

Examen partiel du 15 mars 2019

Durée : 1 heure 30 minutes. Tous documents, calculatrices, téléphones et autres objets connectés interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

1. Équation différentielle linéaire scalaire du 1er ordre.

- a) Vérifier que la fonction $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $f_1(t) = t \exp(t^4)$ est dérivable sur \mathbb{R} et vérifie que $f_1'(t) = 4t^3 f_1(t) + e^{t^4}$ pour tout t réel.
- b) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle d'inconnue f :

$$f' - 4t^3 f = e^{t^4} + 8t^4 - 2.$$

- c) Sans calcul, mais en justifiant votre réponse, donner le nombre de solutions de cette équation différentielle valant $\sqrt[15]{\pi + 1}$ en $t_0 = 4,764$.

Solution de l'exercice 1.

- a) Il n'est pas nécessaire de revenir à la définition du taux d'accroissement pour tout $t \in \mathbb{R}$. Utilisez les théorèmes de structure qui disent que le produit et la composition fonctions dérivables sont dérivables. Attention, la continuité n'implique pas la dérivabilité ! (c'est plutôt le contraire). Attention aussi à la notation prime (') pour les dérivées. Elle s'applique aux fonctions f' , \cos' , \exp' et non aux expressions de t . On n'écrit pas t' , $f(t)'$ ou $\exp(t)'$ mais $f'(t)$, $\exp'(t)$. Parfois on a l'impression que ce n'est pas évident à écrire : on peut alors utiliser des fonctions auxiliaires $u : t \mapsto u(t)$, v pour écrire les formules. Ici par exemple, si on définit u et v sur \mathbb{R} par $u(t) = t$ et $v(t) = t^4$. Alors $f_1 = u \times (\exp \circ v)$. Par les théorèmes de dérivation, comme u , v et \exp sont dérivables sur \mathbb{R} , alors f_1 aussi et $f_1' = u'(\exp \circ v) + u(\exp \circ v)' = (u' + uv')(exp \circ v)$.
- b) On commence par résoudre l'équation homogène associée $f' - 4t^3 f = 0$. En utilisant la méthode présentée en cours, on obtient que toutes les solutions sont de la forme $t \mapsto K e^{t^4}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Un certain nombre d'étudiants ont essayé de résoudre l'équation homogène comme cas particulier d'équations à variables séparables, sans prendre les précautions nécessaires. Ça ne marche pas (ça donne la "bonne" formule, mais la démonstration est pleine de trous). En effet, écrire

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = 4t^3$$

nécessite de savoir que sur l'intervalle sur lequel on résout, $f(t)$ n'est jamais nul. Justifier que cela est vrai dès que la fonction f n'est pas la fonction identiquement

nulle nécessite le théorème de Cauchy-Lipschitz, (ou un autre résultat justifiant le fait que deux solutions d'une équation du 1er ordre prenant la même valeur au même instant sont forcément égales partout). On traite donc le cas $f \equiv 0$ séparément. Ensuite, une primitive de f'/f , lorsque f ne s'annule pas, est $\ln|f|$, avec des valeurs absolues ! On trouve alors que pour tout t dans l'intervalle sur lequel on travaille,

$$|f(t)| = e^c \exp(t^4)$$

avec $c \in \mathbb{R}$ quelconque (la constante d'intégration). Mais pour trouver f , il faut enlever la valeur absolue. Donc on a $f(t) = \pm e^c \exp(t^4)$, avec le signe \pm qui pourrait dépendre de t . En fait, il ne dépend pas, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Si on a deux t_1 et t_2 dans le même intervalle tels que l'un vient avec le signe $+$ et l'autre avec le signe $-$, alors $f(t_1)$ et $f(t_2)$ ont des signes différents, et donc f devrait s'annuler entre t_1 et t_2 , ce qui n'est pas possible par hypothèse. Du coup, c'est ce $\pm e^c$ qui devient $K \in \mathbb{R}$. Sans la valeur absolue, on ne pourrait pas avoir de K négatif. C'est beaucoup plus compliqué que de se baser sur le résultat du cours pour les équations linéaires sans second membre, avec une démonstration qui ne nécessite ni de diviser par f , ni de prendre le logarithme ! Donc cette approche est à éviter si on ne peut pas faire autrement, sauf si on est prêt à justifier tous les petits détails.

