Université Pierre et Marie Curie
Licence - Mathématiques - 3LM246

Année 2018–2019
Processus et simulations

Série d'exercices N°1
Simulation de variables aléatoires

1. Méthode d'inversion. 1. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F et soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > y\}\,.$$

Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$ la v.a. $F^{-1}(U)$ a même loi que X.
2. On suppose de plus que F est continue. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$.

2. La méthode du rejet. Soit X une v.a. dont la densité f est continue et à support compact inclus dans l'intervalle $[a,b]$. Soit k un réel tel que $k \geq \sup_x f(x)$. On considère une v.a. $P = (U,V)$ uniformément distribuée dans le rectangle $[a,b] \times [0,k]$. On désigne par A la partie du plan située entre l'axe des abscisses et le graphe de f.

On cherche à simuler la loi de X. Pour ceci, on effectue des tirages successifs $P_1 = (U_1,V_1), \ldots, P_n = (U_n,V_n), \ldots$ selon la loi de P et l'on définit la v.a. X de la manière suivante : si le point $P_i = (U_i,V_i)$ se trouve dans A, alors on pose $Y = U_i$, sinon on tire à nouveau selon la loi de P et indépendamment des tirages précédants.
1. Soit N le nombre de tirages nécessaires pour atteindre A. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$P(N=n) = \frac{\text{aire}(A)}{k(b-a)} \left(\frac{k(b-a) - \text{aire}(A)}{k(b-a)}\right)^{n-1}.$$

En déduire que par ce procédé, on atteint l'ensemble A au bout un nombre de tirages presque sûrement fini.
2. Soit Y définie ainsi :

$$\begin{array}{rcll} Y &=& U_1 & \text{sur l'événement} \quad \{P_1 \in A\} \\ Y &=& U_2 & \text{sur l'événement} \quad \{P_1 \notin A,\, P_2 \in A\} \\ & & \ldots & \\ Y &=& U_n & \text{sur l'événement} \quad \{P_1 \notin A, \ldots, P_{n-1} \notin A,\, P_n \in A\} \\ & & \ldots & \end{array}$$

Vérifier que ceci définit bien une v.a..
3. Montrer que Y a même loi que X.

2A. Simulation de v.a. indépendantes de loi uniforme sur une boule de rayon unité et sur une sphère de rayon unité dans $\mathbf{R}^\mathbf{d}$. Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$. Donner la loi de $2U-1$.

Soient $U_1, \ldots, U_d$ des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Donner la loi du vecteur $\vec{V} = (2U_1 - 1, \ldots, 2U_d - 1)$.

Soit $U_1, U_2, \ldots$ une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose les vecteurs $V_k = (2U_{(k-1)d+1} - 1, \ldots, 2U_{kd} - 1)$ pour $k = 1, 2, \ldots$.

Soit $B(0,1) = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^\mathbf{d} : \|x\| \leq 1\}$. On pose $\nu = \min\{k > 0 : \vec{V}_k \in B(0,1)\}$. Donner la loi du vecteur aléatoire V_ν.

Donner le temps moyen de simulation d'une v.a. de loi uniforme sur $B(0,1)$.

Comment simuler une suite de vecteurs aléaoires indépendants de loi uniforme sur $B(0,1)$?

Comment simuler une suite de vecteurs aléatoires indépendants de loi uniforme sur $S(0,1) = \{\vec{x} \in \mathbf{R^d} : \|x\| = 1\}$?

3. Simulation de la loi de Cauchy par la méthode d'inversion. On appelle loi de Cauchy la loi de densité

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

sur $\mathbb{R}$. On considère une v.a. U de loi uniforme sur $]0,1[$. Donner une fonction f telle que $f(U)$ a une loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$, puis une fonction g (donné de façon explicite) telle que $g(U)$ suit la loi de Cauchy. Donner, pour V v.a. de loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$, la loi de $\tan(V)$.

4. Simulation de la loi de Cauchy à partir de deux v.a. de loi gaussienne indépendantes. Soit X, Y deux v.a. indépendantes de loi gaussienne centrées de variance 1. Montrer que la v.a. $Z = X/Y$ est définie presque sûrement et donner sa loi.

