Premier contact

1. Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue $x : t \mapsto x(t)$.

a) $x' = 0$, sur $\mathbb{R}$

b) $x' = 0$, sur $]-\infty, 2[\cup]5, +\infty[$

c) $x' = 1$, $x(-1) = 2$, sur $\mathbb{R}$

d) $x' = 1/t$, sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

2. Déterminer l'ordre de l'équation, et si elle est linéaire :

a) $t^2 y'' + ty' + 2y = \sin t$

b) $(1 + y^2)y'' + ty' + y = e^t$

c) $y^{(4)} + y^{(3)} + y'' + y' + y = 1$

d) $y'' + \sin(t + y) = \sin t$

Exemples provenant de la physique et biologie

3. D'après la loi de refroidissement de Newton, la température d'un objet change à un taux proportionnel à la différence de température entre l'objet lui-même et la température autour de lui (celle de l'air ambiant dans la plupart des cas). Supposons que la température ambiante est de 20°C et que la constante de taux est $0,1(min)^{-1}$. Écrire l'équation différentielle régissant la température de l'objet à chaque instant.

4. Pour de petits objets qui tombent, on peut faire l'hypothèse que la force de frottement de l'air est proportionelle à la vitesse de l'objet. La chute d'un objet satisfait donc l'équation différentielle à condition initiale suivante : $v' = g - \frac{\lambda}{m}v$; $v(0) = 0$. On prendra $g = 9.8 m \cdot s^{-2}$ et $\lambda/m = 0,2 s^{-1}$.

- Trouver le temps passé pour que l'objet atteint 98% de sa vitesse maximale.
- Quelle est la distance parcourue par l'objet pendant ce temps ?

5. Pour des objets plus gros et qui tombent plus vite, supposer que le frottement est proportionel au carré de la vitesse donne des meilleurs résultats.

— Écrire une équation différentielle pour la vitesse d'un objet de masse m si la force de frottement est proportionelle au carré de la vitesse (avec une constante de proportionalité k, appelée coefficient de frottement).
— Déterminer la vitesse limite après un temps très long.
— Si $m = 10\ kg$, $g = 9.8\ m \cdot s^{-2}$, trouver le coefficient de frottement pour que la vitesse limite soit égale à $49m/s$.

6. Considérons que la population de souris $p(t)$ dans un champ au temps t (exprimé en mois) peut être décrit par l'équation différentielle suivante : $p' = 0.5p - 450$
— Trouver le temps t pour lequel la population s'eteint si $p(0) = 850$.
— Trouver le temps t pour lequel la population s'eteint si $p(0) = p_0$ où $0 < p_0 < 900$.
— Trouver la population initiale p_0 si la population s'eteint après un an.

Résolution d'équations différentielles

7. Considérons l'équation differentielle :

$$y' = -ay + b$$

où a et b sont de nombres positifs.
— Résoudre l'équation
— Dessiner la solution pour des conditions initiales différentes.
— Comment la solution change-t-elle si a augmente ; si b augmente ; si a et b augmente, mais b/a reste fixe ?

8. Vérifier que les fonctions données sont bien des solutions de l'équation differentielle :
— $y'' - y = 0$; $y_1(t) = e^t$; $y_2(t) = \mathrm{ch} t$
— $ty' - y = t^2$; $y = 3t + t^2$

9. Trouver les solutions aux problèmes aux conditions initiales :
— $y' - y = 2te^{2t}$; $y(0) = 1$
— $y' + 2y = te^{-2t}$; $y(1) = 0$
— $ty' + 2y = t^2 - t + 1$; $y(1) = 1/2$; $t > 0$
— $y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2}$; $y(\pi) = 0$; $t > 0$
— $y' - 2y = e^{2t}$; $y(0) = 2$

10. Résoudre les problèmes par la méthode de la variation de la constante :
— $y' - 2y = t^2e^{2t}$
— $y' + \frac{1}{t}y = 3cos(2t)$; $t > 0$
— $ty' + 2y = sint$; $t > 0$
— $2y' + y = 3t^2$