Université Pierre & Marie Curie — L2 de mathématiques
Introduction aux équations différentielles — UE 2M110

Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 4

Exercice 1 : On considère l'équation différentielle suivante :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \qquad (E_0)$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{C}^3$. Le but de l'exercice est de déterminer les solutions de l'équation (E_0).

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $y : t \longmapsto e^{\lambda t}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ soit solution de l'équation (E_0).

2) Soit $P : \lambda \longmapsto a\lambda^2 + b\lambda + c$. On suppose que le discriminant Δ de P est non nul. Montrer que l'ensemble des solutions de (E_0) est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 dont on donnera une base. Même question si $\Delta = 0$.

3) Supposons que $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, montrer que des solutions de (E_0) forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 dont on donnera une base suivant que Δ soit positif, nul ou négatif.

4) Application : Résoudre les équations suivantes :

a) $y'' - y = 0$.
b) $y'' - 2y' + y = 0$.
c) $y'' + y' + y = 0$.
d) $y'' + 2y' + y = 0$.

Exercice 2 : On considère l'équation :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)e^{mt} \qquad (E_1)$$

où P est un polynôme et $m \in \mathbb{C}$. L'ensemble des solutions de (E_1) est un espace affine de dimension 2, donc s'écrit comme somme de l'espace des solutions homogènes qui correspond à la direction de l'espace des solutions et d'une solution particulière, correspondant au point par lequel passe l'espace affine des solutions. On cherche à déterminer une solution particulière de (E_1).

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $y : t \longmapsto Q(t)e^{mt}$ soit une solution de (E_1).

2) En déduire la forme de la solution particulière de (E_1) en fonction du degré du polynôme P.

3) Application : Résoudre les équations suivantes :

a) $y'' + y = te^t$.
b) $y'' - 2y' + y = (t^2 + 1)e^t$.
c) $y'' + y = \cos(t)$.
d) $y'' - 4y' + y = \sin(t) + \cos(t)$.
e) $y'' + 2y' + y = e^{-t}$.
f) $y'' + 4y' + y = \cos(t)e^{-t}$.

Exercice 3 (variation de la constante) : On souhaite résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t. \\ y(-1) = 0 \\ y'(-1) = 1 \end{cases} \tag{E}$$

1) Donner une base $\{y_1, y_2\}$ des solutions de l'équation homogène associée à (E).

2) On pose $y(t) := \lambda(t)y_1(t) + \mu(t)y_2(t)$. On considère la matrice $\Phi(t)$ appelée matrice fondamentale définie par :

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$$

et

$$C(t) := \begin{pmatrix} \lambda(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}$$

a) Écrire (E) sous la forme d'une équation du premier ordre $Y'(t) = AY(t) + B(t)$.

b) Posons $Y(t) := \Phi(t)C(t)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Y soit solution de $Y'(t) = AY(t) + B(t)$.

c) En déduire $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ puis l'expression de la solution du problème de Cauchy (E).