Feuille 3

Exponentielles de matrices

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

— Calculez AB et BA.
— Calculez $\exp(A)\exp(B)$, $\exp(B)\exp(A)$ et $\exp(A+B)$.

On suppose maintenant que A et B sont deux matrices carrées de taille n qui commutent (*i.e.* telles que $AB = BA$). Montrer qu'alors $\exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A) = \exp(A+B)$. Indication : on rappelle que si A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on appelle $J_k(\lambda)$ le bloc de Jordan de taille k

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) Calculez les puissances de $J_k(0)$.
b) Calculez $\exp(tJ_k(0))$
c) En remarquant que $J_k(\lambda) = \lambda I_k + J_k(0)$, en déduire $\exp(tJ_k(\lambda))$.

3. Calculer les exponentielles des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

4. Soit E le sous ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$E = \{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ ; \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

Montrer que E est une $\mathbb{R}$-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$. En déduire une expression pour

$$\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 1$. On pose pour tout t, $A(t) = (t^2+1)M$. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'équation différentielle

$$X' = A(t)X \tag{1}$$

d'ínconnue $X : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}^n$ admet une unique solution valant x_0 en $t = 0$. Vérifier que l'ensemble de toutes les solutions de (1) forme un espace vectoriel dont on donnera la dimension.