

TP 6 : Chaînes de Markov

Dans ce TP, on aura besoin de manipuler des matrices. Il sera donc pratique d'utiliser la class `matrix` de la bibliothèque `numpy` :

```
from numpy import matrix
```

Une matrice peut être définie par

```
A = matrix("1 0 0 ; 0 1 0 ; 0 0 1")
```

(les lignes sont séparées par des points-virgules ; les coefficients d'une même ligne sont séparés par des virgules ou des espaces). Une autre possibilité est

```
A = matrix([[0.0]*n]*m)
```

(`[0.0]*n` est une liste contenant `n` fois la valeur `0.0`, et `[[0.0]*n]*m` est une liste contenant `m` fois la liste `[0.0]*n`, interprétée comme la liste des lignes de la matrice ; on obtient donc la matrice nulle de taille  $m \times n$ ).

On peut alors utiliser une syntaxe intuitive pour manipuler ces matrices (`3*A`, `A+A`, `A*A`, `A[0,2]=3`, `A**10`, etc.).

*Attention* : une matrice de taille  $N$  a ses coefficients indexés de  $0$  à  $N - 1$ .

## 1 Simulation d'une trajectoire

1. Écrire une fonction `markov` prenant deux arguments `i` et `P` correspondant respectivement à la position actuelle d'une chaîne de Markov et à sa matrice de transition, et qui renvoie la position suivante de la chaîne.

Autrement dit, `markov(i,P)` renvoie une réalisation de la loi discrète

$$(P[i,0], P[i,1], \dots, P[i,N-1]).$$

2. Tracer une trajectoire de 100 pas d'une chaîne de Markov de matrice de transition

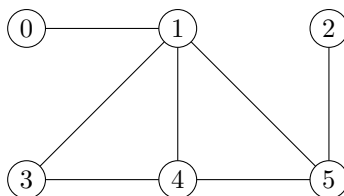
$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Le *modèle d'Ehrenfest* est défini comme suit : on dispose de deux compartiments  $A$  et  $B$  dans lesquels sont réparties  $N$  particules indiscernables. À chaque instant entier, on choisit une particule uniformément parmi les  $N$ , et on fait passer cette particule d'un compartiment à l'autre. On note  $X_n$  le nombre de particules qui se trouvent dans le compartiment  $A$  au temps  $n$ .

- (a) Quelle est la matrice de transition de la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?
- (b) Tracer une trajectoire de 1000 pas du modèle d'Ehrenfest avec  $N = 100$ , partant d'un compartiment  $A$  initialement vide.

## 2 Théorème ergodique et temps de retour

On considère la marche aléatoire aux plus proches voisins sur le graphe suivant :



4. Écrire la matrice de transition associée à cette marche aléatoire.

5. Simuler une trajectoire de 1400 pas issue d'un point quelconque du graphe, et faire l'histogramme de tous les sites visités.
6. Quelle est la loi invariante  $\mu$  de la chaîne ? On pourra s'intéresser au nombre d'arêtes issues de chaque sommet. Comparer avec l'histogramme obtenu.
7. Pour chaque sommet  $i$  du graphe, simuler 1000 trajectoires issues de  $i$  jusqu'à leur temps de retour en  $i$ . Estimer ainsi le temps moyen de retour, et comparer avec la moyenne théorique (donnée par les inverse des poids de chaque sommet sous la mesure invariante).

### 3 Convergence en loi

On considère les deux matrices de transition

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

8. Calculer les matrices  $P_1^{100}$  et  $P_1^{101}$ , ainsi que les matrices  $P_2^{100}$  et  $P_2^{101}$ . Qu'observe-t-on ? D'où vient la différence ?