

Examen 3M246, Première Session

- (1) **Partie I : CM.** On considère une Chaîne de Markov de matrice de transition :

$$\begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/7 & 2/7 & 3/7 & 1/7 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Identifier les classes d'états qui communiquent, indiquer lesquelles sont fermées.

- (2) Donner une ou plusieurs définitions équivalentes d'un état transient. Quels sont les états transients de cette chaîne de Markov ?
- (3) Soit pour un état i : $V_i = \sum_{n=0}^{\infty} 1_i(X_n)$, $T^i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$.
Donner les probabilités suivantes et argumentez votre réponse : $P(T^2 = \infty \mid X_0 = 2)$,
 $P(T^2 < \infty \mid X_0 = 7)$, $P(V_2 < \infty \mid X_0 = 2)$, $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 6)$.
- (4) Calculer $P(T^6 < \infty \mid X_0 = 4)$, $P(T^6 < \infty \mid X_0 = 5)$.
- (5) Dédurre $P(T^2 < \infty \mid X_0 = 4)$, $P(T^2 < \infty \mid X_0 = 5)$. Argumentez votre réponse.
- (6) Calculer la famille de mesures de probabilités invariantes de cette chaîne de Markov.
- (7) Donner $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 6 \mid X_i)$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Argumentez votre réponse.
- (8) Donner $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i \mid X_4)$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Argumentez votre réponse.
- (9) On pose la mesure initiale $\mu = (1/2, 0, 1/2, 0, 0, 0, 0)$. Donner $P(X_3 = 3)$ sous cette mesure initiale.
On prend la mesure $\nu = (18/44, 1/11, 15/44, 0, 0, 3/44, 1/11)$. Donner $P(X_3 = 3)$ sous cette mesure initiale.
- (10) Donner $E(T^i \mid X_0 = i)$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

- (11) **Partie (II) : Simulations de v.a.**

On observe la réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$: 0.3, 0.12, 0.67, 0.666, 0.5. Simuler une valeur d'une variable aléatoire de loi Binomiale de paramètres $(5, 2/3)$.

- (12) **Les questions 12-16 sont liées.** On considère une variable aléatoire X à densité $C \exp(-3|x|)$ sur \mathbf{R} . (Il y a bien une valeur absolue dans l'exposant!)
Donner la constante C .
- (13) Calculer la fonction de répartition $F_X(x)$. (Attention à calculer séparément les valeurs pour $x < 0$ et $x \geq 0$!). Dessiner (approximativement) $F_X(x)$.
- (14) Proposer et expliciter une méthode pour simuler une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X .
- (15) Quelle est la loi de la variable aléatoire $|X|$? (Cette loi est bien connue!) Argumentez votre réponse.
- (16) On simule une suite de v.a. X_1, X_2, X_3, \dots indépendantes de même loi que X et on obtient des valeurs $-0.7, 0.4, 0.8, -0.6, 0.1, \dots$
Simuler une valeur de la loi de Poisson de paramètre 1.
Simuler une valeur de la loi de Poisson de paramètre 6.
(*Suggestion : appuyez-vous sur le résultat de la question (15)*).
- (17) **Partie III : Statistiques. Les questions 17-20 sont liées.** On considère Z une variable aléatoire de loi symétrique et de fonction de répartition $F_Z(x)$. Exprimer $P(|Z| < x)$ en terme de $F_Z(x)$.
On suppose que $F_Z(x)$ est continue et strictement croissante sur \mathbf{R} , tel que F_Z^{-1} existe sur $]0, 1[$.
Pour $A \in]0, 1[$ on cherche x tel que $P(|Z| < x) = A$. Exprimer x en terme de la valeur de $F_Z^{-1}(\cdot)$ prise dans un point sur $]0, 1[$ qui dépend de A .
- (18) On considère une suite de variables aléatoires X_1, X_2, X_3, \dots à valeurs dans $[-100, 100]$ indépendantes, de même loi, dont l'espérance est 0 (attention à cette hypothèse) et le second moment est fini.
Formuler le Théorème de la Limite Centrale.
Donner la limite en loi (si existe!) de la suite $n^\alpha(X_1 + \dots + X_n)$ quand $n \rightarrow \infty$ en fonction de paramètre $\alpha \in \mathbf{R}$.
- (19) Construire un intervalle de confiance asymptotique pour la variance de X_1, X_2, \dots de niveau de fiabilité 96% à partir du Théorème de la Limite Centrale. (Voici quelques valeurs de la fonction de répartition $\Phi(x)$ de la loi Gaussienne centrée réduite, dont on utilisera une seule : $\Phi(1.76) = 0.96, \Phi(1.89) = 0.97, \Phi(2.06) = 0.98$)
- (20) On considère les variables aléatoires $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2$. La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle? Si oui, dans quel sens? Quelle est sa limite? Comment pourrait-t-elle être utile en Statistiques?

