**Examen final du 14 juin 2016 (2$^e$session)**

**Durée : 2 heures.** Tous documents, calculatrices, téléphones et autres objects connectés interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

**1.** Résoudre l'équation différentielle suivante par la méthode de la variation de la constante.

$$x' + 3t^2 x = 2te^{-t^3}$$

de fonction inconnue $x : t \in I \mapsto x(t)$, où $I$ est le plus grand intervalle de définition. Combien y a-t-il de solutions qui tendent vers 0 en $-\infty$ ? qui valent $\sqrt{134}$ en $t = \pi$ ?

**2.** Résoudre l'équation différentielle suivante

$$x' = \sqrt{1 - x^2}$$

de fonction inconnue $x : t \in I \mapsto x(t)$. On cherchera d'abord les solutions constantes, puis les solutions non constantes, dont on donnera le plus grand intervalle de définition. On dessinera l'allure des graphes des solutions. On rappelle que Arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée

$$\forall\, y \in ]-1, 1[, \mathrm{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

**3.** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $A$ pour une valeur propre que l'on précisera.

b) Trouver $d \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $w = \begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix}$ tel que $Aw = v + 2w$.

c) Montrer qu'il existe une matrice $P$ inversible telle que $A = P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$.

d) Calculez l'exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, puis celle de $A$.

e) Résoudre le système différentiel $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \end{pmatrix}$.

On pourra vérifier que

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} : t \mapsto \begin{pmatrix} ae^t \\ be^t \end{pmatrix}$$

est une solution particulière de ce système pour un certain choix de $a$ et $b$.

**4.** Soit $\lambda > 0$. On considère l'équation différentielle

$$(E1) \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad u''(t) + 2\lambda u'(t) + u(t) = 0.$$

a) Donnez une base de l'espace vectoriel des fonctions solutions de $(E1)$. On discutera selon la valeur de $\lambda$. Quelle est la dimension de l'espace des solutions qui s'annulent en $t = 1$ ? (On justifiera brièvement pourquoi c'est aussi un espace vectoriel).

b) Montrer que si $u$ est une solution de $(E1)$, alors la fonction $E : t \mapsto \frac{1}{2}(u(t)^2 + u'(t)^2)$ est décroissante. Peut-elle être constante sur un intervalle d'intérieur non vide ?

c) Soient $u$ et $v$ deux solutions de $(E1)$ sur $\mathbb{R}$. On définit

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad W_{u,v}(t) = \det \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{pmatrix}.$$

Montrer que $W_{u,v}$ est une fonction dérivable et calculer $W'_{u,v}(t)$ en fonction de $u(t)$, $v(t)$, $u'(t)$, $v'(t)$ et $\lambda$.

d) Montrer que $W_{u,v}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup>ordre homogène.

$$(E2) \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad y'(t) = cy(t)$$

avec une constante $c$ que l'on précisera.

e) Déterminer l'ensemble des solutions de $(E2)$.

f) En déduire que s'il existe $t_0\mathbb{R}$ tel que $W_{u,v}(t_0) \neq 0$, alors $W_{u,v}(t) \neq 0$ pour tout $t$.

g) Montrer que s'il existe $t_0$ tel que les vecteurs $\begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v(t_0) \\ v'(t_0) \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, alors les fonctions $u$ et $v$ sont linéairement indépendantes, et donc forment un base des solutions de $(E1)$.