Exercice 1

Le premier exercice ne présentait pas de difficultés particulières. Étant donné qu'il était clairement indiqué que la qualité de la rédaction était prise en compte, il était impossible d'avoir tous les points en indiquant le résultat, mais sans aucune phrase pour expliquer les étapes du raisonnement.

Certaines personnes ont résolu l'équation homogène avec la méthode des équations aux variables séparables. C'est tout à fait possible **mais** c'est beaucoup plus délicat que la méthode vue en cours pour les équations linéaires : quand on a l'équation

$$x' = -4t^3 x$$

il faut traiter séparément le cas où x s'annule et celui où il ne s'annule pas. Si ça ne s'annule pas, on divise par x les deux côtés et on reconnaît à gauche la dérivée de $\log|x|$ (ne pas oublier la valeur absolue). Pour obtenir la solution, il faut se débarrasser de la valeur absolue, il faut utiliser un argument de continuité : une fonction continue sur un intervalle et qui ne s'annule pas est soit toujours strictement positive, soit toujours strictement négative. On peut donc enlever la valeur absolue, quitte à éventuellement mettre un signe global.

Il est donc plus simple de dire que $x' + 4t^3x = 0$ est équivalent à $(x' + 4t^3x)\exp(t^4) = 0$ (le facteur qu'on a ajouté est strictement positif). On reconnait la dérivée de $f : t \mapsto x(t)\exp(t^4)$ qui doit être nulle sur un intervalle, donc f est constante. C'est à dire qu'il existe un réel C tel que pour tout t, $x(t) = C\exp(-t^4)$.

Toutes les solutions de l'équation avec second membre tendaient vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$ par croissance comparée. Pour les solutions avec une condition initiale en $t = \sqrt{11}$, on avait un point de bonus en citant un théorème du cours (soit celui sur l'existence et unicité des solutions d'une solution d'une eq. diff. linéaire sur un intervalle avec une condition initiale donnée, ou le théorème de Cauchy-Lipschitz) plutot que de faire un calcul explicite pour obtenir la valeur unique de la constante qui marchait.

Exercice 2

Les questions a), b), c) étaient un guidage pour trigonaliser la matrice A. Elle n'est pas diagonalisable car elle n'a qu'une seule valeur propre, -1, mais la dimension de l'espace propre associé est 1 (et non 2), car sinon, elle serait un multiple de l'identité. Le vecteur v est un vecteur propre associé à la valeur propre -1 (donc dans $Ker(A + I)$) et w un vecteur qui permet de compléter la base. La matrice T est la matrice de l'application linéaire A de $\mathbb{R}^2$ dans la base (v, w). Donc si P est la matrice des coordonnées des vecteurs v et w sur respectivement la première et la deuxième colonne de P, alors $AP = PT$.

L'inverse de P est très facile à calculer à partir de la formule avec la comatrice, car $P \in SL_2(\mathbb{Z})$: $P^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Le calcul de l'exponentielle d'un bloc de Jordan multiplié par t a été vu en cours et en TD.

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}\right) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots \\ 0 & 1 & t & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Donc ici, $\exp(tT) = e^{-t}\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Il est possible de retrouver rapidement la formule à partir de la définition de l'exponentielle de matrice comme une série, mais on pouvait utiliser le résultat directement.

Pour obtenir l'exponentielle de A, on multiplie par la matrice de passage et son inverse. Par une des propriétés de l'exponentielle vue en cours, $\exp(tA) = P\exp(tT)P^{-1}$.

Pour trouver une solution solution particulière, on mettait la forme voulue dans le système (S). En multipliant par e^{-t}, on avait un système dont chaque équation décrivait l'égalité de deux polynomes en t.

$$t^n(A+I)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} - nt^{n-1}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Si $n \notin \{0,1\}$, on a une (deux) combinaison linéaire de trois monomes (constante 1, t^{n-1}, t^n) qui doit être nulle. Comme ces monomes sont indépendants (dans l'espace des polynômes, ou celui des fonctions continues,...) la seule solution c'est que chaque coefficient soit nul. Mais le coefficient constant est non nul par construction. Lorsque $n=1$, nt^{n-1} est le monome constant 1. La condition d'annulation des coefficients devient :

$$(A+I)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

Ça tombe bien : le vecteur $v = \binom{3}{2}$ est dans le noyau de $A+I$. Et donc choisir v pour le vecteur $\binom{a}{b}$ donne une solution particulière $t \mapsto te^{-t}v$ au système (S).

Il y avait une autre solution qui consistait à prendre $n = 0$. La condition d'annulation des coefficients devenait alors :

$$(A+I)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + v = 0,$$

équation qui est vérifiée par le vecteur $\binom{a}{b} = -w$. Donc $t \mapsto -we^{-t}$ était aussi une solution particulière de (S). On remarque que la différence entre les deux solutions particulière est une solution de l'équation homogène (normal ! vu la structure d'espace affine des solutions).

Pour obtenir la solution générale, on ajoutait à la solution particulière trouvée une solution générale de l'équation homogène associée, qui a pour forme :

$$t \mapsto \exp(tA)\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = P\exp(tT)\begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix} = (\gamma+\delta t)e^{-t}v + \delta e^{-t}w.$$

Les solutions de (S) sont donc de la forme :

$$t \mapsto (\gamma + (\delta+1)t)e^{-t}v + \delta e^{-t}w,$$

avec γ et δ quelconques.

