Première session du 20 mai 2019

Durée : 2 heures. Tous documents, calculatrices, téléphones et autres objects connectés interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte. Toute réponse doit être justifiée avec des phrases. Des calculs seuls ne suffisent pas pour obtenir le maximum de points. Les étoiles indiques des questions plus difficiles (mais pas infaisables !).

Exercice 1. Mise en bouche.

a) Calculer $\exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Que pensez-vous de la phrase « les coefficients de l'exponentielle d'une matrice réelle sont strictement positifs » ?

b) Montrer, sans résoudre le système différentiel, que la fonction H définie sur $\mathbb{R}^2$ par $H(x,y) = x^2 + 2y^2$ est constante le long des solutions du système différentiel

$$\begin{cases} x' &= 2y, \\ y' &= -x. \end{cases}$$

c) Résoudre par la méthode de la variation de la constante

$$x' + \cos(t)x = te^{-\sin(t)}.$$

d) L'espace des solutions réélles d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants est-il toujours engendré par des fonctions qui sont le produit d'un polynome et d'une exponentielle ? Justifier.

e) La fonction cos est-elle solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants ? Justifier.

Solution de l'exercice 1.

a) En utilisant par exemple l'exercice de TD faisant le lien entre les nombres complexes $a+ib$ et les matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$, on obtient :

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\operatorname{Id}_2.$$

Donc la phrase est fausse (sauf pour des matrices réelle de taille 1, bien-sûr).

b) Soit (x,y) une solution du système différentiel sur un intervalle I. On définit alors $h : t \in I \mapsto h(t) = H(x(t), y(t))$. La fonction h est dérivable sur I par composée, car x et y sont dérivable et H différentiable, comme fonction polynôme, et on a pour tout $t \in I$:

$$h'(t) = x'(t)\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t)\frac{\partial H}{\partial y}(x(t),y(t)) = 2y(t)(2x(t)) + (-x(t))(4y(t)) = 0.$$

Comme I est un intervalle, h est constante, ce qui signifie que H est constante le long des trajectoire de la solution (x,y).

c) On commence par résoudre l'équation homogène associée $x' + \cos(t)x = 0$, dont les solutions d'après le cours sont de la forme $x(t) = A\exp(-\sin(t))$. On cherche ensuite *une* solution particulière de l'équation complète sous la forme $x_1(t) = A(t)\exp(-\sin(t))$. En injectant cette forme on obtient que x_1 est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = t$. On peut donc *choisir* $A(t) = \frac{t^2}{2}$. Toute solution de l'équation s'écrit comme la somme de x_1 et d'une solution de l'équation homogène. L'ensemble des solutions est donc données par les fonctions
$$x : t \in \mathbb{R} \mapsto (A + \frac{t^2}{2})e^{-\sin(t)},$$
avec $A \in \mathbb{R}$ arbitraire.

d) Si on regarde des combinaisons linéaires complexes, et autorise des exponentielles complexes, alors c'est vrai, car les solutions sont des combinaisons linéaires d'exponentielles de blocs de Jordan qui sont de cette forme. En revanche, si on ne veut parler que d'exponentielles réelles, ou de coefficients réels dans la combinaison linéaire, alors c'est faux, car en recombinant une exponentielle complexe avec sa conjuguée, on fait apparaitre des fonctions de la forme $t \mapsto e^{at}\sin(bt)$ ou $t \mapsto e^{at}\cos(bt)$. Voir question plus bas.

e) Cette question était faite pour vous mettre sur la bonne voie pour la question précédente : cos est solution de $x'' + x = 0$.

Exercice 2. Soit $P = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$.

a) Vérifier que 2 est racine double de P.

b) Factoriser P dans $\mathbb{C}$.

c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle d'inconnue $x : t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$:
$$(\spadesuit) \quad x'''' - 3x''' + x'' + 4x = e^t + e^{2t}.$$

d) Donner l'ensemble des solutions de $(\spadesuit)$ qui sont bornées sur $\mathbb{R}_-$.