5. Simulation de v.a. discrètes. Soit X une v.a. de loi discrète $p_0\delta_0 + p_1\delta_1 + \cdots + p_n\delta_n$, où $(p_i)_{1\leq i\leq n}$ est une probabilité sur l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$. On veut simuler X à partir d'une v.a. U de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la v.a.

$$Y = x_0 \mathbb{1}_{\{U<p_0\}} + x_1 \mathbb{1}_{\{p_0\leq U<p_0+p_1\}} + \cdots + x_n \mathbb{1}_{\{p_0+\cdots+p_{n-1}\leq U\leq 1\}}$$

a même loi que X.

6. Simulation d'une v.a. de loi continue. Soit $a, b > 0$ et F la fonction nulle sur $\mathbb{R}^-$ et donnée par la formule $F(x) = 1 - \exp(-ax^b)$. Soit X une v.a. de fonction de répartition F. Donner sa densité f et proposer une méthode simulation de X.

7. Simulation de v.a. de loi géomètrique. On rappelle que pour tout $p \in]0,1[$, la loi géométrique de paramètre p est la loi

$$\sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1}\delta_k.$$

Proposer deux méthodes de simulation de cette loi, l'une à partir d'une v.a. U de loi uniforme sur $[0,1]$, l'autre à partir d'une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de v.a. indépendantes de loi $p\delta_1 + (1-p)\delta_0$.

8. Simulation de v.a. de loi binomiale à partir de variables aléatoires uniformes indépendantes. Soit X une v.a. de loi binomiale de paramètres N et p : $P(X = n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}$, $n = 0, 1, \ldots, N$. On veut simuler la loi de X à partir de N v.a. indépendantes $U_1, \ldots, U_N$ de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la v.a. Y égale au nombre de U_i qui sont inférieurs à p suit la même loi que X.

9. Simulation de la loi exponentielle par la méthode d'inversion. Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$, montrer que l'on peut simuler la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ en posant $X = -1/(\lambda \log U)$.

10. Simulation de v.a. de loi de Poisson à partir de variables aléatoires de loi exponentielle indépendantes. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la v.a.

$$Y = \mathbb{1}_{\{X_1\leq 1<X_1+X_2\}} + 2\mathbb{1}_{\{X_1+X_2\leq 1<X_1+X_2+X_3\}} + \cdots + n\mathbb{1}_{\{X_1+\cdots+X_n\leq 1<X_1+\cdots+X_{n+1}\}} + \cdots$$

suit une loi de Poisson de paramètre λ : $P(Y = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $n \geq 0$.

11. Simulation de deux v.a. gaussiennes indépendantes à partir de deux variables aléatoires de loi uniforme indépendantes. Soit T une v.a. exponentielle d'espérance 1, et Θ

une v.a. uniformément distribuée à valeurs dans $[0, 2\pi[$. On suppose T et Θ indépendantes. On définit :

$$X = \sqrt{2T}\cos(\Theta) \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{2T}\sin(\Theta)\,.$$

1. Définissons les ouverts U et V de $\mathbb{R}^2$ par $U = \mathbb{R}^{+*} \times]0, 2\pi[$ et $V = \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$. En considérant l'application $f : U \to V$ définie par

$$f(t, \theta) = (\sqrt{2t}\cos\theta, \sqrt{2t}\sin\theta),$$

montrer que pour toute fonction mesurable positive g sur $\mathbb{R}^2$,

$$\int_{t=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} g(\sqrt{2t}\cos\theta, \sqrt{2t}\sin\theta)d\theta dt = \int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x, y)dxdy.$$

2. Montrer que X et Y ont même loi et sont indépendantes. Quelle est cette loi commune ?

3. Soient U_1 et U_2 des v.a. indépendantes de loi uniforme sur [0,1]. Quelle est la loi du couple de v.a.

$$((-2\log U_1)^{1/2}\cos(2\pi U_2), (-2\log U_1)^{1/2}\sin(2\pi U_2))\,?$$