Exercice 3

Malgré la description physique du problème, il s'agissait bel et bien d'un problème mathématique sur les équations différentielles linéaires du 2^e^ordre à coefficients constants.

L'équation (E_0) se résolvait en utilisant l'équation caractéristique, qui est

$$mr^2 + k = 0$$

(et non $mr^2 + kr$ comme je l'ai vu de nombreuses fois ! Un terme en r correspondrait à un terme en y' dans l'équation différentielle). Remarquez que l'équation caractéristique est celle qu'on obtient si on cherche les r tels que $t \mapsto \exp(rt)$ est solution de l'équation différentielle.

Les solutions de l'équation caractéristique sont $i\omega_0$ et $-i\omega_0$. Les solutions complexes sont donc de la forme :

$$t \mapsto Ae^{i\omega_0 t} + Be^{i\omega_0 t}$$

avec A et B complexes quelconques. Puisqu'on s'intéresse aux solutions réelles, en remarquant que $e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)$ et en séparant parties réelle et imaginaire, on écrit alors les solutions réelles sous la forme :

$$\alpha\cos(\omega_0 t) + \beta\sin(\omega_0 t)$$

avec α et β réels quelconques (qu'on peut réécrire $\gamma\cos(\omega_0 t + \varphi)$). Le mouvement est donc oscillatoire.

Pour la question sur l'énergie mécanique, il est plus simple d'utiliser l'équation plutôt que de remplacer y par sa forme générale. On dit que si y est solution de (E_0), alors y est infiniment dérivable, donc par les théorèmes standards, $\mathcal{E}$ aussi. On peut donc la dériver, et

$$\mathcal{E}'(t) = my'y'' + ky'y = y'(\underbrace{my'' + ky}_{=0 \text{ par } (E_0)}).$$

La dérivée de $\mathcal{E}$, **définie sur un intervalle**, est nulle : elle est donc constante. Ce n'est pas vrai pour une fonction dont le domaine de définition n'est pas un intervalle ! Pensez par exemple à la fonction sur $\mathbb{R}^*$ et qui vaut $+1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et -2 sur $\mathbb{R}_-^*$.

Lorsque le membre de droite est $\cos(\omega t)$, on cherche une solution particulière sous la forme $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Comme il n'y a que des dérivées d'ordre pair (0 et 2), on peut se contenter de prendre $A\cos(\omega t)$ (si on écrit avec B, on obtiendra une condition qui dira que B, proportionnel au coefficient devant la fonction sin, doit être égal à 0). On obtient alors que si $\omega \neq \omega_0$, on obtient que A doit être égal à $\frac{1}{m(\omega^2-\omega_0^2)}$. Si en revanche, $\omega = \omega_0$, l'équation en A n'a pas de solution. On cherche alors une solution sous la forme $Bt\sin(\omega_0 t)$ (encore une fois, on pourrait chercher une solution sous la forme plus générale $t(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t))$, mais comme avant (ou par un argument de parité par exemple) on voit que A doit être nul). On obtient alors que $B = \frac{1}{2\omega_0}$.

Pour la dernière partie, la résolution de l'équation homogène se faisait de la même façon que dans la première question. L'équation caractéristique $mr^2 + 2m\lambda r + k = 0$ a un discriminant qui peut être strictement positif, strictement négatif ou nul suivant la valeur de λ. Lorsqu'il est strictement positif, les solutions sont des combinaisons d'exponentielles décroissantes (les deux solutions de l'équation caractéristique sont réelles et strictement négatives). Si le discriminant est strictement négatif, on a deux solutions complexes conjuguées $a \pm ib$, donc la partie réelle $a = -\lambda$ est strictement négative. Les solutions sont de la forme $e^{-\lambda t}(A\cos(bt) + B\sin(bt))$. On remarque que $|b| < omega_0$. Il s'agit d'oscillations amorties. Enfin, lorsque le discriminant est nul, l'équation caractéristique a une racine double $r_0 < 0$. L'espace des solutions, toujours de dimension 2, est engendré par les fonctions $t \mapsto \exp(r_0 t)$ et $t \mapsto t\exp(r_0 t)$. On peut montrer que ce cas du discriminant nul est celui qui donne des solutions qui, avec une valeur initiale donnée et une dérivée nulle initialement, reviennent le plus vite en 0 sans osciller. Ce régime est dit *critique* et c'est celui qu'on essaie d'atteindre par exemple pour les amortisseurs de voiture, pour avoir une réponse rapide de la suspension, sans être trop secoué.

Pour montrer que l'énergie mécanique était décroissante, on appliquait la même méthode que dans le cas sans frottement : si y est solution de (E_1), alors $\mathcal{E}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout t,

$$\mathcal{E}'(t) = y'(t)(my''(t) + ky(t)) = -2m\lambda y'(t)^2 \leq 0$$

Comme on est sur un intervalle, on peut dire que $\mathcal{E}$ est décroissante au sens large. Si elle était constante sur un intervalle d'intérieur non vide, sa dérivée serait nulle sur l'intérieur de cet intervalle, et donc y' y serait nul, c'est-à-dire que y serait constante sur cet intervalle. Or la seule solution qui est constante sur un intervalle est la fonction nulle. Ainsi, dès que la valeur initiale est non nulle, l'énergie est strictement décroissante.