Solution de l'exercice 2.

a) On vérifie que $P(2) = P'(2) = 0$, (mais $P'''(2) \neq 0$ si on veut vérifier que ce n'est pas racine triple).

b) En faisant la division euclidienne de P par $(X-2)^2$, on obtient
$$P = (X-2)^2(X^2 + X + 1) = (X-2)^2(X-j)(X-\bar{j})$$
avec $j = e^{2i\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

c) On commence par l'équation homogène qu'on résout en regardant l'équation caractéristique qui est exactement $P(r) = 0$. D'après le théorème du cours, l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 4 engendré par les fonctions $t \mapsto e^{2t}$, $t \mapsto te^{2t}$, $t \mapsto e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2)$ et $t \mapsto e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$. On cherche ensuite des solutions particulières avec un membre de droite non nul. D'après le principe de superposition pour cette équation différentielle linéaire, on peut :

- d'abord trouver une solution particulière x_1 pour le membre de droite égal à $e^t = e^{1t}$. Comme 1 n'est pas racine de P, par la méthode des coefficients indéterminés, chercher une solution sous la forme $x_1 : t \mapsto ae^t$. On trouve qu'alors x_1 est solution si et seulement si $a = 1/3$. Donc $x_1(t) = e^t/3$.
- trouver une solution x_2 pour le membre de droite égal à e^{2t}. 2 est racine double de P donc il n'y a pas de solution de la forme $t \mapsto be^{2t}$ (elles sont déjà solutions de l'équation homogène). Il faut donc chercher une solution plutot sous la forme bt^2e^{2t}. On trouve que b doit être égal à $\frac{1}{14}$.

Les solutions de l'équation différentielle est la somme de x_1, x_2 et une solution arbitraire de l'équation homogène : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = (c + dt + \frac{t^2}{14})e^{2t} + e^{-t/2}(u\cos(\sqrt{3}t/2) + v\sin(\sqrt{3}t/2)) + \frac{e^t}{3},$$

avec c, d, u, v réels quelconques.

Exercice 3. Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $w = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Montrer que (v, w) est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que v est un vecteur propre de A pour une valeur propre qu'on précisera.

c) Exprimer Aw dans la base (v, w).

d) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $X' = AX + v$ d'inconnue $X : t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^2$

Solution de l'exercice 3.

a) La matrice $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ des coordonnées de v et w dans la base canonique est inversible. Donc (v, w) forme une base de $\mathbb{R}^2$ (car grâce à cette matrice, on peut exprimer n'importe quel vecteur dont on connait les coordonnées dans la base canonique comme combinaison linéaire de v et w).

b) Le calcul montre que $Av = 3v$. Il est inutile à ce stade de calculer le polynôme caractéristique, vu qu'on vous donne déjà le vecteur à tester. Même s'il est bon d'avoir des réflexes quand on voit des mots-clés (comme ici *vecteur propre*), il faut savoir aussi se retenir et ne pas se lancer dans des arguments qui sont finalement inutiles.

c) Le calcul montre que $Aw = v + 3w$. On a donc d'après les deux dernières questions $AP = PB$ avec $B = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

d) Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $X(t) = \exp(tA)X_0$. On calcule explicitement $\exp(tA)$:

$$\exp(tA) = P\exp(tB)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

On peut chercher une solution particulière sous la forme d'un vecteur constant vu que le second membre est lui-même constant. On peut prendre un vecteur quelconque $\binom{a}{b}$ et injecter dans l'équation, mais on peut aussi se souvenir que comme v est vecteur propre, on peut voir que la dynamique préserve la droite engendrée par v. Donc si une fonction constante égale à un vecteur de la forme $X_1 = \alpha v$ est solution si et seulement si $A\alpha v + v = 0$, c'est à dire si $\alpha = -\frac{1}{3}$. Toute solution de l'équation complète s'écrit comme la somme de X_1 avec une solution de l'équation homogène

Exercice 4. Une équation différentielle linéaire à coefficients non constants.

Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse à la résolution sur l'intervalle $I =]0, \infty[$ de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{E}) \qquad 4uy'' + 2y' + by = 0,$$

où l'inconnue est la fonction $y : u \in I \mapsto y(u) \in \mathbb{R}$. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur I. Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Première partie

a) Montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est un espace vectoriel.

b) Soit y_1 et y_2 deux solutions de $(\mathcal{E})$. On pose pour tout $u \in I$

$$w(u) = y_1(u)y_2'(u) - y_2(u)y_1'(u) = \det \begin{pmatrix} y_1(u) & y_2(u) \\ y_1'(u) & y_2'(u) \end{pmatrix}.$$

Montrer que la fonction $w : u \mapsto w(u)$ est dérivable et calculer sa dérivée pour tout $u \in I$ en fonction de u, $y_1(u)$, $y_2(u)$, $y_1'(u)$ et $y_2'(u)$. En déduire que w est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sur I de la forme :

$$(E) \quad w' = \alpha u^{\beta} w$$

avec des constantes numériques α et β qu'on précisera.

c) Résoudre l'équation (E). En déduire que w est identiquement nulle sur I si et seulement s'il existe un point de I sur lequel w s'annule.

d) $\star$ Soit $u_0 \in I$. Montrer alors que les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si les vecteurs $\left(\binom{y_1(u_0)}{y_1'(u_0)}, \binom{y_2(u_0)}{y_2'(u_0)}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

e) $\star$ En utilisant la question précédente, montrer que l'application

$$\Psi : y \in \mathcal{S} \mapsto \begin{pmatrix} y(u_0) \\ y'(u_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

est injective. En déduire que $\mathcal{S}$ est de dimension finie.

Deuxième partie

f) Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. On définit une nouvelle fonction z sur I par $z(x) = y(x^2)$ pour tout $x \in I$. Montrer que z est deux fois dérivable sur I et calculer pour tout $u \in I$, $y(u)$, $y'(u)$ et $y''(u)$ en fonction de u, z, z' et z''.

g) En déduire qu'y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si z est solution d'une certaine équation différentielle $(\mathcal{E}')$ du second ordre à coefficients constants homogène que l'on précisera.

h) Résoudre $(\mathcal{E}')$ sur I.

i) En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ sur I.

Solution de l'exercice 4.

a) On utilise le critère du sous-espace vectoriel. Les solutions sont des fonctions deux fois dérivables sur I. L'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur I est un epace vectoriel. Montrons que l'ensemble des solutions en est un sous groupe. La fonction constante égale à 0 est solution, donc l'ensemble des solutions est non vide. Si x et y sont solutions et λ est un réel, on vérifie sans peine, grâce à la linéarité de la dérivation que $x + \lambda y$ est aussi solution.

b) Comme y_1 et y_2 sont deux fois dérivables, w est dérivable d'après le théorème sur les opérations usuelles sur les fonctions dérivables, et on a pour tout $u \in I$:

$$w'(u) = y_1(u)y_2''(u) - y_2(u)y_1''(u) = \frac{1}{4u}(y_2(u)(2y_1'(u) + by_1) - y_1(u)(2y_2'(u) + by_2) = \frac{-w(u)}{2u}$$

w vérifie donc l'équation différentielle avec $\alpha = -1/2$ et $\beta = -1$.

c) C'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre. Les solutions sont de la forme $w(u) = A\exp(\frac{-1}{2}\log u) = \frac{A}{\sqrt{u}}$. On voit sur la solution que w s'annule quelque part sur I si et seulement si A est nul, et donc si et seulement si w est identiquement nulle. On peut aussi invoquer le théorème d'unicité des solutions du problème de Cauchy pour ces équations (vu en cours en décrivant l'espace des solutions, ou comme conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz) : la fonction constante 0 étant solution, c'est la seule qui est autorisée à s'annuler car elle est l'unique solution du problème de Cauchy pour un w satisfaisant (E) et la condition $w(x_0) = 0$ pour un x_9 quelconque de I.

