Feuille 4

Ressorts Amortis

Considérons le ressort de la figure suivante.

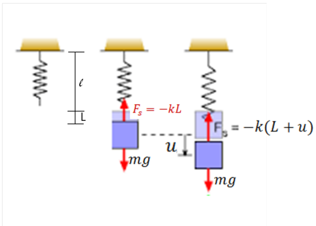

Figure 1 – Système de ressort pendu.

A gauche nous voyons le ressort sans poids de longeur l. Au milieu le poid m fait allonger le ressort de L. A droit le poids est en mouvement avec un déplacement de u. La loi du mouvement de Newton nous donne : $mu''(t) = f(t)$.

Les forces qui agissent sur le poids :
- La force du ressort (F_S)
- La force de la gravité mg
- La force de l'amortissement : $F_a(t) = -\gamma u'(t)$, $\gamma > 0$
- Une force extérieur $F_e(t)$

Nous considérons le déplacement vers le bas la direction positive. Si le système est en équilibre, $mg = kL$. L'équation différentielle representante ce système est donc :

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t) \tag{1}$$

Un Premier Exemple

Travaillons dans des unités étrangères :

Un poids de 4 livres rallonge un ressort de 2 pouces. Supposons que le poids est déplacé de 6 pouces vers le bas et relaché. Considérons que le milieu qui entour le poids exerce une resistance de 6 livres quand la vitesse est de 3 pieds/second.

Nous avons :
$m = \frac{poids}{g} = \frac{4lb}{32ft/sec^2} = \frac{1}{8}\frac{lb-sec^2}{ft} \quad \gamma = \frac{6lb}{3ft/sec} = 2\frac{lb-sec}{ft} \quad k = \frac{4lb}{1/6ft} = 24\frac{lb}{ft}$

(Remarquons que $g = 9.81\frac{m}{sec^2}$ en métrique)

1. Résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(t) + 16u' + 192u = 0 \\ u(0) = \frac{1}{2} \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Sans Amortissemment

Considérons d'abord un système sans amortissemment : $\gamma = 0$.
Notre équation différentielle est celle de l'oscillateur harmonique. Les solutions générales prennent donc la forme :

$$u = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t), \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

2. Ecrire la solution générale sous la forme $u = Rcos(\omega_0 t - \delta)$ et la plotter dans le plan $(\omega_0 t, u)$

3. Supposons qu'un poids de $5kg$ allonge un ressort de $0,1m$. Si le poids est dépacé de $0,1m$ de plus, et mis en motion avec une vitesse initiale vers le haut de $0,25\frac{m}{s}$, déterminer la position de la masse en fonction du temps. Déterminer la période, amplitude, et phase de a motion. La constante du ressort est $k = \frac{5kg}{0{,}1m}$ et la masse est $m = \frac{5kg}{9.81}\frac{kg-sec^2}{m}$. Nous avons donc :

$$\begin{cases} u'' + 192u = 0 \\ u(0) = 0,1 \\ u'(0) = 0,25 \end{cases}$$

4. Ecrire les équations suivantes sous la forme $u = Rcos(\omega_0 t - \delta)$.

a) $u = 3cos(2t) + 4sin(2t)$

b) $u = 4cos(3t) - 2sin(3t)$

5. Un poids de $2kg$ étire un ressort de $50cm$. Si le poids est déscendu encore $25cm$ et ensuite relaché, et s'il n'y a pas d'amortissemment, déterminer la position $u(t)$ du poids. Quand est-ce que le proids revient à sa position d'équilibre ?

6. Un poids de $w = 3kg$ étire un ressort de $L = 25cm$. Si le poids est poussé vers le haut, et le ressort de rétracte de $\frac{1}{12}m$ ($u_0 = -1/12$), et le poids est ensuite mis en mouvement avec une vitesse de $v_0 = 1/6\frac{m}{sec}$ vers le bas, s'il n'y pas d'amortissemment, trouver la position $u(t)$, solution de l'équation différentielle avec $k = w/L$, $\gamma = 0$, et $m = w/g$. Déterminer la période, la fréquence, et l'amplitude du mouvement.

Equations de Ressort Amorti

Si nous considérons un ressort amorti (cas plus réaliste en générale), nous avons :

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0 \tag{2}$$

avec équation caracteristique : $m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0$
Nous verrons 3 régimes :

- $\Delta < 0$: $\gamma^2/4km$ petit, régime pseudo-périodique
- $\Delta = 0$: $\gamma^2 = 4km$, régime apériodique critique
- $\Delta > 0$: $\gamma^2/4km$ trop grand, régime apériodique (trop d'amortissemment)

7. Considérons :

$$\begin{cases} u'' + 0.125u' + u = 0 \\ u(0) = 2 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Trouver $u(t)$, la quasi-période, la quasi-fréquence, le temps T_1 pour lequel u passe par l'équilbre ($u = 0$) pour la première fois, et le temps τ tel que $|u(t) < 0.1 \quad \forall \quad t > \tau$.