Correction de l'examen 3M246, Première Session

- (1) Les classes d'états qui communiquent fermées : $\{1, 3\}$, $\{2, 6, 7\}$; la classe non fermée $\{4, 5\}$.
- (2) Dans les notations de la Q3 : i est transient ssi $P(V_i < \infty | X_0 = i) = 1$; i est transient ssi $P(T^i < \infty | X_0 = i) < 1$; i est transient ssi $\sum_{n \geq 1} p_{ii}^{(n)}$ converge.
Les états transients de cette chaîne de Markov sont 4 et 5.
- (3) Les états 2, 6, 7 forment une classe récurrente, donc : $P(T^2 = \infty | X_0 = 2) = 0$, $P(T^2 < \infty | X_0 = 7) = 1$, $P(V_2 < \infty | X_0 = 2) = 0$, $P(V_2 = \infty | X_0 = 6) = 1$.
- (4) On pose $h_4^6 = P(T^6 < \infty | X_0 = 4)$, $h_5^6 = P(T^6 < \infty | X_0 = 5)$.
On a $h_4^6 = (1/7) + (3/7)h_4^6 + (1/7)h_5^6$, $h_5^6 = (1/6)h_4^6 + 1/6 + 1/3$, on déduit $h_4^6 = 9/23$, $h_5^6 = 13/23$.
- (5) $P(T^2 < \infty | X_0 = 4) = 1 - 9/23$, $P(T^2 < \infty | X_0 = 5) = 1 - 13/23$. Comme $\{4, 5\}$ est une classe finie transiente, ces états sont visités un nombre fini de fois et la CM aboutit à une des deux classes récurrentes où elle visite chaque état.
- (6) L'unique mesure de proba invariante pour la classe $\{2, 6, 7\}$ est $(4/11, 3/11, 4/11)$, pour la classe $\{1, 3\}$: $(6/11, 5/11)$.
Donc la famille $(c_1 6/11, c_2 4/11, c_1 5/11, 0, 0, c_2 3/11, c_2 4/11)$, $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 = 1$.
- (7) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 6 | X_i) = 3/11$ pour $i = 2, 6, 7$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 6 | X_4) = 3/11 \times 9/23$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 6 | X_5) = 3/11 \times 13/23$
La classe $\{2, 6, 7\}$ est fermée, apériodique car $p_{2,2} > 0$, on utilise le Thm de convergence vers la mesure invariante. Sinon $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 6 | X_i) = 0$ pour $i = 1, 3$.
- (8) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1 | X_4) = 6/11 \times (1 - 9/23)$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i | X_4) = 4/11 \times 9/23$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i | X_4) = 5/11 \times (1 - 9/23)$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i | X_4) = 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i | X_4) = 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i | X_4) = 3/11 \times 9/23$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i | X_4) = 4/11 \times 9/23$
On utilise le Thm de convergence vers la mesure invariante pour les classes apériodiques $\{2, 6, 7\}$ et $\{1, 3\}$ et le fait que 4, 5 sont transients.
- (9) On pose la mesure initiale $\mu = (1/2, 0, 1/2, 0, 0, 0, 0)$. Rien à faire, il faut calculer : $P(X_3 = 3) = (\mu P^3)_3$ Heureusement que les calculs se restreignent à la matrice 2×2 qui correspond à la classe $\{1, 3\}$. On obtient $185/432$.