d) Supposons d'abord que $\left(\binom{y_1(u_0)}{y_1'(u_0)}, \binom{y_2(u_0)}{y_2'(u_0)}\right)$ est une base. Alors $w(u_0) \neq 0$. Soit maintenant λ et μ reels tels que $\lambda y_1 + \mu y_2$ soit identiquement nulle. En dérivant, on obtient aussi que $\lambda y_1' + \mu y_2'$ est identiquement nulle sur I. En évaluant en u_0, on obtient le système suivant vérifié par λ et μ :

$$\begin{cases} \lambda y_1(u_0) + \mu y_1'(u_0) & = 0 \\ \lambda y_2(u_0) + \mu y_2'(u_0) & = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $w(u_0) \neq 0$, donc il a une unique solution qui est $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. La famille (y_1, y_2) est donc libre. Réciproquement, si $\left(V_1 = \binom{y_1(u_0)}{y_1'(u_0)}, V_2 = \binom{y_2(u_0)}{y_2'(u_0)}\right)$

n'est pas une base, les deux vecteurs sont proportionnels, par exemple si V_2 n'est pas nul, $V_1 = \alpha V_2$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. L'équation étant linéaire et homogène, αy_2 et y_1 sont solution du même problème de Cauchy (l'équation $(\mathcal{E})$ plus la condition que $y(u_0) = y_1(u_0)$ et $y'(u_0) = y_1'(u_0)$, donc par unicité (théorème de Cauchy-Lipschitz), elles sont égales. On a donc la relation $y_1 = \alpha y_2$ qui montre que y_1 et y_2 ne sont pas indépendantes.

e) D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, la fonction nulle est la seule qui a pour image par Ψ le vecteur nul. Donc Ψ est injective. La dimension de l'espace d'arrivée (qui est finie et égale à 2) est donc inférieure à la dimension de l'espace de départ, donc finie. La deuxième partie montre que c'est 2.

f) z est deux fois dérivable par les théorèmes généraux sur la dérivabilité des fonctions composées, et on a pour tout $u \in I$:

$$\begin{aligned}
y(u) &= z(\sqrt{u}),\\
y'(u) &= \frac{1}{2\sqrt{u}} z'(\sqrt{u}),\\
y''(u) &= \frac{1}{4u} z''(\sqrt{u}) - \frac{1}{4u^{3/2}} z'(\sqrt{u})
\end{aligned}$$

de sorte que, en posant $t = \sqrt{u}$, on ait pour tout $u \in I$,

$$\begin{aligned}
4uy''(u) + 2y'(u) + by(u) &= z''(\sqrt{u}) - \frac{1}{u^{1/2}} z'(\sqrt{u}) + \frac{1}{u^{1/2}} z'(\sqrt{u}) + bz(\sqrt{u})\\
&= z''(t) + bz(t).
\end{aligned}$$

Comme t parcourt I si et seulement si u parcourt I, on a que y est solution de $(\mathcal{E})$ sur I si et seulement si z est solution sur I de :

$$(\mathcal{E}') \qquad z'' + bz = 0.$$

g) L'équation caractéristique associée à $(\mathcal{E}')$ est $r^2 + b = 0$ dont les solutions sont $r = \pm i\sqrt{b}$. L'espace des solutions réelles de cette équation est donc engendrée par les parties réelles et imaginaires de $t \mapsto e^{\pm it\sqrt{b}}$, c'est-à-dire $t \mapsto \cos(\sqrt{b}t)$ et $t \mapsto \sin(\sqrt{b}t)$.

h) Comme toutes les solutions de $(\mathcal{E}')$ sont de la forme $t \mapsto A\cos(\sqrt{b}t) + B\sin(\sqrt{b}t)$ avec A et B réels quelconques, d'après la question f), les solutions de $(\mathcal{E})$ sont de la forme $u \mapsto A\cos(\sqrt{b}u^2) + B\sin(\sqrt{b}u^2)$, avec A et B quelconques. Ces solutions forment un espace vectoriel de dimension 2 car les deux fonctions derrière A et B sont linéairement indépendantes.