Examen final du 11 mai 2016 (1^re^session)

Durée : 2 heures. Tous documents, calculatrices, téléphones et autres objects connectés interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

1. On veut résoudre l'équation différentielle suivante de fonction inconnue y définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$(E1) \quad y' = 2t\tan(y) + \frac{b(t)}{\cos(y)}.$$

où b est une fonction continue sur I qu'on précisera plus tard.

On considère dans un premier temps **le cas particulier où** $b = 0$.

a) Déterminer les solutions constantes définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E1)$.

b) Si $y : I \to \mathbb{R}$ est solution telle que pour un $t_0 \in I$,$y(t_0) \in]0, \frac{\pi}{2}[$, justifiez qualitativement pourquoi $y(t) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ pour tout $t \in I$.

c) Résoudre dans ce cas l'équation différentielle avec une condition initiale $y(t_0) \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

d) En utilisant les symétries de la fonction sin, résoudre l'équation différentielle pour une condition initiale quelconque $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

e) Dessiner schematiquement le graphe de l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

On regarde maintenant **le cas particulier où** $b(t) = e^{t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

f) Montrer que si la fonction dérivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de $(E1)$, alors la fonction $z = \sin \circ y$, définie aussi sur I, est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(E2) \quad z' = A(t)z + B(t)$$

avec des fonctions A et B que l'on précisera.

g) Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre $(E2)$ par la méthode de la variation de la constante.

h) Quelles sont les solutions de cette équation qui valent 0 à $t = 0$?

Solution de l'exercice 1.

a) Les solutions constantes sont les valeurs de y qui annulent $2t\tan(y)$. Ce sont exactement les valeurs de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

b) On remarque qu'une solution ne peut pas prendre une valeur de la forme $(k+\frac{1}{2})\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ car tan n'y est pas définie. Si une solution prend une valeur entre $]0, \pi/2[$, comme elle est continue sur un intervalle I, et qu'elle ne peut pas prendre la valeur $\pi/2$, ni la valeur 0 (sinon elle serait constante égale à 0, par unicité des solutions (théorème de Cauchy-Lipschitz). Par le théorème des valeurs intermédiaires, la solution doit prendre des valeurs uniquement dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

c) On applique la méthode pour les équations différentielles à variables séparables. On écrit que pour tout $t \in I$, $\frac{y'}{\tan y} = 2t$. En intégrant, on obtient l'existence d'un $C \in \mathbb{R}$ tel que $\log(\sin y(t)) = t^2 + C$ ($\sin y(t) > 0$ par hypothèse). On compose par exp puis par arcsin, pour trouver que la solution est de la forme

$$y(t) = \arcsin(\exp(t^2 + C))$$

avec la constante C déterminée par la condition $y(t_0) = \arcsin(\exp(t_0^2 + C))$.

d) Comme tan est une fonction impaire et π-periodique, on remarque que y est solution de l'équation différentielle avec condition initiale y_0 à $t = t_0$ si et seulement si $-y$ (resp. $y + k\pi$) est solution avec condition initiale $y0$ (resp. $y_0 + k\pi$). Le graphe des solutions est donc invariant par translation verticale de π et par symétrie par rapport à l'axe horizontal (et donc par toutes les droites de la forme $y = \frac{k\pi}{2}$).

e)

f) Si y est dérivable, alors z aussi par dérivabilité des fonctions composées, et $z' = y' \times \cos \circ y$. Donc pour tout $t \in I$,

$$z'(t) = y'(t)\cos(y(t)) = 2t\sin(y(t)) + b(t) = 2tz(t) + b(t) = A(t)z(t) + B(t)$$

avec $A(t) = 2t$ et $B(t) = b(t) = e^{t^2}$.

g) On commence par résoudre l'équation homogène associée $z' = 2tz$, dont les solutions sont de la forme $C\exp(t^2)$, avec $C \in \mathbb{R}$. On cherche maintenant une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $z_i(t) = C(t)\exp(t^2)$ (variation de la constante). En injectant cette forme dans l'équation on trouve que $C'(t) = 1$, donc on peut choisir $C(t) = t$ (on n'a besoin que d'une solution particulière). Toute solution de l'équation s'écrit

$$z(t) = C\exp(t^2) + z_i(t) = (t + C)\exp(t^2), \quad C \in \mathbb{R}.$$

h) Il n'y a qu'une seule solution qui vaut 0 à $t = 0$ (unicité de la solution avec une condition initiale par théorème). Dans ce cas, elle correspond à $C = 0$.

