Examen LM346 "Processus et simulations", 2ème session 2016–17, sans document, ni calculatrice.

(1) **Partie 1.** Une variable aléatoire X est de densité $f(x) = C\frac{1}{x}1_{\{1\leq x\leq 2\}}$. Donner la constante C, donner la fonction de répartition de X.

(2) En vous appuyant sur la réponse à la question (1), proposer une méthode de simulation de la loi de X.

(3) On souhaite maintenant calculer la valeur appochée de $\int_1^2 \frac{\exp(\sin x+\cos x)}{x}dx$. Pouvez-vous proposer une méthode probabiliste pour le faire *basée sur la simulation de la question (2)* ?

Enoncer le théorème surlequel la méthode est fondée.

(4) **Partie 2** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\{1, 2, -1, -2\}$ avec probabilités p_1, p_2, p_{-1}, p_{-2} respectivement, $p_1 + p_2 + p_{-1} + p_{-2} = 1$. Comment simuler cette suite de variables aléatoires ?

(5) Soient $R_i^n = \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k=i\}}$ pour $i = -2, -1, 1, 2$. Quelle est la loi de la variable aléatoire R_1^n ? Donner $\mathbf{P}(R_1^n = 1)$.

(6) Soit $S_n = \sum_{i=-2,-1,1,2} \frac{(R_i^n-np_i)^2}{np_i}$. La suite $(S_n)_{n\geq 0}$, converge-t-elle ? Si oui, dans quel sens ? Si oui, donner <u>la définition</u> et ensuite le nom de la loi limite.

(7) On a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n \leq 25) = C \int_{D\subset\mathbf{R^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right)dxdydz.$$

Donner le domaine D dans $\mathbf{R}^3$ et la constante C.

(8) Donner $\lim_{n\to\infty} E\exp(-S_n)$ (ceci ne demande pas beaucoup de calcul si vous comprenez la notion de la convergence en loi).

(9) Une population doit élire un des 4 candidats A, B, C, D au suffrage universel pour un poste important. On veut tester l'hypothèse que A aura 10% de voix, B et C auront 20% de voix chacun, et D aura 50% de voix. On fait un sondage de 10000 personnes : 1100 personnes se prononcent pour A, 1800 personnes se prononcent pour B, 2300 personnes pour C et 4800 pour D.

Pour tester cette hypothèse avec le niveau de fiabilité 0.95, notons $\chi_{\alpha,r}$ la quantile d'une v.a. $\chi^2(r)$ de la loi χ deux avec r degrés de liberté (c'est-à-dire $\mathbf{P}(\chi^2(r) > \chi_{\alpha,r}) = \alpha$). Vous allez utiliser dans votre test un des nombres suivants : $\chi_{0.005,3} = 12,84$, $\chi_{0.05,3} = 7,81$, $\chi_{0.05,4} = 9,84$, $\chi_{0.005,5} = 16,75$). Préciser lequel et décrire le test.

Si vous n'avez pas de calculatrice : écrivez quelles quantités vous allez comparer et expliquez si vous allez accepter ou rejeter l'hypothèse en fonction du résultat de la comparaison.

TOURNER LA PAGE SVP

(10) On considère une chaine de Markov de matrice de transition suivante

$$\begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Trouver toutes les classes d'états qui communiquent, préciser si elles sont fermées ou non fermées.

(11) On note $V_i(k) = \sum_{n=0}^{k} 1_{\{i\}}(X_n)$ le nombre de visites dans létat i pendant l'intervalle du temps $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$.

Supposons que la mesure initiale est $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Qu pouvez vous dire de la loi limite de la suite de variables aléatoires $V_2(k)$ quand $k \to \infty$ sous cette mesure ? Même question sur la loi limite de la suite de variables aléatoires $V_3(k)$ quand $k \to \infty$?

(12) On note $T^A = \inf\{n > 0 : X_n \in A\}$ le premier instant positif lorsque la CM se retrouve dans A, on note $h_i^A = P(T^A < \infty \mid X_0 = i)$ la probabilité d'atteindre l'ensemble A à partir de l'état i. Calculer $h_1^{\{2,3,6\}}$, $h_4^{\{2,3,6\}}$, $h_1^{\{5,7\}}$, $h_4^{\{5,7\}}$.

(13) Calculer l'ensemble des mesures invariantes de cette chaine de Markov.

(14) Donner $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i \mid X_0 = 1)$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et argumentez votre réponse.

(15) On suppose maintenant que la loi initiale est $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

On souhaite normaliser la suite $(V_2(k))_{k\geq 1}$ par un facteur k^α, comme $k^\alpha(V_2(k))$, avec un paramètre $\alpha \in \mathbf{R}$ pour que la loi limite $\lim_{k\to\infty} k^\alpha V_2(k)$ quand $k \to \infty$ soit non-triviale, c'est-à-dire qu'elle prenne des valeurs strictement(!) positives et finies avec probabilité positive.

