**Sorbonne Université** **3M246 : Processus et simulation**

**Contrôle TP**
**4 mai 2018**

- Les téléphones, calculatrices et assimilés sont interdits.
- L'utilisation d'internet est interdite durant l'examen.

**Exercice 1.** Soit $X$ une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

1. En utilisant la méthode d'inversion, écrire une fonction `simuX` permettant de générer une réalisation de $X$.
2. Stocker $k = 10000$ réalisations indépendantes de $X$ dans un vecteur `v`, puis tracer l'histogramme associé à `v`, auquel on superposera la densité $f$.

**Exercice 2.** On souhaite simuler une variable $X$ dont la densité est donnée par

$$f(x) = \tfrac{3}{4}(1 - x^2)\mathbf{1}_{[-1,1]}.$$

1. Grâce à la méthode du rejet, écrire une fonction qui simule un couple $(X, Y)$ dont la loi est uniforme sur l'ensemble $G = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1], y < 1 - x^2\}$ et qui renvoie la valeur de $X$.
2. Vérifier que la fonction précédente renvoie des simulations d'une variable aléatoire de densité $f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)\mathbf{1}_{[-1,1]}$ en comparant un histogramme des valeurs obtenues avec le tracé de $f$.

**Exercice 3.** On définit

$$I = \int_{\mathbb{R}} 3\sqrt{|x|}e^{-3|x-2|}dx$$

1. Montrer que
$$I = \int_0^{+\infty} 3\sqrt{x+2}e^{-3x}dx + \int_0^{+\infty} 3\sqrt{|2-x|}e^{-3x}dx$$
2. Écrire une fonction $I(N)$ qui approxime $I$ grâce à la méthode de Monte-Carlo en utilisant $N$ variables i.i.d de loi exponentielle de paramètre 3.

   Pour simuler une variable aléatoire $X$ de loi exponentielle de paramètre $\lambda$, on peut utiliser que si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ alors $X = -\frac{1}{\lambda}\ln U$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
3. Estimer la variance $\sigma^2$ de votre estimateur de $I$ (i.e. $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i)$ où $f$ a été obtenue lors de la question précédente), en utilisant $N = 10000$ variables i.i.d de loi exponentielle.
4. En utilisant le résultat précédent, donner un intervallle de confiance à 95% pour la valeur approximée de $I$ avec un échantillon de taille $N = 10000$.

   On rappelle que l'intervalle de confiance à 95% est donné par
$$\left[I(N) - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, I(N) + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]$$

**Exercice 4.**

1. Écrire une fonction `binom(N,p)` prenant en argument un entier `N` et un paramètre `p`$\in [0,1]$, et qui renvoie la réalisation d'une loi binomiale de paramètres `N`,`p`.
2. On considère le modèle de Wright-Fisher : une population de taille constante `N`$= 100$ possède des individus de type A ou de type B. On suit l'évolution du nombre d'individus de type A au fil des générations : on note $X_n$ le nombre d'individus de type A de la $n^{\text{ème}}$ génération, et on suppose que $X_n$ est une chaîne de Markov, dont la matrice de transition est donnée par

$$P(X_{n+1} = k \mid X_n = i) = \binom{\mathtt{N}}{k} \left(\frac{i}{\mathtt{N}}\right)^k \left(1 - \frac{i}{\mathtt{N}}\right)^{\mathtt{N}-k}.$$

   (Cela correspond à ce que les individus de la génération $n+1$ choisissent leur parent de manière aléatoire parmi les individus de la génération $n$, et héritent du type du parent choisi.) Écrire une fonction `WrightFisher(k,i)`, qui prend en argument un entier `k` et un entier $i \in \{0, \ldots, 100\}$, et qui renvoie le vecteur $[X_0 = i, \ldots, X_{\mathtt{k}}]$, i.e. une trajectoire de `k` pas de $(X_n)_n$, partant de $X_0 = i$.
3. Tracer 4 trajectoires de `k`=100 pas de la chaîne, partant de $X_0 = 50$.
   Tracer 4 trajectoires de `k`=500 pas de la chaîne, partant de $X_0 = 50$.