Sorbonne Universités
Licence - Mathématiques - 3LM246

Année 2017–2018
Processus et simulations

Examen 3M246, Deuxième Session

(1) **Partie I : CM.** On considère une Chaine de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition :

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 5/7 & 0 & 0 & 2/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/7 & 0 & 0 & 4/7 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner les classes d'états, indiquer lesquelles sont fermées.

(2) Que pouvez-vous dire de la nature des séries $\sum_{n\geq 1} p_{2,2}^{(n)}$, $\sum_{n\geq 1} p_{4,4}^{(n)}$?

(3) On note $h_i^A = P(\exists n \geq 0 : X_n \in A \mid X_0 = i)$. Donner h_i^2 pour $i = 1, 2, 3, 5, 7$. Calculer h_i^2 pour $i = 4, 6$.

(4) Calculer la famille de mesures invariantes pour cette CM.

(5) On calcule la matrice $\widetilde{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$. Donner la deuxième et la sixième colonne de la matrice $\widetilde{P}$, argumentez votre réponse. *Suggestion : pensez au sens probabiliste des éléments de la matrice* $\widetilde{P}$.

(6) $V_2(n) = (1/n)\sum_{k=0}^{n} 1_2(X_k)$ la proportion du nombre de visites dans l'état 2. Soit $X_0 = 5$. La suite $V_2(n)$ converge-t-elle quand $n \to \infty$? Si oui, dans quel sens ? Quelle est sa limite ?

(7) Soit $X_0 = 4$. La suite $V_2(n)$, converge-t-elle sous cette mesure initiale ? Si oui, quelle est sa limite ?

(8) Soit $T^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$. Donner $E_4 T^2$. Calculer $E_4 T^{\{1,2,3,5,7\}}$.

(9) **Partie II : Statistiques et Simulations de lois.**
On considère une loi à densité $f(x) = \cos(x) 1_{[0,\pi/2]}(x)$. Donner sa fonction de répartition.

(10) Proposer **deux** méthodes de simulation d'une suite de v.a. indépendantes $X_1, X_2, X_3, \ldots$ de densité $f(x) = \cos(x)1_{[0,\pi/2]}(x)$ *Suggestion : une méthode peut être déduite de la question précédente. L'autre méthode a été apprise en cours.*

(11) Trouver a pour que la variable aléatoire $1_{[0,a[}(X_1)$ soit la variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $\sqrt{3}/2$.

(12) Comment à partir de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ simuler maintenant une suite de v.a. indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\sqrt{3}/2$?

(13) Comment à partir de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ simuler maintenant une variable aléatoire de loi géomètrique de paramètre $\sqrt{3}/2$?

(14) Donner la définition de la loi de χ^2 à n-degrés de liberté. Proposer une méthode de simulation de cette loi.

(15) Donner la définition de la loi de Student de n degrés de liberté. Proposer une méthode de simulation de cette loi à partir de sa définition.

(16) Soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires, ξ_n est de loi de χ^2 à n degrés de liberté. Trouver la limite en loi de la suite $(1/n)\xi_n$ quand $n \to \infty$.

(17) Soient $X_1, \ldots, X_{10}$ des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes de paramètres (a, σ^2). La loi de $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 - (1/10)(\sum_{i=1}^{10} X_i)^2$ est la même que celle de constξ_n pour une constante et un certain numéro n. Donner la constante et le numéro n.
Rediger brièvement la procédure de constrution de l'intervalle de confiance pour le paramètre σ^2 sans connaitre a.

(18) Soit $(\zeta_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires, ζ_n est de loi de Student à n degrés de liberté. Trouver une limite en loi de la suite $(\zeta_n)_{n\geq 0}$ quand $n \to \infty$.

Examen 3M246, Correction, deuxième session.

