Examen final du 29 mai 2018 (1re session)

Durée : 1 heure 30 minutes. Tous documents, calculatrices, téléphones et autres objects connectés interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte. Toute réponse devra être justifiée.

Barème indicatif provisoire : 6/10/3/6

1. Système différentiel linéaire

a) Résoudre le système différentiel

$$(e_0) \quad \begin{cases} x' &= 4y, \\ y' &= -x+4y. \end{cases}$$

de fonctions réelles inconnues x, y définies sur $\mathbb{R}$. On pourra réécrire le système sous la forme $X' = AX$ avec $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et utiliser la matrice inversible $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Combien y a-t-il de solutions de (e_0) qui tendent vers 0 en $+\infty$? en $-\infty$?

c) Combien y a-t-il de solutions telles que $x(\sqrt{3}) = \pi$ et $y'(e^{187}) = \frac{17}{5}$?

Solution de l'exercice 1.

a) En posant $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, on peut réécrire le système sous la forme

$$X' = AX, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les solutions de cette équation sont donc de la forme pour tout t réel : $X(t) = \exp(tA)X_0$ avec X_0 un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$ qui représente les valeurs de X en $t = 0$. Il ne reste plus qu'à calculer l'exponentielle de tA.

A a pour polynôme caractéristique $(X-2)^2$, et n'a donc qu'une valeur propre. Elle n'est pas diagonalisable, sinon ce serait un multiple de l'identité. Donc elle est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$u = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ est vecteur propre, et $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ vérifie $Av = u + 2v$. Donc si on appelle P la matrice de la base[1] (u, v) dans la base canonique, on a $AP = PT$, avec $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, donné dans l'énoncé, et $P^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Donc

$$\exp(tA) = P\exp(tT)P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1-2t) & 4e^{2t}t \\ -e^{2t}t & e^{2t}(1+2t) \end{pmatrix}$$

Donc si on appelle a et b les coefficients de X_0, on obtient que toutes les solutions sont de la forme, pour t réel quelconque :

$$\begin{cases} x(t) = ae^{2t}(1-2t) + 4e^{2t}t \\ y(t) = -ae^{2t}t + be^{2t}(1+2t) \end{cases}$$

avec a, b réels.

1. u et v forment bien une base car ils ne peuvent pas être colinéaires étant donnés les relations vérifiés par u et v.

Remarque 1. On peut calculer un produit matriciel en moins, en posant $P^{-1}X_0 = \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$ et en écrivant que

$$X(t) = P\exp(tT)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\begin{cases} x(t) = (2c + d(3+2t))e^{2t} \\ y(t) = (c + d(2+t))e^{2t} \end{cases}$$

avec c, d quelconques. Notez que c et d ne correspondent plus directement aux valeurs de $x(0)$ et $y(0)$.

b) $x(t)$ et $y(t)$ sont de la forme : un polynôme fois e^{2t}. Par croissance comparée, la limite en $-\infty$ est égale à 0 pour toutes les fonctions. En $+\infty$, si c ou d est non nul, alors encore par croissance comparée, la limite vaut $\pm\infty$ en fonction du signe du coefficient dominant du polynome. En revanche, si c et d sont nuls, alors x et y sont identiquement nulles, et sont dans ce cas la limite en $+\infty$ est nulle. C'est le seul cas où cela se produit.

c) On ne peut pas utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui donne un résultat d'unicité lorsqu'on fixe une condition initiale $X(t_0) = X_0$. Mais ce n'est pas le type de condition qu'on donne ici. Il fallait utiliser le fait que l'espace $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est un espace vectoriel de dimension 2 et que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x(\sqrt{3}), y'(e^{187})) \end{aligned}$$

est une application linéaire injective [2] , donc bijective. Il y a donc une unique solution de $\mathcal{S}$ vérifiant les conditions données, comme unique préimage du vecteur $(\pi, \frac{17}{5})$.
Remarque 2. Si les coefficients sont compliqués, la réponse demande sans doute un argument abstrait plutôt qu'un calcul explicite.
Remarque 3. On peut aussi indirectement calculer l'exponentielle de tA, et effectivement résoudre tout le système en posant $Y(t) = \left(\begin{smallmatrix} r(t) \\ s(t) \end{smallmatrix}\right) = P^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x(t) \\ y(t) \end{smallmatrix}\right)$, ce qui donne $Y' = exp(tT)Y$. Le système différentiel est alors triangulaire, et peut être résolu équation par équation en partant de la dernière.

2. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(e_1) \quad 2w'^2 - ww'' + 4w'w + 4w^2 - w^3e^{2t} = 0$$

de fonction inconnue $w : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle.

a) Supposons que w ne s'annule pas sur l'intervalle I. On pose $u = \frac{1}{w}$.
b) Exprimer w' et w'' en fonction de u, u' et u''.
c) Déterminer une équation différentielle linéaire (e_1') satisfaite par u.
d) Donner une base des solutions de l'équation homogène associée à (e_1'). On appellera A et B les coefficients d'une solution dans cette base.
e) Déterminer une solution particulière de (e_1').
f) Exprimer en fonction de A et B toutes les solutions u de l'équation (e_1').

2. Chercher les préimages de $(0,0)$ mène à un système linéaire homogène pour les constantes c et d, dont la seule solution est la solution nulle.

g) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $w = \frac{1}{u}$ soit définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

h) Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, déterminer en fonction des valeurs de A et B les plus grands intervalles I sur lesquels w peut être définie. Déterminer le comportement de w au voisinage des extrémités réelles finies de I.

Solution de l'exercice 2.

a)

b) $w = \frac{1}{u}$, donc $w' = -\frac{u'}{u^2}$ et $w'' = \frac{2w'^2 - ww''}{w^3}$.

c) On réinjecte ces expressions dans l'équation vérifiée par w, pour obtenir

$$(e_1') \quad u'' - 4u' + 4u = e^{2t}$$

d) L'équation caractéristique associée à l'équation homogène de (e_1') est $r^2 - 4r + 4 = 0$ qui admet 2 comme racine double. Une base de solution est donc donnée par $(t \mapsto e^{2t}, t \mapsto te^{2t})$.

e) Comme 2, qui est le coefficient de l'exponentielle dans le membre de droite, est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $Ct^2 \exp(2t)$. En injectant dans l'équation, on obtient $C = \frac{1}{2}$.

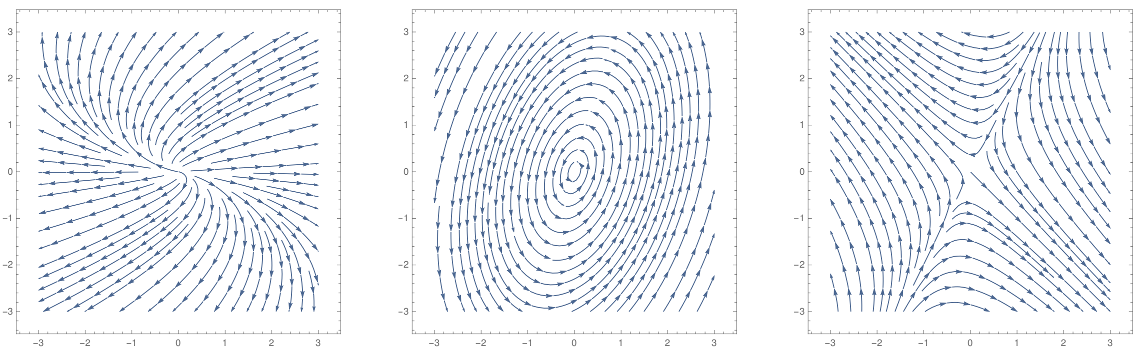
f) Les solutions de (e_1') sont les fonctions u définies par

$$u(t) = (A + Bt + \frac{t^2}{2})e^{2t}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}^2$$

g) L'expression définissant u est bien définie pour tout t réel. Si on veut que w soit défini sur tout $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que u ne s'annule pas. L'exponentielle est toujours strictement positive. La condition est donc vérifiée si et seulement si $A + Bt + \frac{t^2}{2}$ ne s'annule jamais, ce qui est le cas si le discriminant $\Delta = B^2 - 4\frac{1}{2}A = B^2 - 2A$ est strictement négatif.

h) Si le discriminant est strictement positif, il y a deux racines réelles $t_- < t_+$. Donc w sera définie sur $]-\infty, t_-[\cup]t_-, t_+[\cup]t_+, +\infty[$. u s'annule en ces valeurs t_- et t_+, en changeant de signe donc w tendra vers $\pm\infty$ de part et d'autre : le graphe de w aura une asymptote verticale. Si le discriminant est nul, alors il y a une seule valeur t_0 où w n'est pas définie. w tendra vers $+\infty$ de part et d'autre de t_0.

3. Portraits de phase.



(a) (b) (c)

Les trois images suivantes montrent le portrait de phase pour des équations différentielles linéaires homogènes de la forme $X' = AX$, avec A une matrice carrée 2×2 à coefficients réels.

a) Quelle image correspond à une matrice avec deux valeurs propres réelles ? Donner le signe des valeurs propres.

b) Quelle image correspond à une matrice dont les valeurs propres sont imaginaires pures ?

c) Que peut-on dire de la matrice associée à l'image qui ne correspond pas aux trois cas précédents ?

