Examen final du 11 mai 2016 (1re session)

Durée : 2 heures. Tous documents, calculatrices, téléphones et autres objects connectés interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

1. On veut résoudre l'équation différentielle suivante de fonction inconnue y définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$(E1) \quad y' = 2t\tan(y) + \frac{b(t)}{\cos(y)}.$$

où b est une fonction continue sur I qu'on précisera plus tard.

On considère dans un premier temps **le cas particulier où** $b = 0$.

a) Déterminer les solutions constantes définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E1)$.

b) Si $y : I \to \mathbb{R}$ est solution telle que pour un $t_0 \in I$,$y(t_0) \in]0, \frac{\pi}{2}[$, justifiez qualitativement pourquoi $y(t) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ pour tout $t \in I$.

c) Résoudre dans ce cas l'équation différentielle avec une condition initiale $y(t_0) \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

d) En utilisant les symétries de la fonction sin, résoudre l'équation différentielle pour une condition initiale quelconque $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

e) Dessiner schematiquement le graphe de l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

On regarde maintenant **le cas particulier où** $b(t) = e^{t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

f) Montrer que si la fonction dérivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de $(E1)$, alors la fonction $z = \sin \circ y$, définie aussi sur I, est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(E2) \quad z' = A(t)z + B(t)$$

avec des fonctions A et B que l'on précisera.

g) Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre $(E2)$ par la méthode de la variation de la constante.

h) Quelles sont les solutions de cette équation qui valent 0 à $t = 0$?

2. On veut résoudre le système différentiel suivant :

$$(S1) \quad \begin{cases} x' &= 2x + y + e^{3t} \\ y' &= 2y + e^{3t} \\ z' &= x + 3z - e^{3t} \end{cases}$$

a) En posant $u = x + y + z$, écrire le nouveau système différentiel $(S2)$ vérifié par le triplet de fonctions (x, y, u), et l'écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} + B(t)$$

avec A et $B(t)$ que l'on précisera.

b) Calculer $\exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

c) À l'aide de la méthode des coefficients indéterminés, résoudre le système différentiel $(S2)$ vérifié par x, y, u.

d) En déduire l'ensemble des solutions du système $(S1)$.

3. On rappelle que sh et ch sont respectivement les parties impaire et paire de la fonction exponentielle :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Soit l'équation différentielle suivante de fonction inconnue $y : I \to \mathbb{R}$

$$(E3) \quad y'' + \mathrm{sh}(y) = 0$$

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction

$$\mathcal{E} : (u, v) \mapsto \frac{u^2}{2} + \mathrm{ch}(v).$$

a) Montrer que les courbes de niveau de $\mathcal{E}$ sont fermées et bornées dans $\mathbb{R}^2$ (donc compactes). On pourra utiliser le fait que $\mathcal{E}$ est continue et tend vers l'infini lorsque la norme de (u, v) tend vers l'infini.

b) Montrer que si y est solution de $(E3)$ définie sur un intervalle I, alors la fonction $F : t \mapsto \mathcal{E}(y'(t), y(t))$ est constante sur I.

c) Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ (que l'on déterminera) tel que la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ égale à a est solution (équilibre).

d) En remplaçant sh par son polynôme de Taylor à l'ordre 1 en a, on obtient une équation différentielle linéaire du second ordre en y, décrivant les mouvements de petite amplitude au voisinage de l'équilibre. Écrire et résoudre cette équation différentielle linéaire. Que peut-on dire de l'équilibre en a ?

e) Dessiner schematiquement le portrait de phase de l'équation $(E3)$. On indiquera en particulier le sens de parcours des courbes solutions. On pourra s'aider des symétries de la fonction $\mathcal{E}$.