Ensuite, on cherche une solution particulière de l'équation différentielle. Le membre de droite est une somme de plusieurs termes (exponentielle, polynôme). On va utiliser le principe de superposition pour subdiviser en deux sous-problèmes. D'après la 1ere question, f_1 est une solution particulière de $f' - 4t^3 f = e^{t^4}$. Il suffit donc maintenant de trouver une solution particulière f_2 de $f' - 4t^3 f = 8t^4 - 2$. On peut espérer en trouver une sous la forme d'un polynôme. Si f_2 est un polynome de degré d , alors le membre de gauche est un polynome de degré $d + 3$, alors qu'à droite, on a un polynome de degré 4. On cherche un polynome de degré 1 pour f_2 . Comme le membre de droite n'a pas de coefficient en t^3 , alors nécessairement f_2 n'a pas de terme constant, et donc de la forme at avec $a \in \mathbb{R}^*$. On injecte dans l'équation, et on trouve que a doit être égal à -2 . Réciproquement, on vérifie que $f_2 : t \mapsto -2t$ est bien solution de l'équation. D'après le principe de superposition, $f_1 + f_2$ est bien une solution particulière de notre équation différentielle. Donc l'ensemble des solutions \mathcal{S} de l'équation différentielle est

$$\mathcal{S} = \left\{ f : t \in \mathbb{R} \mapsto (K + t)e^{t^4} - 2t ; K \in \mathbb{R} \right\}.$$

- c) Pour une équation différentielle linéaire du premier ordre, il y a une unique solution dès qu'on fixe une condition initiale (problème de Cauchy). Pour justifier cette réponse, on peut soit invoquer le théorème du cours sur les solutions de telles équations (la deuxième partie dit que si t_0 est dans l'intervalle de résolution, alors l'application $\Psi : f \in \mathcal{S} \mapsto f(t_0) \in \mathbb{R}$ est une bijection. On peut aussi utiliser le théorème plus général de Cauchy-Lipschitz.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} -17 & 16 \\ -25 & 23 \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que B n'a qu'une valeur propre λ qu'on déterminera.
- b) Déterminer un vecteur propre v associé à λ dont les coefficients sont des entiers positifs premiers entre eux (on discutera de son unicité).
- c) Chercher un vecteur w (dont les coefficients sont si possible entiers entre -5 et 5) tel que $Bw = \lambda w + v$.
- d) En déduire une matrice inversible P telle que

$$B = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$$

- e) Calculer $\exp(tB)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- f) Résoudre le système différentiel sur \mathbb{R} :

$$\begin{cases} x' &= -17x + 16y - 1 \\ y' &= -25x + 23y - 2 \end{cases}.$$

On pourra traduire ce système en un problème matriciel.

Solution de l'exercice 2.

- a) La trace de B est 6 et son déterminant est 9. B admet donc une valeur propre double $\lambda = 3$.
- b) Le vecteur $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre, comme on le voit en résolvant le système $Bv = 3v$. L'ensemble des solutions est une droite vectorielle. On peut trouver des solutions avec des coefficients rationnelles car on résout un système à coefficients dans \mathbb{Q} . En multipliant par le plus petit commun multiple, on trouve des solutions entières, dont il se trouve que les deux coefficients ont le même signe. Il n'y en a qu'une à coefficients positifs dont le pgcd est égal à 1.
- c) En écrivant l'équation $Bw = \lambda w + v$, on trouve un ensemble de solutions donné par une droite. Attention, cette droite est une droite affine, et pas vectorielle! Donc si w_1 est solution, ce n'est pas vrai que aw_1 est solution. Par contre, si w_1 et w_2 sont solutions, alors $B(w_1 - w_2) = 3(w_1 - w_2)$ est vecteur propre, donc $w_1 - w_2$ est un multiple de v . Donc toutes les solutions pour w sont de la forme $w_1 + av$. Des vecteurs w vérifiant les contraintes (coefficients entiers et entre -5 et 5) sont $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ce sont les seuls. On travaillera dans la suite avec le dernier choix.
- d) On a obtenu dans les deux questions précédentes

$$\begin{cases} Bv &= 3v \\ Bw &= v + 3w \end{cases}$$

Si on appelle $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de v et w dans la base canonique, alors cette relation s'écrit :

$$BP = P \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

v et w n'étant pas colinéaires, P est inversible, et $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{Com } P = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