Donner le paramètre α appropriée et donner la loi limite.

Préciser le sens de la convergence.

(16) On suppose maintenant que la mesure initiale est $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Répondre aux mêmes questions que dans la question (15).

(17) Proposer une mesure initiale pour que $P(X_7 = 6) = P(X_{12} = 6) = 2/21$.

Correction

(1) $C(\ln 2 - \ln 1) = 1$, donc $C = 1/\ln 2$. La fonction de répartition est 0 pour $x < 1$, $C(\ln x)$ pour $1 \leq x < 2$ et 1 pour $x \geq 2$.

(2) Par la méthode d'inversion $C \ln x = u$, $X = \exp((\ln 2)U)$ est de loi voulue.

(3) Cette intégrale est $Ef(X)$ avec $f(x) = \exp(\sin x + \cos x)$, X est comme dans la question (1). On calcule pour n grand $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$, Les v.a. $X_i = \exp((\ln 2)U_i)$, $i = 1, \ldots, n$ comme dans la question (2).

Cette méthode est fondée sur la loi de grands nombres qu'il fallait énoncer comme dans le poly.

(4) On divise le segment $[0, 1]$ en 4 sous segments Δ_i pour $i = 1, 2, 3, 4$ de longueurs p_1, p_2, p_{-1}, p_{-2}, respectivement, on pose $X = \sum_{i=1,2,3,4} a_i 1_{\Delta_i}(U_i)$, où $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -1$, $a_4 = -2$.

(5) Elle est de loi Binomiale de paramètres (n, p_1). Cette probabilité vaut $np_1(p_2 + p_3 + p_4)^{n-1}$.

(6) S_n converge en loi vers la loi de χ^2 à 3 degrés de liberté, c'est la somme de carrés de trois v.a. Gaussiennes centrées réduites et indépendantes.

(7) C'est la probabilité qu'une variable aléatoire de loi χ^2 à 3 degrés de liberté est inferieure à 25. $C = (\sqrt{2\pi})^{-3}$, $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 25\}$ une sphère de rayon 5.

(8) Le fonction $\exp(-x)$ étant continue bornée, ceci converge vers $E\exp(-S)$ où S est de loi χ^2 à 3 degrés de liberté. C'est donc

$$(\sqrt{2\pi})^{-3} \int_{R^3} \exp(-x^2 - y^2 - z^2) \exp(-x^2/2 - y^2/2 - z^2/2) dxdydz$$

ce qui est $(3\sqrt{3})^{-1}$.

(9) Le bon nombre est $\chi_{0.05,3} = 7,81$. On calcule $T = \frac{(4800-5000)^2}{5000} + \frac{(2300-2000)^2}{2000} + \frac{(1800-2000)^2}{2000} + \frac{(1100-1000)^2}{1000}$. Si $T \geq \chi_{0.05,3}$, on rejete l'hypothèse, sinon on accepte.

(10) Les classes $\{2, 3, 6\}$, $\{5, 7\}$ sont fermées, $\{1, 4\}$ n'est pas fermée.

(11) Sous cette mesure initiale la CM est restreinte à la classe récurrente $\{2, 3, 6\}$, d'où la limite est infinie p.s. dans les deux cas.

(12) On note $h_1^{\{2,3,6\}} = a$, $h_4^{\{2,3,6\}} = b$, on résout le système $a = 1/6a + 1/3b + 1/2$, $b = 1/4a$, donc $a = 2/3$, $b = 1/6$.

$h_1^{\{5,7\}} = 1/3$, $h_4^{\{5,7\}} = 5/6$.

(13) Après les calculs, la mesure invariante $(0, c4/12, c9/12, 0, (1 - c)/3, c8/12, (1 - c)2/3)$.

(14) Pour $i = 1, 4$ la limite est 0, car 1 et 4 sont transients.

Pour $i = 2, 3, 6$ c'est $(2/3)(4/21), (2/3)(9/21), (2/3)(8/21)$ respectivement, c'est à dire $h_1^{\{2,3,6\}}$ multiplié par π_i où π_i la mesure invariante de l'état i pour une CM irréductible apériodique(!) et finie restreinte à la classe $\{2, 3, 6\}$.

Pour $i = 5, 7$ c'est $(1/6)(1/3), (1/6)(2/3)$ pour les mêmes raisons.

(15) Par le thm ergodique $\alpha = -1$ et la limite est $\pi_2 = 4/21$ p.s. c'est à dire la mesure invariante de l'état 2 pour une CM irréductible et finie restreinte à la classe $\{2, 3, 6\}$.

(16) Par le thm ergodique $\alpha = -1$ et la loi limite prend deux valeurs : $\pi_2 = 4/21$ avec probabilité $h_1^{\{2,3,6\}} = 2/3$ et 0 avec probabilité 1/3.

(17) Il siffit de prendre la mesure invariante avec $c = 1/4$ dans la question 13.