n)_{n\ge0}$ converge p.s. et dans L^p.

Correction de l'exercice 4. 1. Comme X, Y sont indépendantes, d'après le cours on a

$$\mathbb{E}\big[(X+Y)^p - X^p - Y^p \mid Y\big] = \psi(Y) \quad \text{p.s.} ,$$

avec $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\psi(y) = \mathbb{E}\big[(X+y)^p - X^p - y^p\big] \le (\mathbb{E}[X] + y)^p - \mathbb{E}[X]^p - y^p ,$$

où on a utilisé l'inégalité de Jensen pour la dernière inégalité, car $x \mapsto (x+t)^p - x^p - t^p$ est concave (pour tout $y \ge 0$ fixé). Cela donne l'inégalité demandée.

Remarque : on aurait envie d'utiliser Jensen conditionnel : $\mathbb{E}[\varphi(X) \mid Y] \le \varphi(\mathbb{E}[X \mid Y])$, *mais ici il faut faire attention car la fonction* φ *dépend de* Y. *Ce n'est pas dans le cours, mais il faudrait montrer la chose suivante : si p.s.* $x \mapsto \varphi(Y, x)$ *est concave, alors* $\mathbb{E}[\varphi(Y, X) \mid Y] \le \varphi(Y, \mathbb{E}[X \mid Y])$ *(ici le fait que* X, Y *sont indépendantes facilite les choses).*

2. En prenant l'espérance dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\mathbb{E}\big[(X+Y)^p - X^p - Y^p\big] \le \mathbb{E}\Big[\big(\mathbb{E}[X] + Y\big)^p - \mathbb{E}[X]^p - Y^p\Big] \le \big(\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]\big)^p - \mathbb{E}[X]^p - \mathbb{E}[Y]^p ,$$

où on a de nouveau utilisé l'inégalité de Jensen, car la fonction $y \mapsto (\mathbb{E}[X] + y)^p - \mathbb{E}[X]^p - y^p$ est concave (quelle que soit la valeur de $\mathbb{E}[X] \ge 0$).

En réarrangeant les termes de l'inégalité, on obtient

$$\mathbb{E}\big[(X+Y)^p\big] - \big(\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]\big)^p \le \mathbb{E}[X^p] + \mathbb{E}[Y^p] - \mathbb{E}[X]^p - \mathbb{E}[Y]^p ,$$

qui donne l'inégalité voulue.

3. Grâce à la question précédente, on a facilement par récurrence que pour tout $\ell \geq 1$,

$$V_p\Big(\sum_{k=1}^{\ell} X_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\ell} V_p(X_k)\,.$$

Cela donne

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{\ell} X_k\Big)^p\Big] - \Big(\sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{E}[X_k]\Big)^p \leq \sum_{k=1}^{\ell} (\mathbb{E}[X_k^p] - \mathbb{E}[X_k]^p) \leq \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{E}[X_k^p]\,,$$

où on a utilisé que $\mathbb{E}[X_k]^p \geq 0$ pour la dernière inégalité. Cela donne l'inégalité voulue.

4. Comme Z_n et $(\xi_k^{(n)})_{k\geq 1}$ sont indépendants, on a

$$\mathbb{E}\big[(Z_{n+1})^p \mid \mathscr{F}_n\big] = \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{Z_n} \xi_k^{(n)}\Big)^p \;\Big|\; \mathscr{F}_n\Big] = \mathbb{E}\big[h(Z_n, (\xi_k^{(n)})_{k\geq 1}) \mid \mathscr{F}_n\big] = \psi(Z_n)\,,$$

où $h(\ell, (x_k)_{k\geq 0}) = (\sum_{k=1}^{\ell} x_k)^p$ et $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ est donnée par

$$\begin{aligned}\psi(\ell) := \mathbb{E}\big[h(\ell, (\xi_k^{(n)})_{k\geq 1})\big] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{\ell} \xi_k^{(n)}\Big)^p\Big] \\ &\leq \Big(\sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{E}[\xi_k^{(n)}]\Big)^p + \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{E}[(\xi_k^{(n)})^p] = \big(\mathbb{E}[\xi]\ell\big)^p + \mathbb{E}[\xi^p]\ell\,,\end{aligned}$$

en ayant utilisé la question 3. pour la première inégalité. On en déduit que

$$\mathbb{E}\big[(Z_{n+1})^p \mid \mathscr{F}_n\big] \leq \big(mZ_n\big)^p + \mathbb{E}[\xi^p] Z_n\,,$$

comme voulu.