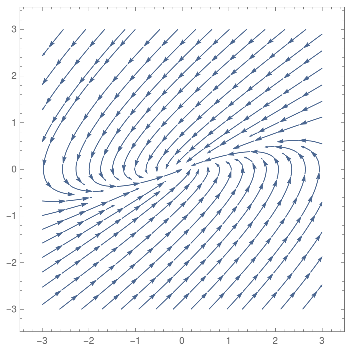
Solution de l'exercice 3. On rappelle qu'un portrait de phase est une représentation graphique de l'équation différentielle sous forme d'un champ de vecteur. En chaque point (x, y), on représente par une flèche le vecteur des dérivées $(x'(t), y'(t))$, qui vaut ici $A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$. (Ici ça ne dépend pas de t car le système est autonome : (x', y') est une fonction de (x, y) uniquement.

a) L'image correspondant à deux valeurs propres réelles est le (c). On y aperçoit deux droites passant par l'origine sur lesquelles les flèches sont alignés. Ces droites correspondent à des espaces propres de A associés à des valeurs propres réelles. En effet, si v est un vecteur propre de A associé à la valeur propre réelle λ (donc vecteur propre de $\exp(tA)$ associé à la valeur propre $e^{t\lambda}$), alors la solution de l'équation différentielle ayant pour valeur initiale $X_0 = v$ $X(t) = \exp(tA)v = \exp(\lambda t)v$, donc reste toujours colinéaire à v. Les flèches s'approchent (resp. s'éloignent) de l'origine lorsque $\lambda < 0$ (resp. $\lambda > 0$). Une valeur propre de A est donc strictement positive, l'autre strictement négative.

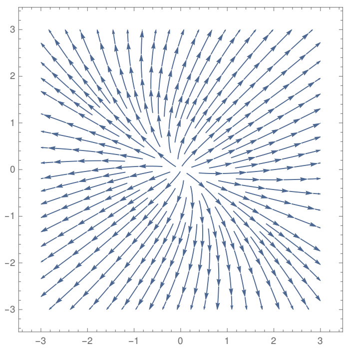
b) L'image montre des trajectoires périodiques : en suivant les fèches, on retombe sur son point de départ. Le seul cas d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants pouvant donner ą est celui où les solutions sont de la forme $\alpha\cos(\omega t)+\beta\sin(\omega t)$, c'est à dire lorsque la matrice A a deux valeurs propres complexes imaginaires $\pm i\omega$.

c) L'image montre une seule direction propre (avec une valeur propre strictement positive. Elle correspond à un cas où la matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, mais semblable à un bloc de Jordan de taille 2.

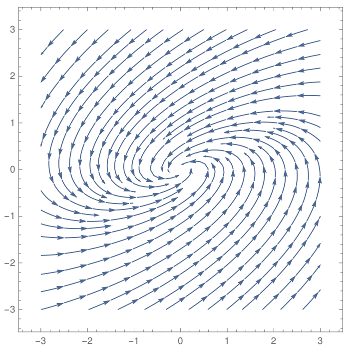
Complément : que dire de la diagonalisabilité de la matrice A dans les cas suivant, ainsi que des valeurs propres



(a)



(b)



(c)

4. Un *pendule simple* est une masse m attachée à un fil non extensible de longeur ℓ, dont l'autre extrémité est fixé à un point d'attache O. Le mouvement de ce pendule est paramétré par l'angle θ que forme le fil avec la verticale au point O.

Les équations de la mécanique nous disent (admis) que l'angle θ en fonction du temps t vérifie l'équation suivante :

$$(e_2) \quad m\ell\theta'' = -mg\sin(\theta).$$

a) Montrer que si θ est solution de (e_2), l'énergie mécanique du système définie pour tout t par :
$$E(t) = \frac{1}{2}m\ell^2\theta'(t)^2 - mg\ell\cos(\theta(t))$$
est en fait constante au cours du temps.

b) Déterminer les solutions constantes de l'équation (e_2) (correspondant aux points d'équilibre).

c) On suppose que le mouvement est de petite amplitude autour de la position $\theta_0 = 0$. Remplacer $\sin(\theta)$ par son polynome de Taylor à l'ordre 1 dans (e_2) pour obtenir une équation linéaire (e_2') dont on donnera les solutions. Dessiner l'allure typique des solutions et décriver qualitativement le mouvement.

d) Même question pour $\theta_0 = \pi$.