- e) On connaît la formule pour l'exponentielle de t fois un bloc de Jordan (on peut utiliser la formule du cours, pas besoin de la redémontrer à chaque fois ! Ne pas connaître la formule pour ce cours est impardonnable).

$$\exp \begin{pmatrix} 3t & t \\ 0 & 3t \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait aussi que si $M = PM'P^{-1}$, alors $\exp M = P(\exp M')P^{-1}$. Donc on a

$$\exp tB = e^{3t} P \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 - 20t & 16t \\ -25t & 1 + 20t \end{pmatrix}.$$

- f) En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, le système se met sous la forme matricielle :

$$X' = BX + C$$

On résout l'équation homogène associée $X' = BX$ dont les solutions sont de la forme $X(t) = \exp(tB)X_0$ avec $X_0 \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Attention à l'ordre des facteurs ici ! $\exp(tB)$ est une matrice, et la constante d'intégration X_0 ici est un vecteur. Pour que le produit ait un sens, il doit être placé après la matrice ! On cherche une solution particulière. Comme C est constant, on cherche une solution constante $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, telle que $-B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = C$. On trouve que $a = b = -1$ convient. Donc d'après le théorème du cours, l'ensemble des solutions du système est de la forme pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \exp(tB)X_0 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

avec $X_0 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ quelconque, soit

$$\begin{cases} x(t) &= e^{3t}((1 - 20t)c + 16td) - 1 \\ y(t) &= e^{3t}(-25ct + (1 + 20t)d) - 1 \end{cases}$$

avec c , et d réels quelconques.

- 3.** On veut montrer que pour toute matrice A carrée de taille n à coefficients complexes, la formule suivante est vérifiée

$$\exp(\text{tr } A) = \det(\exp A).$$

- a) Montrer que c'est vrai si A est diagonale, puis quand A est diagonalisable.
- b) Montrer que c'est vrai si A est triangulaire supérieure.
- c) Montrer que c'est vrai dans le cas général pour une matrice A quelconque.

Solution de l'exercice 3.

- a) Le cas diagonal est évident en utilisant que si A est diagonal, alors $\exp(A)$ aussi, avec des coefficients diagonaux qui sont les exponentielles de ceux de A . On utilise alors que pour des nombres réels ou complexes, $\exp(\text{tr}(A)) = \exp \sum_i a_{i,i} = \prod_i \exp a_{i,i} = \det \exp(A)$. Pour le cas diagonalisable, on dit qu'il existe P inversible et D diagonales telles que $A = PDP^{-1}$. Alors $\exp A = P(\exp D)P^{-1}$. A et D sont semblables donc ont même trace. $\exp(A)$ et $\exp(D)$ sont aussi semblables donc ont même déterminant. En appliquant la première partie de la question à D (et la transitivité de l'égalité), on obtient le résultat pour A .
- b) Pour le cas triangulaire, on procède comme dans le cas diagonal, en justifiant que si A est triangulaire, alors $\exp(A)$ aussi. Dans ce cas, le déterminant est aussi le produit des éléments diagonaux. En effet, toutes les puissances A^k sont triangulaires. Donc dans la série définissant l'exponentielle, tous les coefficients sous la diagonale sont nuls. Attention, on peut bien sûr écrire une matrice triangulaire comme $D + N$ avec D diagonale et N triangulaire supérieure stricte, donc nilpotente. Le "piège", c'est que D et N en général ne commutent pas ! C'est facile à vérifier sur l'exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ça marche dans le cas des blocs de Jordan, car la partie diagonale, c'est un multiple de l'identité, qui commute avec tout le monde.
- c) Toute matrice à coefficients complexes est au moins triangulable : il existe B triangulaire supérieure, et P inversible telles que $A = PBP^{-1}$. On applique alors la question précédente à B , et on utilise le fait, comme dans la première question, que A et B sont semblables donc ont même trace, et e^A et e^B sont semblables (avec la même matrice de passage), donc ont même déterminant. On conclut à nouveau par transitivité de l'égalité.