5. En prenant l'espérance dans l'inégalité précédente et en divisant par $m^{p(n+1)}$, on obtient

$$\mathbb{E}\big[(W_{n+1})^p\big] \leq \frac{1}{m^{pn}} \mathbb{E}[(Z_n)^p] + \frac{m^n}{m^{p(n+1)}} \mathbb{E}[\xi^p] \frac{1}{m^n} \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[(W_n)^p] + \frac{1}{m^{(p-1)n}} \frac{\mathbb{E}[\xi]^p}{m^p}\,,$$

où on a utilisé que $\frac{1}{m^n}\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[W_n] = 1$ pour tout $n \geq 0$. Cela donne l'inégalité voulue.

6. Avec l'ineegalité précédente, on obtient par une récurrence facile

$$\mathbb{E}\big[(W_n)^p\big] \leq \mathbb{E}[(W_0)^p] + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_p}{m^{(p-1)k}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_p}{m^{(p-1)k}}\,.$$

Si $m > 1$, on a $m^{p-1} > 1$ (car $p > 1$), donc

$$\mathbb{E}\big[(W_n)^p\big] \leq 1 + c_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^{(p-1)k}} = 1 + \frac{c_p}{1 - m^{-(p-1)}}\,.$$

Cela montre que $(W_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^p : le cours montre que $(W_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement et dans L^p.

Exercice 5 (Bonus)**.** Donner un exemple de *sous-martingale* $(X_n)_{n\geq 0}$ bornée dans L^p pour un $p > 1$, mais qui ne converge pas and L^p.

Correction de l'exercice 5. Une première remarque : pour la convergence dans L^p des martingales, l'ingrédient crucial est l'inégalité maximale L^p de Doob. Mais cet argument fonctionne encore pour les sous-martingales positives ! On a donc le théorème suivante : si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale *positive* qui est bornée dans L^p, alors elle converge p.s. et dans L^p.

En fait, il suffit de trouver une sur-martingale $(X_n)_{n\geq 0}$ bornée dans L^p mais qui ne converge pas dans L^p (on aura notre contre-exemple en prenant $(-X_n)_{n\geq 0}$).

Prenons $(\xi_k)_{k\geq 1}$ des variables indépendantes positives telles que $\mathbb{E}[\xi_k^p] = 1$ (par exemple $\xi \in \{0, 2\}$ et $\mathbb{P}(\xi = 2) = 2^{-p}$ et $\mathbb{P}(\xi = 0) = 1 - 2^{-p}$) et $\mathbb{E}[\xi_k] < 1$. Alors on montre facilement que le processus défini par $X_n = \prod_{k=1}^n \xi_k$ est une sur-martingale (pour la filtration naturelle $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_k)$). On a que $\mathbb{E}[X_n^p] = 1$ pour tout n, donc $(X_n)_{n\geq 0}$ est borné dans L^p. Mais $(X_n)_{n\geq 0}$ est une surmartingale positive, donc converge presque sûrement vers X_∞, et on a forcément $X_\infty = 0$ p.s. car $\mathbb{E}[X_\infty] \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$ par Fatou, avec $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\xi_1]^n \to 0$.

En conclusion, $X_n \to 0$ p.s. mais $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^p] = 1 \neq \mathbb{E}[X_\infty^p] = 0$, ce qui montre que $(X_n)_{n\geq 0}$ ne peut pas converger dans L^p.