Feuille 5

On rappelle l'équation de Lodka-Volterra

$$(E) \qquad \begin{cases} s' = s(A - Br) \\ r' = r(Cs - D) \end{cases}$$

où les constantes A, B, C et D sont strictement positives et $r : t \mapsto r(t)$ et $s : t \mapsto s(t)$ sont les fonction inconnues qui décrivent l'évolution au cours du temps de la population de requins et de sardines respectivement.

1. Montrer que la fonction $H : (s, r) = Cs - D \log s + Br - A \log r$ est strictement convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et tend vers l'infini lorsque s ou r tend vers 0 ou $+\infty$. En déduire que les lignes de niveau de H sont les courbes fermées de longueur finie, bordant des convexes bornés de $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

2. Montrer que si $t \in I \mapsto (s(t), r(t))$ est une solution de (E), alors $H(s(t), r(t))$ est constante comme fonction de t. En déduire que les solutions de (E) sont périodiques (1ere loi de Volterra) et portées par les lignes de niveau de H.

3. Soit (s, r) une solution T-périodique de l'équation différentielle (E). Calculer la moyenne au cours d'une période du nombre de requins

$$\langle r \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T r(t) \mathrm{d}t.$$

Indication : utiliser la première équation de (E) pour exprimer r en fonction de s' et s et utiliser le fait que si F est continue, $\int_0^T s'(t)F(s(t))\mathrm{d}t = 0$ (pourquoi ?).

De même, calculer le nombre moyen de sardines. En déduire la 2e loi de Volterra, disant que ce nombre moyen ne dépend que de A, B, C, D et pas des conditions initiales.

4. On ajoute maintenant de la *friction sociale* : s'il y a trop de sardines, cela est néfaste à leur développement (idem pour les requins). Le système devient

$$\begin{cases} s' = s(A - Br - \lambda s) \\ r' = r(Cs - D - \mu r) \end{cases}$$

Trouver les nouveaux points d'équilibre. Soit (s^*, r^*) le point d' équilibre autre que $(0, 0)$. Décrire le diagramme de phase. On distinguera le cas où (s^*, r^*) est dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ ou pas.