Solution de l'exercice 4.

a) Soit I un intervalle sur lequel θ est définie (ce pourra être $\mathbb{R}$ dans ce cas). E est bien dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables, et
$$E'(t) = m\ell^2\theta'(t)\theta''(t) + mg\ell\theta'(t)\sin(t) = \ell\theta'(t)\left(m\ell\theta''(t) + mg\sin(t)\right).$$
La parenthèse est nulle puisque (e_2) est vérifiée par θ. E' est nulle sur un *intervalle*, donc E est constante.

b) Les solutions constantes vérifient $\theta' = \theta'' = 0$. Elle doivent donc vérifier $\sin(\theta) = 0$, c'est à dire $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) Lorsque θ est petit, on a $\sin(\theta) = \theta + O(\theta^3)$. L'équation linéarisée est $\theta'' + \omega^2\theta = 0$, avec $\omega = \sqrt{g/l}$. L'équation caractéristique est $r^2 + \omega^2 = 0$ qui a deux solutions complexes conjuguées $\pm i\omega$. Les solutions *rélles* de cette équation sont donc de la forme $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ qui donne un mouvement oscillatoire périodique (non amorti !).

d) Pour θ proche de pi, on a
$$\sin(theta) = \sin(\pi - \theta) = (\pi - \theta) + O((\pi - \theta)^3).$$
L'équation linéarisée est $(\theta - \pi)'' - \omega^2(\theta - \pi) = 0$. En posant $\phi = \theta - \pi$, on obtient une équation homogène (on peut aussi garder θ et résoudre l'équation avec 2e membre, qui donnera une solution particulière constante égale à π), dont l'équation caractéristique est $r^2 - \omega^2 = 0$ avec deux solutions réelles $\pm\omega$. Les solutions sont de la forme $\theta = \pi + a\exp(\omega t) + b\exp(-\omega t)$. Suivant la valeur de a qui dépend des valeurs initiales de la position et de la vitesse initiale, au bout d'un temps $>$0, la solution va devenir soit plus grande ou plus petite que π : le pendule placé la tête en bas, tombera soit vers la gauche, soit vers la droite.

Remarques diverses

— Si une matrice est semblable à une matrice diagonale avec tous ses coefficients égaux, alors c'est elle même un multiple de l'identité. Donc si vous trouvez qu'une matrice n'a qu'une seule valeur propre, par exemple le polynome caractéristique est par exemple $(X-2)^2$ et que la matrice n'est pas $2I_2$, alors elle n'est pas diagonalisable, et est donc semblable à $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, et non pas$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

- Savoir dériver deux fois $x \mapsto 1u(x)$ est un minimum. Dans le même genre, si $f : x \mapsto x^2e^{2x}$, alors f' n'est pas la fonction définie pour tout x par $2x2\exp(2x)$. Faire un cours d'équations différentielles sans être à l'aise avec la dérivation, c'est pas facile. Il faut s'entrainer au calcul !
- Savoir réduire un résultat est aussi important. Ca simplifie le reste des calculs. Exemples de résultats non réduits trouvés : $\ell\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ au lieu de $\sqrt{gl}$, $\frac{2u'^2u-u^2u''}{u^4}$ au lieu de $\frac{2u'^2-uu''}{u^3}$ ou $\frac{2u'^2}{u^3}-\frac{u''}{u^2}$.
- Si X_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et A une matrice 2×2, alors $X_0\exp(tA)$ n'a pas de sens, car les tailles de matrices ne permettent pas de faire le produit dans cet ordre.
- Si on a trouvé que
$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 4e^2 & 4e^2 \\ 2e^2 & 3e^2 \end{pmatrix},$$
on *ne peut pas* en déduire la valeur de $\exp(tA)$ pour tout t (surtout pas juste en rajoutant un t dans l'exponentielle dans les coefficients). C'est comme si on vous disait que f était une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$, et que vous disiez qu'alors $f(t) = t$ (ou t^2, ou $\cos(|t-1|)$, ou...). On ne peut pas.
- Le polynomôme $(X-2)^2$ n'est pas "scindé à racines simples". Il est scindé dans $\mathbb{R}$ (il a autant de racines réelles que le degré du polynome), mais 2 est une racine double ! En particulier une matrice ayant tel polynôme caractéristique n'est pas forcément diagonalisable. En revanche $(X-2)(X-3)$ est scindé à racines simples.
- Si on a $\frac{1}{u} = w$, alors $w = \frac{1}{w}$. Donc si vous trouvez $u'' = F(w, w', w'')$, en inversant les relations, vous devriez trouver que $w'' = F(u, u', u'')$, avec le même F !
- Si $t \mapsto K\sin(\omega t)$ donne des oscillations non amorties pour $K = 1$, alors elles ne seront pas amorties pour $K < 1$. Pour avoir des oscillations amorties avec une equation differentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, il faut deux racines complexes conjuguées pour léquation caractéristique $\alpha \pm i\beta$ avec une partie réelle α strictement négative. On a alors des solutions de la forme $t \mapsto e^{\alpha t}(a\cos(\beta t) + b\sin(\beta t)) = ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \phi)$ qui décroissent exponentiellement vite vers 0 (oscillations de période $2\pi/\beta$, « pincées » entre les courbes de $\pm ce^{\alpha t}$.