Sorbonne Université — Licence de Mathématiques L2

Introduction aux équations différentielles — UE 2M110

Première session du 20 mai 2019

Durée : 2 heures. Tous documents, calculatrices, téléphones et autres objects connectés interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte. Toute réponse doit être justifiée avec des phrases. Des calculs seuls ne suffisent pas pour obtenir le maximum de points. Les étoiles indiques des questions plus difficiles (mais pas infaisables !).

Exercice 1. Mise en bouche.

a) Calculer $\exp\begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$. Que pensez-vous de la phrase « les coefficients de l'exponentielle d'une matrice réelle sont strictement positifs » ?

b) Montrer, sans résoudre le système différentiel, que la fonction H définie sur $\mathbb{R}^2$ par $H(x,y) = x^2 + 2y^2$ est constante le long des solutions du système différentiel

$$\begin{cases} x' &= 2y, \\ y' &= -x. \end{cases}$$

c) Résoudre par la méthode de la variation de la constante

$$x' + \cos(t)x = te^{-\sin(t)}.$$

d) L'espace des solutions réelles d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants est-il toujours engendré par des fonctions qui sont le produit d'un polynome et d'une exponentielle ? Justifier.

e) La fonction cos est-elle solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants ? Justifier.

Exercice 2. Soit $P = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$.

a) Vérifier que 2 est racine double de P.

b) Factoriser P dans $\mathbb{C}$.

c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle d'inconnue $x : t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$:

$$(\spadesuit) \qquad x'''' - 3x''' + x'' + 4x = e^t + e^{2t}.$$

d) Donner l'ensemble des solutions de $(\spadesuit)$ qui sont bornées sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 3. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $v = \binom{1}{1}$ et $w = \binom{1}{2}$.

a) Montrer que (v, w) est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que v est un vecteur propre de A pour une valeur propre qu'on précisera.

c) Exprimer Aw dans la base (v, w).

d) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $X' = AX + v$ d'inconnue $X : t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 4. Une équation différentielle linéaire à coefficients non constants.

Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse à la résolution sur l'intervalle $I =]0, \infty[$ de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{E}) \qquad 4uy'' + 2y' + by = 0,$$

où l'inconnue est la fonction $y : u \in I \mapsto y(u) \in \mathbb{R}$. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur I. Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Première partie

a) Montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est un espace vectoriel.

b) Soit y_1 et y_2 deux solutions de $(\mathcal{E})$. On pose pour tout $u \in I$

$$w(u) = y_1(u)y_2'(u) - y_2(u)y_1'(u) = \det \begin{pmatrix} y_1(u) & y_2(u) \\ y_1'(u) & y_2'(u) \end{pmatrix}.$$

Montrer que la fonction $w : u \mapsto w(u)$ est dérivable et calculer sa dérivée pour tout $u \in I$ en fonction de u, $y_1(u)$, $y_2(u)$, $y_1'(u)$ et $y_2'(u)$. En déduire que w est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sur I de la forme :

$$(E) \quad w' = \alpha u^\beta w$$

avec des constantes numériques α et β qu'on précisera.

c) Résoudre l'équation (E). En déduire que w est identiquement nulle sur I si et seulement s'il existe un point de I sur lequel w s'annule.

d) $\star$ Soit $u_0 \in I$. Montrer alors que les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si les vecteurs $\left(\binom{y_1(u_0)}{y_1'(u_0)}, \binom{y_2(u_0)}{y_2'(u_0)}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

e) $\star$ En utilisant la question précédente, montrer que l'application

$$\Psi : y \in \mathcal{S} \mapsto \begin{pmatrix} y(u_0) \\ y'(u_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

est injective. En déduire que $\mathcal{S}$ est de dimension finie.

Deuxième partie

f) Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. On définit une nouvelle fonction z sur I par $z(x) = y(x^2)$ pour tout $x \in I$. Montrer que z est deux fois dérivable sur I et calculer pour tout $u \in I$, $y(u)$, $y'(u)$ et $y''(u)$ en fonction de u, z, z' et z''.

g) En déduire qu'y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si z est solution d'une certaine équation différentielle $(\mathcal{E}')$ du second ordre à coefficients constants homogène que l'on précisera.

h) Résoudre $(\mathcal{E}')$ sur I.

i) En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ sur I.