2. On veut résoudre le système différentiel suivant :

$$(S1) \quad \begin{cases} x' &= 2x + y + e^{3t} \\ y' &= 2y + e^{3t} \\ z' &= x + 3z - e^{3t} \end{cases}$$

a) En posant $u = x + y + z$, écrire le nouveau système différentiel $(S2)$ vérifié par le triplet de fonctions (x, y, u), et l'écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} + B(t)$$

avec A et $B(t)$ que l'on précisera.

b) Calculer $\exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

c) À l'aide de la méthode des coefficients indéterminés, résoudre le système différentiel $(S2)$ vérifié par x, y, u.

d) En déduire l'ensemble des solutions du système $(S1)$.

Solution de l'exercice 2.

a) On a $u' = x' + y' + z' = 3x + 3y + 3z + e^{3t} = 3u + e^{3t}$. Donc x, y, u vérifie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}}_{B(t)}$$

b) On a :

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

c) La solution du système différentiel homogène est de la forme $\exp(tA)v_0$ où $v_0 = (x_0, y_0, u_0) \in \mathbb{R}^3$. On cherche une solution particulière sous la forme $(x_i(t), y_i(t), u_i(t)) = (ae^{3t}, be^{3t}, cte^{3t})$ (méthode des coefficients indeterminés. On est obligé de multiplier par t pour u car 3 est valeur propre (simple) de A ayant comme vecteur propre $(0, 0, 1)$). On trouve $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$. Les solutions du système $(S2)$ sont donc :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{2t} + y_0 t e^{2t} + 2e^{3t} \\ y(t) &= y_0 e^{2t} + e^{3t} \\ u(t) &= (u_0 + t)e^{3t} \end{aligned}$$

pour des valeurs de x_0, y_0, u_0 quelconques.

d) Pour déterminer les solutions de $(S1)$, il reste à exprimer $z(t)$ en fonction de x, y, u.

$$z(t) = u(t) - x(t) - y(t)$$

3. On rappelle que sh et ch sont respectivement les parties impaire et paire de la fonction exponentielle :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Soit l'équation différentielle suivante de fonction inconnue $y : I \to \mathbb{R}$

$$(E3) \quad y'' + \mathrm{sh}(y) = 0$$

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction

$$\mathcal{E} : (u, v) \mapsto \frac{u^2}{2} + \mathrm{ch}(v).$$

a) Montrer que les courbes de niveau de $\mathcal{E}$ sont fermées et bornées dans $\mathbb{R}^2$ (donc compactes). On pourra utiliser le fait que $\mathcal{E}$ est continue et tend vers l'infini lorsque la norme de (u, v) tend vers l'infini.

b) Montrer que si y est solution de $(E3)$ définie sur un intervalle I, alors la fonction $F : t \mapsto \mathcal{E}(y'(t), y(t))$ est constante sur I.

c) Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ (que l'on déterminera) tel que la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ égale à a est solution (équilibre).

d) En remplaçant sh par son polynôme de Taylor à l'ordre 1 en a, on obtient une équation différentielle linéaire du second ordre en y, décrivant les mouvements de petite amplitude au voisinage de l'équilibre. Écrire et résoudre cette équation différentielle linéaire. Que peut-on dire de l'équilibre en a ?

e) Dessiner schematiquement le portrait de phase de l'équation $(E3)$. On indiquera en particulier le sens de parcours des courbes solutions. On pourra s'aider des symétries de la fonction $\mathcal{E}$.

Solution de l'exercice 3.

a) La fonction $\mathcal{E}$ est continue donc l'ensemble de niveau, qui est l'image réciproque d'un singleton (donc fermé) est fermée. Comme $\mathcal{E}$ tend vers l'infini lorsque (u, v) tend vers l'infini, les ensemble de niveau sont bornés. Un fermé borné dans $\mathbb{R}^2$ est compact. (Il s'agit de courbes, car la différentielle de $\mathcal{E}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et donc en dehors de l'origine, on peut paramétrer localement les ensembles de niveau par une coordonnée, par le théorème des fonctions implicites).

b) La fonction F est dérivable sur I par les théorèmes usuels de composition de fonctions dérivables, et pour tout $t \in I$,

$$F'(t) = y''(t)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u}(y'(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v}(y'(t), y(t)) = y'(t)\big(y''(t) + \mathrm{sh}(y(t))\big) = 0.$$

Comme I est un intervalle, F est constante.

c) Si $y = a$ est solution de $(E3)$, alors $\mathrm{sh}(a) = 0$, c'est à dire $a = 0$. Réciproquement, la fonction constante égale à 0 est bien solution.

d) On a $\mathrm{sh}(x) = x + O(x^3)$. L'équation différentielle linéaire cherchée est $y'' + y = 0$. Léquation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$ dont les racines sont $-i$ et i. Les solutions de l'équation différentielle sont des combinaisons linéaires de $t \mapsto e^{it}$ et $t \mapsto e^{-it}$, ou encore combinaison linéaires de cos et sin. On observe des oscillations autour de la position d'équilibre. L'équilibre en a est donc stable.