(1) Les classes fermées sont $\{1,7\}$, $\{2,5\}$, $\{3\}$, et non fermée $\{4,6\}$.
(2) $\sum_{n\geq 1} p_{2,2}^{(n)} = \infty$ car 2 est récurrent, $\sum_{n\geq 1} p_{4,4}^{(n)} < \infty$ car 4 est transient.
(3) $h_i^2 = 1$ pour $i = 2,5$; $h_i^2 = 0$ pour $i = 1,3,7$. On compose $h_4^2 = 1/8 + 1/2h_6^2$, $h_6^2 = (1/4)h_4^2 + (1/4) + (1/4)h_6^2$. On obtient $h_4^2 = 7/20$, $h_6^2 = 9/20$.
(4) On a $(c_1(2/3), c_2(3/5), c_3, 0, c_2(1/3), 0, c_2(2/5))$, $c_1, c_2, c_3 \geq 0$, $c_1 + c_2 + c_3 = 1$.
(5) $\widetilde{p}_{i,2} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 2 \mid X_0 = i)$: donc $\widetilde{p}_{1,2} = 0$, $\widetilde{p}_{2,2} = 3/5$, $\widetilde{p}_{3,2} = 0$, $\widetilde{p}_{4,2} = 7/20 \times 3/5$, $\widetilde{p}_{5,2} = 3/5$, $\widetilde{p}_{6,2} = 9/20 \times 3/5$, $\widetilde{p}_{7,2} = 0$. (Argument : la classe $\{2,7\}$ est fermée, apériodique, on applique le thm de convergence vers la mesure invariante).
(6) La suite coverge p.s. vers 3/5 par le Thm ergodique.
(7) La suite coverge en loi vers une v.a. à deux valeurs : elle est égale 3/5 avec probabilité 7/20, et 0 avec probabilité 13/20.
(8) Comme $h_4^2 < 1$, on a $E_4 T^2 = \infty$. Notons $E_4 T^{\{1,2,3,5,7\}} = k_4$, $E_6 T^{\{1,2,3,5,7\}} = k_6$. On a $k_4 = 1 + (1/2)k_6$, $k_6 = 1 + (1/4)k_4 + (1/4)k_6$, d'où $k_2 = k_4 = 2$.
(9) $F_X(x) = 0$ pour $x \leq 0$, $F_X(x) = \sin x$ pour $0 < x < \pi/2$, $F_X(x) = 1$ pour $x \geq \pi/2$.
(10) 1) On simule $U_1, U_2, \ldots, U_n$ une suite de v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$, on calcule $\arcsin U_1$, $\arcsin U_2$... (méthode d'inversion).
2) On simule une suite de v.a. $(V_1, W_1), (V_2, W_2), \ldots$, indép., V_i de loi uniforme sur $[0, \pi/2]$, W_i de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $\nu_1 = \min\{n \geq 1 : W_n \leq cosV_n\}, \ldots, \nu_k = \min\{n \geq \nu_{k-1} : W_n \leq cosV_n\}$, On prend V_{ν_1}, V_{ν_2}, V_{ν_3} ... (méthode de rejet)
(11) On cherche a tel que $\int_0^a \cos x dx = \sin a = \sqrt{3}/2$, $a = \pi/3$.
(12) On simule $1_{[0,\pi/3[}(X_1)$, $1_{[0,\pi/3[}(X_2)$, $1_{[0,\pi/3[}(X_3)$...
(13) $\nu = \min\{n \geq 1 : X_n \leq \pi/3\}$ est de loi géomètrique de paramètre $\sqrt{3}/2$.
(14) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indép. Gaussiennes centrées réduites, alors $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ est de loi χ^2 de n degrés de liberté. Il faut simuler $X_1, \ldots, X_n$, pour cela on a appris par example la méthode de Box-Muller en TD ou la méthode de rejet à partir de loi exponentielles en cours.
(15) Soit Z une v.a. Gaussienne centrée réduite, Y une v.a. de loi de χ^2 à n degrés de libertés, Z et Y sont indép., ALors $\frac{Z\sqrt{n}}{\sqrt{Y}}$ est de loi de Student de n degrés de liberté.
On simule Y comme dans la question précédente. On simule Z indép. de Y (simulation de Gaussiennes), et on calcule $\frac{Z\sqrt{n}}{\sqrt{Y}}$.
(16) La loi de ξ_n et la loi de la somme de n v.a. indépendantes dont l'espérance est 1. Alors par la loi de grands nombres la loi de ξ_n/n converge vers la loi de la constante 1 quand $n \to \infty$.
(17) C'est la loi de $10V_{10}$ dans le notations du cours, la loi de χ^2 à 9 degrés de liberté multiplié par la constante σ^2, donc $const = \sigma^2$, $n = 9$. Alors $P(10V_{10}/\sigma^2 < c) = P(\chi_9^2 < c)$. Pour le niveau de confiance α donné, on cherche (dans les tables de la loi de χ^2 à 9 degrés de liberté) c_α pour que $P(\chi_9^2 < c_\alpha) = \alpha$. Alors l'intervalle $\sigma^2 \in [10V_{10}/c_\alpha, \infty[$.
(18) La loi de ζ_n et la loi du produit de deux v.a. indépendantes $Z_n \times \sqrt{n/\xi_n}$. La loi de Z_n est la loi d'une v.a. Gaussienne centrée réduite. Donc Z_n converge en loi vers la loi Gaussienne centrée réduite. Par une question précédente, $\sqrt{n/\xi_n}$ converge en loi vers une constante, c'est 1. Alors par un Thm du cours, comme une des deux suites dans le produit converge vers une constante, ζ_n converge en loi vers la loi Gaussienne centrée réduite.