Examen final du 29 mai 2018 (1$^{\text{re}}$session)

Durée : 1 heure 30 minutes. Tous documents, calculatrices, téléphones et autres objects connectés interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte. Toute réponse devra être justifiée.

Barème indicatif provisoire : 6/10/3/6

1. Système différentiel linéaire

a) Résoudre le système différentiel

$$(e_0) \quad \begin{cases} x' &= \quad 4y, \\ y' &= -x + 4y. \end{cases}$$

de fonctions réelles inconnues x, y définies sur $\mathbb{R}$. On pourra réécrire le système sous la forme $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et utiliser la matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Combien y a-t-il de solutions de (e_0) qui tendent vers 0 en $+\infty$? en $-\infty$?

c) Combien y a-t-il de solutions telles que $x(\sqrt{3}) = \pi$ et $y'(e^{187}) = \frac{17}{5}$?

2. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(e_1) \quad 2w'^2 - ww'' + 4w'w + 4w^2 - w^3e^{2t} = 0$$

de fonction inconnue $w : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle.

a) Supposons que w ne s'annule pas sur l'intervalle I. On pose $u = \frac{1}{w}$.

b) Exprimer w' et w'' en fonction de u, u' et u''.

c) Déterminer une équation différentielle linéaire (e_1') satisfaite par u.

d) Donner une base des solutions de l'équation homogène associée à (e_1'). On appellera A et B les coefficients d'une solution dans cette base.

e) Déterminer une solution particulière de (e_1').

f) Exprimer en fonction de A et B toutes les solutions u de l'équation (e_1').

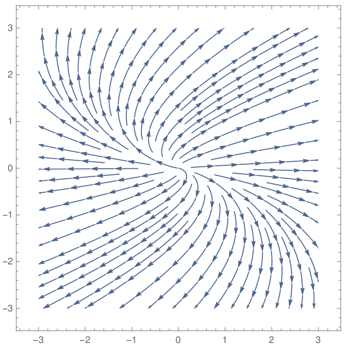
g) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $w = \frac{1}{u}$ soit définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

h) Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, déterminer en fonction des valeurs de A et B les plus grands intervalles I sur lesquels w peut être définie. Déterminer le comportement de w au voisinage des extrémités réelles finies de I.

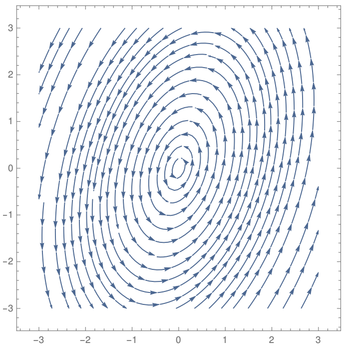
3. Portraits de phase.

Les trois images suivantes montrent le portrait de phase pour des équations différentielles linéaires homogènes de la forme $X' = AX$, avec A une matrice carrée 2×2 à coefficients réels.

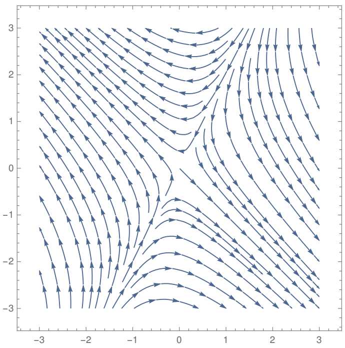
a) Quelle image correspond à une matrice avec deux valeurs propres réelles ? Donner le signe des valeurs propres.



(a)



(b)



(c)

b) Quelle image correspond à une matrice dont les valeurs propres sont imaginaires pures ?

c) Que peut-on dire de la matrice associée à l'image qui ne correspond pas aux trois cas précédents ?

4. Un *pendule simple* est une masse m attachée à un fil non extensible de longeur ℓ, dont l'autre extrémité est fixé à un point d'attache O. Le mouvement de ce pendule est paramétré par l'angle θ que forme le fil avec la verticale au point O.

Les équations de la mécanique nous disent (admis) que l'angle θ en fonction du temps t vérifie l'équation suivante :

$$(e_2) \quad m\ell\theta'' = -mg\sin(\theta).$$

a) Montrer que si θ est solution de (e_2), l'énergie mécanique du système définie pour tout t par :

$$E(t) = \frac{1}{2}m\ell^2\theta'(t)^2 - mg\ell\cos(\theta(t))$$

est en fait constante au cours du temps.

b) Déterminer les solutions constantes de l'équation (e_2) (correspondant aux points d'équilibre).

c) On suppose que le mouvement est de petite amplitude autour de la position $\theta_0 = 0$. Remplacer $\sin(\theta)$ par son polynome de Taylor à l'ordre 1 dans (e_2) pour obtenir une équation linéaire (e_2') dont on donnera les solutions. Dessiner l'allure typique des solutions et décrire qualitativement le mouvement.

d) Même question pour $\theta_0 = \pi$.