Feuille de TD n° 5

Rappelons l'équation de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} s' = s(A - Br) \\ r' = r(Cs - D) \end{cases} \tag{E}$$

où les constantes A, B, C et D sont strictement positives et les fonctions r et s décrivent l'évolution au cours du temps de la population de requins et de sardines respectivement.

On considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}_+^2$ par :

$$H(s, r) = Cs - D\ln(s) + Br - A\ln(r). \tag{1}$$

1) Montrer que si $t \in I \longmapsto (s(t), r(t))$ est solution de (E) alors $H(s(t), r(t))$ est constante comme fonction du temps t. En déduire que les solutions de (E) sont portées par les lignes de niveau de la fonction H.

On veut prouver que les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. On notera $(s(t_0), r(t_0)) = (s_0, r_0)$ où $t_0 \in I$.

2) a) Montrer que si $s_0 > 0$ et $r_0 = 0$ alors (E) admet une unique solution à calculer définie sur $\mathbb{R}$.
b) Même question si $s_0 = 0$ et $r_0 > 0$, et si $s_0 = r_0 = 0$.
c) Supposons que $s_0 > 0$ et $r_0 > 0$, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de Cauchy-Lipschitz, prouver que $s(t) > 0$ (le même raisonnement est analogue pour $r(t)$).

On admettra le résultat suivant : Soit $y :]c, d[\to \mathbb{R}^n$ l'unique solution de l'équation $y' = f(t, y)$ où $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est supposée lipschitzienne par rapport à y. Si $d < b$ alors $\lim_{t \to d} ||y(t)|| + \infty$.

3) Il reste à étudier le cas $s_0 > 0$ et $r_0 > 0$. On considère la fonction $G_{a,b}(u) := au - b\ln(u)$. Montrer que cette fonction est minorée sur $]0, +\infty[$. En déduire en utilisant la première question que la fonction s est bornée (le même raisonnement s'applique pour r) puis conclure que $I = \mathbb{R}$.

Pour terminer, on veut prouver que les solutions de (E) sont périodiques, pour cela, on se propose de démontrer le résultat suivant : on considère l'équation $y' = f(y)$ où f est lipschitzienne par rapport à y, on suppose que la trajectoire $\Omega := \{y(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est compacte, alors y est périodique.

4) On suppose qu'on a deux solutions maximales ($i.e$ définies sur leur domaine de définition maximal, donc non prolongeables) y_1 et y_2 (pour des conditions initiales différentes) définies respectivement sur $]a, b[$ et $]c, d[$ tel qu'il existe $(t_1, t_2) \in]a, b[\times]c, d[$ tel que $y_1(t_1) = y_2(t_2)$.
a) En considérant la fonction $z(t) := y_1(t - t_2 + t_1)$, montrer que $z = y_2$ puis en déduire que les trajectoires de y_1 et y_2 sont les mêmes.
b) Soit y solution maximale de $y' = f(y)$ définie sur un intervalle $]a, b[$, on suppose qu'il existe $t_2 > t_1$ tel que $y(t_1) = y(t_2)$. En utilisant la question précédente, montrer que $]a, b[= \mathbb{R}$ et que y est périodique.

5) a) En supposant que Ω est réduit à un point, prouver que y est périodique.
b) Si Ω n'est pas réduit à un point, montrer que la trajectoire ne peut pas contenir de points stationnaires et que y est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
c) Prouver que y ne peut être injective (indication : penser au théorème d'inversion globale), puis en déduire en utilisant la question 4 que y est périodique.
d) En déduire que les solutions de (E) sont périodiques.

6) Tracer le portrait de phase.