Si $\nu = (18/44, 1/11, 15/44, 0, 0, 3/44, 1/11)$ la mesure initiale, on a tout de suite $P(X_3 = 3) = \nu_3 = 15/44$ car ν est une des mesures invariantes.
- (10) Donner $E(T^i | X_0 = i)$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Ce sont $11/6, 11/4, 11/5, \infty, \infty, 11/3, 11/4$ respectivement.
- (11) **Partie (II) : Simulations de v.a.**
On a la réalisation d'une suite de v.a. indép. de loi uniforme sur $[0, 1]$: 0.3, 0.12, 0.67, 0.666, 0.5.
 $S_n = \sum_{i=1}^n 1_{[0, 2/3]}(U_i) = 4$.

(12) $C = \left(\int_{\mathbf{R}} \exp(-3|x|) dx \right)^{-1} = (2/3)^{-1} = 3/2.$

(13) Pour $x < 0 : F_X(x) = (1/2) \exp(3x)$, pour $x \geq 0 : F_X(x) = 1 - (1/2) \exp(-3x).$

(14) On simule $U_1, U_2..$ indép. de loi uniforme sur $[0, 1]$, on calcule $F_X^{-1}(U_1), F_X^{-1}(U_2), \dots$. On a ici $F_X^{-1}(U) = ((1/3) \ln(2U)) 1_{]0, 1/2[}(U) + ((-1/3) \ln(2(1-U))) 1_{]1/2, 1[}(U).$

(15) C'est la loi exponentielle de paramètre 3. Pour argumenter, on peut utiliser la méthode de la fonction muette. On pourrait aussi remarque que pour tout $I =]a, b[\in \mathbf{R}_+$

$$\begin{aligned} P(|X| \in I) &= P(X \in I) + P(X \in -I) = 3/2 \int_a^b \exp(-3x) + (3/2) \int_{-b}^{-a} \exp(3x) dx \\ &= 3/2 \int_a^b \exp(-3x) dx + (3/2) \int_b^a \exp(-3t)(-dt) = 3 \int_a^b \exp(-3x) dx. \end{aligned}$$

(16) On simule une suite de v.a. X_1, X_2, X_3, \dots indép. de même loi que X et on obtient des valeurs $-0.7, 0.4, 0.8, -0.6, 0.1, \dots$

Par la Q15 les valeurs de v.a. de loi exp. indépendantes de paramètre 3 sont $|X_1|, |X_2|, \dots$ donc $0.7, 0.4, 0.8, 0.6, 0.1..$

Alors $\max\{n \geq 1 : |X_1| + \dots + |X_n| \leq t\}$ est de loi de Poisson de paramètre $3t.$

Pour la loi de Poisson de paramètre 1, on prend $t = 1/3$, comme $|X_1| = 0.7 > 1/3$, la v.a. de loi Poisson vaut 0.

Pour la loi de Poisson de paramètre 6, on prend $t = 2$, comme $|X_1| + |X_2| + |X_3| < 2$ et $|X_1| + |X_2| + |X_3| + |X_4| > 2$, la v.a. de loi de Poisson vaut 3.

(17) $P(|Z| < x) = F_Z(x) - F_Z(-x) = F_Z(x) - (1 - F_Z(x)) = 2F_Z(x) - 1.$
Si $2F_Z(x) - 1 = A$ alors $x = F_Z^{-1}(A/2 + 1/2).$

(18) Pour le Thm de la Limite Centrale – voir le cours.

Par ce Thm : pour $\alpha = -1/2$ cette suite converge en loi vers la loi normale de paramètres $(0, \sigma^2).$

Donc pour $\alpha < -1/2$ cette suite converge en loi vers 0.

Pour $\alpha > -1/2$ on peut juste dire que pour tout $C > 0$ arbitrairement grand $P(|n^\alpha(X_1 + \dots + X_n)| > C) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty.$

(19) Par le Théorème de la Limite Centrale et Q17.

$$P\left(\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n\sigma^2}} \right| < \Phi^{-1}(1/2 + 0.96/2)\right) \sim 0.96.$$

On a $\Phi^{-1}(1/2 + 0.96/2) = 2.06.$

Donc l'intervalle $\sigma^2 \in \left[\frac{(X_1 + \dots + X_n)^2}{n(2.06)^2}, \infty \right[.$

(20) La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge p.s. vers $EX_1^2 - (EX_1)^2 = Var X_1$ par la loi de Grands Nombres. On pourrait l'utiliser pour avoir la valeur approchée de la variance.