8. On a : $w = 20g$, $L = 5cm$, et le poids est attché à un amortisseur visceux d $\gamma = 400$. $u_0 = 2cm$ et $u_0' = 0$. Trouver $u(t)$ et la plotter. Trouver la quasi-période et quasi-fréquence. Trouver le temps τ tel que $|u(t) < 0.05 \quad \forall \quad t > \tau$.

9. Considérons $m = \gamma = 2$ et $k = 1/2$. Nous sommes dans quelle régime ? Résoudre l'équation pour :

- $u_0 = 1/2$ et $v_0 = 7/4$
- $u_0 = 1/2$ et $v_0 = -7/4$

et plotter les solutions dans leplan (t, u).

10. Supposons que nous sommes dans la régime apériodique critiue ou apériodique. Montrer que le poids peut passer par la position d'équilibre qu'une seule fois, peu importe les conditions initiales. (Indice : déterminer les valeurs de t pour lesquelles $u(t) = 0$.)

11. Supposons que le poids n'est pas suspendu, mais posé sur une surface horizontale. Il glisse sans firction. Le poids est attaché ùn ressort de constante k, et est sujet à la résistance visceuse de l'air de coefficient γ. Montrer que $u(t)$ satisfait l'équation (1).

Ressort Amorti avec Force Extérieur

Supposons notre équation gouvernante la suivante :

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 cos(\omega t) \tag{3}$$

12. Trouver $u(t)$ et plotter :

$$\begin{cases} u'' + 0.125u' + u = 3cos(\omega t) \\ u_0 = 2 \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

pour $\omega \in \{0.3, 1, 2\}$

13. Trouver $u(t)$ et plotter :

$$\begin{cases} u'' + u = 0.5cos(0.8t) \\ u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

Circuits LRC

Considérons un modèle d'un courant elétrique dans un circuit simple (voir image), où le courant (ampères) est une fonction du temps $I(t)$. La résistance R (ohm), la capacitance C (farad), et l'inductance L (henri) sont tous positifs et supposés connus. La tension électrique $E(t)$ (volt) est donnée en fonction du temps. La charge totale sur le capacitor est $Q(t)$ (coulombe) et est telle que $I(t) = \frac{dQ}{dt}$. Notons que 1volt = 1ohm ·1 ampère = 1coulomb/1farad = 1henri ·1 ampère/seconde.

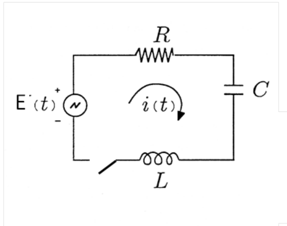

FIGURE 2 – Système de circuit LRC.

Kirchhoff's deuxième loi nous dit que : dans un circuit fermé la tension électrique imposée est égale à la somme des chutes de tension électrique dans le circuit.

— La chute de tension électrique à travers R est de IR
— La chute de tension électrique à travers C est de Q/C
— La chute de tension électrique à travers L est de $L\frac{dI}{dt}$

Nous avons donc l'équation différentielle suivante :

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \tag{4}$$

14. Un circuit a un capaciteur de $C = 0.25e^{-6}$ farad et un inducteur de $L = 1$ henri. Si la charge initiale du capaciteur est de $Q_0 = 10^{-6}$ coulomb, et il n'y a pas de courant initial ($Q'(0) = 0$), trouver la charge $Q(t)$.
Nous somme donc dans le cas de l'équation (4) où :

$$LQ'' + \frac{1}{C}Q = 0$$

15. On a : $C = 10^{-5}$ farad, $R = 3 \times 10^2$ ohms, et $I = 0.2$henri. $Q_0 = 10^{-6}$ coulomb et pas de courant initial $Q'(0) = 0$. Trouver $Q(t)$.

16. Si $C = 0.8 \times 10^{-6}$ farad et $L = 0.2$henri, trouver R telle que le système soit de régime apériodique critique.

17. Soients : $C = 0.25 \times 10^{-6}$ farad, $R = 5 \times 10^3$ ohms, et $I = 1$ henri. $Q_0 = 0$. Une battrie de $12V$ est connecté au circuit, et le circuit est fermé à $t = 0$, déterminer la charge sur le capicateur à $t = 0.0001s$, $t = 0.01s$, pour t quelconque. Et quand $t \to \infty$?